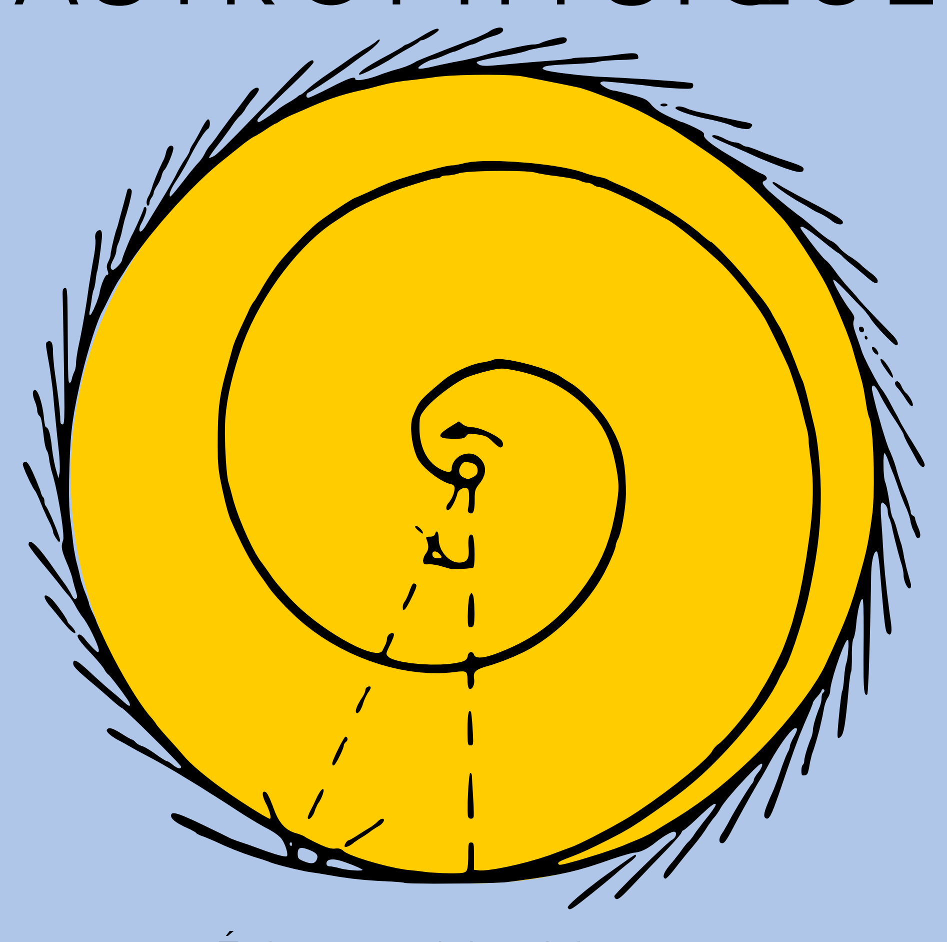
V. Ginzburg

PHYSIQUE THÉORIQUE ET ASTROPHYSIQUE



Éditions Mir Moscou

В. Л. ГИНЗБУРГ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И АСТРОФИЗИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО « НАУКА »
МОСКВА

V. GINZBURG

PHYSIQUE THÉORIQUE ET ASTROPHYSIQUE

EDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par Valentin Polonski

На французском языке

PRÉFACE

Il existe de nombreux cours de physique théorique, et on peut citer entre autres le volumineux ouvrage de L. Landau et E. Lifchitz dont la réputation n'est plus à faire. Toutefois, aucun ouvrage ne saurait embrasser toutes les questions. Bien au contraire, il est souvent impossible d'examiner d'une façon exhaustive tous les sujets traités. Or, selon les goûts, les capacités, la formation, les penchants, etc., la préférence de chacun peut aller à des approches, arguments, exemples et démonstrations tout à fait différents.

Le seul moyen de suffire à la tâche consiste évidemment à publier des cours différents, et surtout des cours complémentaires, dont l'objectif serait non pas un exposé suivi, mais la description de certains aspects, questions et méthodes. Les cours de cette sorte se distinguent en principe d'un exposé systématique par le choix des matières qui dans une grande mesure n'est pas fixé à l'avance. Il en est de même du style et de la présentation de l'exposé, alors que les cours systématiques doivent respecter des conditions très serrées de concision, de perfection des formalismes appliqués, de l'unification des notations, etc. L'ouvrage que nous présentons au lecteur est justement un cours de ce genre, consacré à certaines questions de physique et d'astrophysique théoriques. La table des matières indique ces questions mais grosso modo on peut dire que les problèmes traités sont plus ou moins liés à l'électrodynamique.

Pour ne pas compromettre cette tendance, bien qu'elle ne soit pas très nette, nous avons laissé de côté toute une série de questions de la Relativité générale et de la physique statistique qui, à notre avis, devraient aussi faire l'objet de cours complémentaires analogues.

Notre exposé s'inspire des cours professés aux étudiants de Physique et d'Astrophysique de l'Institut de Physique technique de Moscou. Ces conférences n'avaient pas pour but de remplacer un cours suivi, leur présentation ayant plutôt le caractère de « chapitres complémentaires », mais elles tenaient compte des intérêts de la chaire, et tout autant des moyens de l'auteur. Non que ses préférences soient plus importantes ou plus intéressantes que bien d'au-

tres, mais en exposant ce qu'on connaît bien on peut espérer compléter réellement les ouvrages et monographies déjà existants sans risquer de les recopier ou du moins de redire ce qui a déjà été dit.

Pour ce qui est du caractère de l'exposé, on retiendra que ce n'est pas un recueil de textes conçus pour des conférences, il doit servir à préparer celles-ci et comporte entre autres de nombreuses matières peu susceptibles d'une présentation orale. Sous ce rapport, le style de l'ouvrage l'apparente plutôt à une monographie ou à des panoramas, d'autant plus que la liste des références est assez longue. Parmi ces dernières, on trouve assez souvent le nom de l'auteur, mais ce fait, pas plus que le choix des matières, ne saurait être imputé à des présomptions de la part de l'auteur, son seul dessein étant de traiter des questions bien connues exposées en détail dans les articles cités; de plus, un bon nombre de ces articles ont été utilisés directement dans le texte.

Notons enfin que l'ouvrage ne s'adresse certes pas aux physiciens qui ont un penchant pour les mathématiques auxquels on assimile souvent les théoriciens « purs ». Les mathématiques jouent en physique théorique un rôle très grand et bien naturel, mais la généralisation et l'élégance mathématique ne se justifient pas toujours: elles coûtent cher. Or, le fait est universellement connu qu'en physique la plupart des résultats nouveaux ont été obtenus par des moyens relativement simples, leur « mathématisation » ayant été réalisée ultérieurement. Quoi qu'on en dise, en physique théorique, l'essentiel, c'est la physique et non les mathématiques. Donc, on est en droit d'exposer les questions théoriques à la lumière de la physique générale, autant que de vouloir contribuer à la tendance actuelle de la perfection mathématique.

J'espère que l'ouvrage sera profitable aux étudiants des dernières années, ainsi qu'aux boursiers de recherche et aux chercheurs.

Enfin, je profite de l'occasion pour exprimer ma gratitude à tous ceux qui ont relu tout le manuscrit ou qui l'ont revu en partie et qui ont contribué par leurs suggestions à améliorer le texte.

Vitali Ginzburg

Juillet 1974

CHAPITRE PREMIER

FORMALISME HAMILTONIEN EN ÉLECTRODYNAMIQUE

Formalisme hamiltonien de l'électrodynamique classique dans le vide. Quantification. Photons et pseudo-photons. Un électron rayonne-t-il s'il est animé d'un mouvement uniforme?

Pour traiter toute une série de questions relatives à l'électrodynamique nous allons recourir largement à la méthode dite de Hamilton ou au formalisme hamiltonien. Son application à l'électrodynamique met cette dernière sous une forme particulièrement proche de la mécanique. Ceci fait que dans le cadre du formalisme hamiltonien le passage du classique au quantique en électrodynamique est parfaitement analogue au passage de la mécanique classique (newtonienne) à la mécanique quantique non relativiste. De nos jours, l'électrodynamique quantique et, en général, la théorie quantique des champs sont les disciplines où dominent des méthodes plus raffinées, définies par des arguments probants. Pourtant, aujourd'hui encore, lorsqu'il s'agit de comprendre de nombreuses manifestations physiques, l'application du formalisme hamiltonien est selon nous parfaitement justifiée (c'est par exemple le cas de Heitler [1]). D'autre part, dans ce qui suit, le formalisme hamiltonien s'emploie surtout en électrodynamique classique aussi bien pour le vide que pour le milieu.

Avant de passer au formalisme hamiltonien, nous donnerons les équations et relations principales en les écrivant en détail par souci de commodité.

Voici la forme usuelle des équations de Maxwell dans le vide:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\\ &\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho;\\ &\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\\ &\operatorname{div}\mathbf{H}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

Ici **H** est l'intensité du champ magnétique ; **E**, l'intensité du champ électrique ; ρ, la densité des charges ; **v**, leur vitesse (partout, dans le présent ouvrage, on utilise le système C.G.S.). Pour simplifier

adoptons que dans le champ électromagnétique il y a une charge ponctuelle e (rayon vecteur $\mathbf{r}_i(t)$). Dans ce cas la densité de charge est donnée par la fonction δ:

$$\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)). \tag{1.2}$$

On sait que les relations (1.1) peuvent être ramenées aux équations des potentiels électromagnétiques **A** et φ associés aux champs **E** et **H** par les relations

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{1.3}$$

(1.3) entraîne que la troisième et la quatrième équations de (1.1) sont satisfaites automatiquement ; on le vérifie sans peine par substitution directe.

En appliquant (1.3) et l'identité

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} \tag{1.4}$$

on obtient de la première et de la deuxième expressions de (1.1) les équations des potentiels **A** et φ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A}\right) &= -\frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}, \\ \Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A} &= -4\pi\rho. \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Le système d'équations (1.5) définit les potentiels **A** et φ. Les champs **E** et **H** s'obtiennent à l'aide des égalités (1.3).

On sait que la définition du potentiel vecteur **A** et du potentiel scalaire φ est ambiguë. En effet, prenons des potentiels nouveaux

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad}\chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}, \tag{1.6}$$

où χ est une fonction arbitraire des coordonnées et du temps. Une telle opération s'appelle transformation de gradient ou de jauge. On montre aisément que la transformation (1.6) ne fait pas changer les champs **A** et **H**. Ceux-ci s'expriment aussi bien par **A**$'$ et φ' que par **A** et φ ; pour s'en convaincre on n'a qu'à porter (1.6) dans (1.3).

La définition des potentiels étant ambiguë, nous sommes autorisés à imposer à **A** et φ une condition supplémentaire. Cette condition peut être choisie de façon à simplifier les équations (1.5).

Imposons, par exemple, la condition supplémentaire suivante:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{1.7}$$

Cette condition d'invariance relativiste s'appelle parfois jauge de Lorentz. Elle peut s'écrire

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i}=0, \qquad (1.7a)$$

où, comme dans tout ce qui suit, on suppose que l'on somme sur les indices deux fois répétés.

On voit aisément que, les conditions (1.7) étant respectées, les équations de Maxwell se mettent sous la forme

$$\left.\begin{aligned}\Box\,\mathbf{A}&\equiv\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}=-\frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v},\\ \Box\,\varphi&\equiv\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi=-4\pi\rho.\end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

Il ne faut pas penser que la condition (1.7) et le système d'équations (1.8) déterminent complètement $\mathbf{A}$ et φ. Nous pouvons encore réaliser la transformation de jauge de la forme (1.6) où, dans le cas présent, la fonction χ doit satisfaire à l'équation homogène $\Box\chi=0$. Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ restent alors invariants.

La division du champ en composantes longitudinale et transversale revêt une grande importance, notamment dans le cadre du formalisme hamiltonien.

Décomposons les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ de la façon suivante :

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_l+\mathbf{E}_{tr},\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_{tr}, \qquad (1.9)$$

de plus, $\operatorname{div}\mathbf{E}_{tr}=0$ et en vertu de (1.1) $\operatorname{div}\mathbf{H}_{tr}=\operatorname{div}\mathbf{H}=0$.

Demandons que le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ décrive seulement le champ transversal, et à cet effet, au lieu de la condition supplémentaire (1.7), imposons la condition

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=0. \qquad (1.10)$$

Le potentiel qui satisfait à cette condition est parfois noté $\mathbf{A}_{tr}$.

Si la condition (1.10) est remplie, les équations (1.5) de $\mathbf{A}$ et φ deviennent

$$\Delta\varphi=-4\pi\rho, \qquad (1.11)$$

$$\Delta\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}+\frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \qquad (1.12)$$

Ainsi nous avons obtenu pour le potentiel φ l'équation « statique » de Poisson. La solution au cas où ρ est la densité de charge de la source ponctuelle (1.2) est bien connue

$$\varphi=\frac{e}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_l(t)|}; \qquad (1.13)$$

$\mathbf{r}_l(t)$ est ici le point où se trouve la charge à l'instant t. Le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ décrit maintenant seulement le champ transversal. La

jauge (1.10) est dite de Coulomb *). Les potentiels **A** et φ sont définis ici à la fonction χ (r, t) vérifiant la condition $\Delta\chi = 0$ près.

Calculons maintenant l'énergie du champ électromagnétique

$$\mathcal{H} = \int \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} dV. \tag{1.14}$$

Portons ici les expressions des champs **E** et **H** sous la forme (1.9); il est évident que dans le cas de la jauge de Coulomb (1.10)

$$\mathbf{E}_{tr} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{E}_l = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{1.15}$$

En portant (1.9), (1.15) dans (1.14), on obtient

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} \int (E_{tr}^2 + H^2)\, dV + \frac{1}{8\pi} \int E_l^2\, dV + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E}_{tr}\mathbf{E}_l\, dV.$$

On montre sans peine que pour un système fermé, lorsque le champ disparaît « à l'infini », la dernière intégrale s'annule. Ainsi l'énergie totale du champ électromagnétique se compose de l'énergie du champ transversal et de l'énergie du champ longitudinal.

Si le champ compte plusieurs charges ponctuelles, l'énergie du champ longitudinal est simplement celle de l'interaction coulombienne des charges, c.-á-.d.

$$\mathcal{H}_l = \frac{1}{8\pi} \int E_l^2\, dV = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{e_i e_j}{r_{ij}(t)}. \tag{1.16}$$

L'énergie propre des charges ponctuelles est infinie et ici bien entendu, nous n'en tenons pas compte. Au fond, la part longitudinale du champ électromagnétique n'est pas quantifiée, la quantification intervenant seulement pour le champ transversal (cf. [1] et plus loin).

L'énergie du champ d'une charge ponctuelle étant infinie, il faut souvent admettre (au moins à l'étape intermédiaire) que la charge est « étalée » sur un domaine de rayon r_0. Dans ce cas, $\mathcal{H}_l \sim \sim e^2/r_0$. Le rayon électrostatique (classique) d'un électron, défini par la relation $r_e = e^2/mc^2$, où e et m sont la charge et la masse de l'électron observées, vaut $r_e = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm. Nous ne traiterons pas ici les questions relatives à la masse électromagnétique de l'électron (ni à celle des autres particules), à son allure ponctuelle, etc.

*) Le fait qu'il est possible d'introduire la jauge de Coulomb et, par suite, d'utiliser les équations (1.11) et (1.12) est assez évident. Aussi est-il curieux de signaler qu'il y a une trentaine d'années, lorsque l'électrodynamique classique a déjà atteint « l'âge de la raison », le formalisme hamiltonien se développait généralement sur la base des équations (1.8), ce qui entraînait des complications (cf., par exemple, la première édition de l'ouvrage de Heitler [1], le meilleur à l'époque, publié en 1936); l'article [2] consacré à cette jauge et publié en 1939 dans le *Journal expérimentalnoï i téorétitcheskoï fysiki* (JETF) est un autre témoignage de son impopularité à l'époque.

En progressant toujours vers la forme hamiltonienne de l'électrodynamique, développons le potentiel vecteur du champ électromagnétique transversal **A** en série de Fourier

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda} q_{\lambda}(t) \sqrt{4\pi}\, c\mathbf{e}_{\lambda} \exp(i\mathbf{k}_{\lambda}\mathbf{r}). \tag{1.17}$$

Le coefficient numérique $\sqrt{4\pi c}$ est un facteur de normalisation. Le vecteur de polarisation $\mathbf{e}_{\lambda}$ est le vecteur unité, c.-à-d. que $e_{\lambda}^{2} = 1$ (pour simplifier, on admet ici et généralement plus loin que les vecteurs $\mathbf{e}_{\lambda}$ sont réels). Pour appliquer le développement (1.17), il faut confiner en pensée le champ électromagnétique dans une sorte de « caisse ». On peut voir que la dimension de cette « caisse » ne figure dans aucune des expressions des grandeurs physiquement observées. Aussi, pose-t-on dans tout ce qui suit que cette dimension est égale à l'unité

$$L = L^{3} = 1.$$

Le potentiel vecteur **A** est une grandeur réelle; c'est pourquoi le développement (1.17) entraîne que $q_{-\lambda} = q_{\lambda}^{*}$. Comme le champ est transversal, $\mathbf{e}_{\lambda} \cdot \mathbf{k}_{\lambda} = 0$, c.-à-d. le vecteur de polarisation de l'harmonique du potentiel d'indice λ est perpendiculaire au vecteur d'onde $\mathbf{k}_{\lambda}$ de cette harmonique. A chaque direction $\mathbf{k}_{\lambda}$ correspondent deux vecteurs $\mathbf{e}_{\lambda}$. C'est pourquoi il faudrait introduire partout encore un indice susceptible de prendre deux valeurs ou, autrement dit, distinguer les vecteurs $\mathbf{e}_{\lambda 1}$ et $\mathbf{e}_{\lambda 2}$. Pour simplifier, nous ne le ferons pas dans ce qui suit et au besoin nous procéderons à la sommation suivant les polarisations des expressions finies (pour ce faire on admet que $\mathbf{e}_{\lambda 1}\mathbf{e}_{\lambda 2} = 0$).

Nous pouvons également réaliser un autre développement du potentiel vecteur, notamment

$$\mathbf{A} = \sum_{\lambda, i} q_{\lambda i} \mathbf{A}_{\lambda i}, \tag{1.18}$$

où l'indice i peut prendre seulement les valeurs 1 et 2.

$$\mathbf{A}_{\lambda 1} = \sqrt{8\pi}\, c\mathbf{e}_{\lambda} \cos(\mathbf{k}_{\lambda}\mathbf{r}), \quad \mathbf{A}_{\lambda 2} = \sqrt{8\pi}\, c\mathbf{e}_{\lambda} \sin(\mathbf{k}_{\lambda}\mathbf{r}). \tag{1.19}$$

On voit facilement que le développement (1.18) se fait suivant les fonctions $\mathbf{A}_{\lambda 1}$ et $\mathbf{A}_{\lambda 2}$ qui sont orthogonales, c.-à-d.

$$\int \mathbf{A}_{\lambda i} \mathbf{A}_{\mu j}\, dV = 4\pi c^{2} \delta_{\lambda\mu} \delta_{ij} \tag{1.20}$$

(l'intégration porte sur le volume de la « caisse »).

On admet que le champ est confiné dans une « caisse » aux parois miroirs; les composantes du vecteur d'onde $\mathbf{k}_{\lambda}$ doivent donc être des

entiers multiples de $2\pi/L$, où L est la dimension linéaire de la « caisse », c.-à-d.

$$\mathbf{k}_\lambda = \left\{ \frac{2\pi}{L} n_x, \frac{2\pi}{L} n_y, \frac{2\pi}{L} n_z \right\};$$

ici n_x, n_y et n_z sont des entiers positifs (cela veut dire que la sommation de (1.18) se fait suivant la demi-sphère des directions $\mathbf{k}_\lambda$). Il semble que ce qui vient d'être dit est en contradiction avec l'affirmation antérieure d'après laquelle les dimensions L de la « caisse » n'ont pas d'importance et sont prises égales à 1. Or, on établit sans peine qu'il n'y a là aucune contradiction, les valeurs de L étant suffisamment grandes, cette quantité ne figure pas dans les résultats définitifs.

D'après (1.18) le champ électromagnétique est totalement défini par la collection de grandeurs $q_{\lambda i}(t)$. Celles-ci forment un ensemble infini (dénombrable). De la sorte, un développement de la forme (1.18) permet de représenter le champ comme un système à nombre infini, mais dénombrable, de degrés de liberté.

Voyons comment l'énergie du champ électromagnétique s'exprime par les quantités $q_{\lambda i}(t)$ que nous sommes légitimes d'appeler coordonnées du champ. Nous nous intéressons à l'énergie

$$\mathcal{H}_{tr} = \int \frac{E_{tr}^2 + H^2}{8\pi} dV. \qquad (1.21)$$

Si **A** est donné sous la forme (1.18), nous pouvons définir les champs $\mathbf{E}_{tr}$ et **H** d'après les formules (1.3) et (1.15), élever les grandeurs obtenues au carré et les porter dans l'intégrale (1.21) pour obtenir

$$\mathcal{H}_{tr} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, i} (p_{\lambda i}^2 + \omega_\lambda^2 q_{\lambda i}^2). \qquad (1.22)$$

Nous avons introduit ici les notations

$$p_{\lambda i} = \dot{q}_{\lambda i}, \quad \omega_\lambda^2 = c^2 k_\lambda^2; \qquad (1.23)$$

le point traduit ici la dérivation par rapport au temps. Pour obtenir l'expression (1.22) on a utilisé la condition d'orthogonalité (1.20).

Chaque terme de la somme (1.22) est l'énergie d'un oscillateur classique de fréquence angulaire (pulsation) ω_λ. Ainsi, (1.22) est la somme des énergies des oscillateurs isolés qu'on appelle oscillateurs du champ.

Si l'on connaît toutes les $q_{\lambda i}(t)$ de (1.18), on peut calculer l'énergie du champ électromagnétique transversal. Par conséquent la tâche se ramène à déterminer $q_{\lambda i}(t)$.

Pour trouver leurs expressions, portons le développement (1.18) dans l'équation (1.2) du potentiel vecteur transversal ». En mul-

tipliant par $\mathbf{A}_{\lambda i}$ les deux membres de l'équation obtenue et en intégrant sur le volume de la « caisse », on obtient les équations suivantes

$$\ddot{q}_{\lambda i} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda i} = \frac{e}{c}\mathbf{v}\mathbf{A}_{\lambda i}(\mathbf{r}(t)) = e\sqrt{8\pi}\,(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}(t))\begin{cases}\cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}(t)),\\ \sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}(t)).\end{cases} \tag{1.24}$$

Ce sont là les équations d'un oscillateur en présence d'une force d'excitation, $\cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})$ étant pris pour $i = 1$, et $\sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})$, pour $i = 2$.

Les équations (1.24) se déduisent sous l'hypothèse que le champ compte un seul électron ponctuel (charge e; cf. (1.2)), animé d'une vitesse $\mathbf{v}(t)$. La généralisation au cas des charges multiples est évidente.

Toutes les relations examinées peuvent s'écrire d'une façon parfaitement analogue aux équations de Hamilton de la mécanique classique:

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}(p, q)}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}(p, q)}{\partial p}, \tag{1.25}$$

où $\mathcal{H}(p, q)$ est la fonction de Hamilton d'un système mécanique; q et p les coordonnées généralisées et les impulsions généralisées respectivement.

Notre tâche consiste à trouver une fonction $\mathcal{H}(p_{\lambda i}, q_{\lambda i})$ telle qu'on puisse en tirer l'équation du mouvement de la forme (1.25).

Il est évident que dans le cas du champ libre (sans charges) les équations (1.24) de $q_{\lambda i}$, c.-à-d. les équations

$$\ddot{q} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda i} = 0, \tag{1.26}$$

peuvent se mettre sous la forme de Hamilton, si

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{tr} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda, i}(p_{\lambda i}^2 + \omega_\lambda^2 q_{\lambda i}^2), \tag{1.27}$$

où $\mathcal{H}_{tr}$ est l'énergie du champ électromagnétique transversal (1.22).

En effet, on tire de (1.25) et (1.27)

$$\dot{p}_{\lambda i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{\lambda i}} = -\omega_\lambda^2 q_{\lambda i}, \quad \dot{q}_{\lambda i} = p_{\lambda i}, \tag{1.28}$$

ce qui coïncide avec (1.26).

La série (1.18) avec les $q_{\lambda i}$ déterminées par (1.26) est la somme des ondes électromagnétiques planes qui se propagent à la vitesse de la lumière. En effet, (1.26) implique que $q_{\lambda i} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$; de plus, $\omega = \omega_\lambda$. Par ailleurs, $\omega_\lambda^2 = c^2 k^2 \lambda$ (cf. (1.23)) et, par conséquent, le champ varie suivant la loi $\cos \omega_\lambda (t - \mathbf{s}_\lambda \mathbf{r}/c)$, ou $\sin \omega_\lambda (t - \mathbf{s}_\lambda \mathbf{r}/c)$, où $\mathbf{s}_\lambda = \mathbf{k}_\lambda / k_\lambda$; $\mathbf{s}_\lambda^2 = 1$. Ainsi, en l'absence de charges, un champ se compose d'ondes planes qui se propagent à

la vitesse de la lumière; d'ailleurs, ce résultat est immédiat des équations de départ.

Si la fonction de Hamilton classique d'un champ électromagnétique sans charges traduit dans le vide l'énergie du champ, en présence des charges il convient de plus tenir compte de l'énergie avec laquelle ces charges interagissent avec le champ. On sait très bien que dans le cas non relativiste, l'énergie d'une charge dans le champ est de la forme

$$\mathscr{H}_e = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi. \tag{1.29}$$

L'hamiltonien total du système champ électromagnétique + + particule chargée est ainsi égal à la somme des expressions (1.27) et (1.29)

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)\right)^2 + e\varphi(\mathbf{r}_i) + \mathscr{H}_{tr}, \tag{1.30}$$

où $\mathbf{r}_i$ sont les coordonnées du point où se trouve la particule chargée (s'il y a plusieurs particules, $\mathscr{H}_e$ est la somme des expressions de la forme (1.29); dans ce qui suit, l'indice i de $\mathbf{r}_i$ sera parfois omis).

Cet hamiltonien (jusque-là il s'agit toujours de la fonction de Hamilton classique) conduit à l'aide de (1.25) au système d'équations suivant:

$$\dot{p}_{\lambda i} = -\omega_\lambda^2 q_{\lambda i} + \frac{e}{mc}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\mathbf{A}_{\lambda i}, \quad \dot{q}_{\lambda i} = p_{\lambda i}.$$

Ce système se ramène à l'équation (1.24). En effet, puisque la quantité $\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{p}} = \frac{1}{m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)$ est tout simplement la vitesse de la particule $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$, nous obtenons l'équation déjà déduite. La fonction de Hamilton (1.30) permet également d'obtenir l'équation du mouvement d'une particule dans un champ; en dérivant $\mathscr{H}$ par rapport à $\mathbf{r}$, on obtient

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{r}} = e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right\} + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{A}}. \tag{1.31}$$

Ainsi, l'expression de la fonction de Hamilton (1.30) nous fournit aussi bien l'équation du mouvement des oscillateurs du champ que l'équation du mouvement des particules chargées.

Tout ce que nous examinons ici nous le faisons en approximation non relativiste *) pour profiter de la grande affinité de forme entre la mécanique classique et la mécanique quantique non relativistes. Dans la théorie quantique relativiste des particules de spin 1/2,

*) Il s'agit certainement des particules, puisque l'électrodynamique du vide (ou suivant une vue quantique, la théorie des particules de spin 1 et de masse au repos nulle) est toujours une théorie relativiste.

qui utilise l'équation de Dirac dépourvue d'analogue classique aussi évident, cette affinité disparaît.

Le passage de l'électrodynamique classique sous sa forme hamiltonienne à l'électrodynamique quantique se fait de la même façon que le passage de la mécanique classique non relativiste à la mécanique quantique. Plus précisément, la fonction de Hamilton d'une particule d'impulsion **p** et de coordonnée **r**

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{2m} + e\varphi(\mathbf{r}) \tag{1.32}$$

est remplacée par l'hamiltonien

$$\hat{\mathscr{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + e\varphi, \tag{1.33}$$

où $\hat{\mathbf{p}}$ est l'opérateur d'impulsion de la particule, qui satisfait aux relations de commutation ($\mathbf{r} \equiv \{x_j\}$, $j = 1, 2, 3$)

$$\hat{p}_j x_j - x_j \hat{p}_j = -i\hbar, \tag{1.34}$$

égal à

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla. \tag{1.35}$$

Si la particule se trouve dans un champ électromagnétique, alors **p** de (1.32) est remplacé par $\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)$ et $\hat{\mathbf{p}}$ de (1.33), par

$$\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A} = -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A},$$

respectivement.

L'état d'un système est défini par la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r}, t)$ dont la variation dans le temps est décrite par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{\mathscr{H}}\Psi. \tag{1.36}$$

Les fonctions d'onde des états stationnaires sont de la forme

$$\Psi_n(\mathbf{r}, t) = \exp(-iE_n t/\hbar)\, \psi_n(\mathbf{r}), \tag{1.37}$$

où $\psi_n(\mathbf{r})$ ne dépend pas de t (n est l'indice ou le nombre quantique de l'état stationnaire). Le carré du module de la fonction Ψ de l'état stationnaire (c.-à-d. la probabilité que la particule soit décelée au point donné) est indépendant du temps. En portant (1.37) dans (1.36) et en simplifiant par $\exp(-iE_n t/\hbar)$, on a

$$\hat{\mathscr{H}}\psi_n(\mathbf{r}) = E_n\psi_n(\mathbf{r}). \tag{1.38}$$

Considérons un oscillateur harmonique unidimensionnel à masse égale à l'unité. On sait que son hamiltonien est de la forme

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{p}^2/2 + 1/2\omega^2 q^2 \tag{1.39}$$

(ici $q \equiv \hat{q}$ est la coordonnée et ω_0, la fréquence cyclique de l'oscillateur). L'énergie du n-ième état stationnaire est

$$E_n = \hbar\omega_0 (n + {}^1/_2) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.39a}$$

et la fonction d'onde est de la forme

$$\psi_n (q) = C_n \exp (-q^2/2q_0^2) H_n (q/q_0), \tag{1.39b}$$

où $q_0 = \sqrt{\hbar/\omega_0}$; $H_n (x)$ est le polynôme d'Hermite et C_n, le facteur de normalisation. En particulier

$$\psi_0 (q) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} q_0}} \exp (-q^2/2q_0^2). \tag{1.39c}$$

Dans les transitions de l'état de nombre quantique n à l'état de nombre quantique n', les éléments matriciels de la coordonnée ($q_{nn'}$) et de l'impulsion ($p_{nn'}$) sont nuls si $n' \neq n \pm 1$ et

$$\left.\begin{aligned} q_{n,\,n+1} &= \int \psi_n^* q \psi_{n+1}\, dq = \sqrt{\frac{\hbar (n+1)}{2\omega_0}}, \\ q_{n,\,n-1} &= \sqrt{\frac{\hbar n}{2\omega_0}}, \\ p_{n,\,n+1} &= \int \psi_n^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \right) \psi_{n+1}\, dq = \\ &= -i\omega_0 \sqrt{\frac{\hbar (n+1)}{2\omega_0}} = -i\omega_0 q_{n,\,n+1}, \\ p_{n,\,n-1} &= i\omega_0 \sqrt{\frac{\hbar n}{2\omega_0}} = i\omega_0 q_{n,\,n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{1.40}$$

si $n' = n \pm 1$.

Nous avons dit plus haut que le passage de l'électrodynamique classique à l'électrodynamique quantique se fait de la même façon que dans la mécanique. Pour ce faire, la fonction de Hamilton du système composé d'un champ et d'une particule

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_e + \mathscr{H}_{tr} \tag{1.41}$$

($\mathscr{H}_e$ est la fonction de Hamilton d'une particule dans un champ, examinée plus haut; cf. (1.29)) est remplacée par l'hamiltonien

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_e + \hat{\mathscr{H}}_{tr}, \tag{1.42}$$

où

$$\hat{\mathscr{H}}_{tr} = 1/2 \sum_{\lambda,\, i} (\hat{p}_{\lambda i}^2 + \omega_\lambda^2 q_{\lambda i}^2). \tag{1.43}$$

Tout comme dans la mécanique, l'opérateur d'impulsion $\hat{p}_{\lambda i}$, égal ici à

$$\hat{p}_{\lambda i} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_{\lambda i}}, \qquad (1.44)$$

satisfait aux relations de commutation

$$\hat{p}_{\lambda i} q_{\mu j} - q_{\mu j} \hat{p}_{\lambda i} = -i\hbar \delta_{\lambda\mu} \delta_{ij}. \qquad (1.45)$$

S'il n'y a pas de charges ou si on peut négliger leur interaction avec le champ, qui figure dans $\hat{\mathscr{H}}_e$, la fonction d'onde décrivant l'état du champ $\Psi(q, t)$ (q est l'ensemble des coordonnées $q_{\lambda i}$) vérifie l'équation

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q, t)}{\partial t} = \hat{\mathscr{H}}_{tr} \Psi(q, t). \qquad (1.46)$$

La fonction d'onde de l'état stationnaire $\psi_n(q)$ satisfait alors à l'équation

$$\hat{\mathscr{H}}_{tr} \psi_n(q) = E_n \psi_n(q). \qquad (1.47)$$

On vérifie aisément que E_n est de la forme

$$E_n = \sum_{\lambda, i} \hbar\omega_\lambda (n_{\lambda i} + 1/2) = \sum_{\lambda, i} \hbar\omega_\lambda n_{\lambda i} + 1/2 \sum_{\lambda, i} \hbar\omega_\lambda. \qquad (1.48)$$

Le terme $^1/_2 \sum_{\lambda i} \hbar\omega_\lambda$ est infiniment grand. Pourtant, cette infinitude ne conduit pas dans la théorie à des difficultés importantes et voici pourquoi : premièrement, la quantité physique observée n'est pas l'énergie elle-même, mais la différence d'énergies des états différents ; la somme $^1/_2 \sum_{\lambda i} \hbar\omega_\lambda$, tout en restant constante, ne figure donc pas dans le résultat. Deuxièmement, le passage des équations classiques aux équations quantiques est non univoque. On peut trouver un mode de quantification des équations du champ tel que cet additif disparaisse. En effet, partons de la fonction de Hamilton classique d'un oscillateur sous la forme

$$\mathscr{H} = 1/2 (p^2 + \omega^2 q^2) = 1/2 (p + i\omega q)(p - i\omega q).$$

Alors, en passant à l'hamiltonien, c.-à-d. en remplaçant p par $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$, on amène

$$\hat{\mathscr{H}} = 1/2 (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) - 1/2 \hbar\omega$$

(résultat qui s'obtient parce que les opérateurs $\hat{p}$ et $\hat{q}$ ne commutent pas).

Ainsi, en cherchant l'énergie d'un état stationnaire du champ on obtient l'expression

$$E_n = \sum_{\lambda, i} \hbar\omega_\lambda n_{\lambda i}. \qquad (1.49)$$

La fonction d'onde du champ s'écrit sous la forme d'un produit des fonctions d'onde des oscillateurs isolés, c.-à-d.

$$\psi_n(q) = \prod_{\lambda i} \psi_{n\lambda i}(q_{\lambda i}). \qquad (1.50)$$

La formule (1.49) montre que l'énergie du champ électromagnétique peut être interprétée comme l'énergie de l'ensemble des particules d'énergie $\hbar\omega_\lambda$. On dit souvent que de cette façon nous sommes amenés tout de suite à la notion de photons, les $n_{\lambda i}$ étant les nombres des photons de la sorte donnée. Toutefois il est d'usage de donner le nom de photons (très justifié, d'ailleurs) seulement aux quanta d'un champ de rayonnement, en particulier, de lumière. Dans la plupart des cas, la définition employée est encore plus serrée : les photons sont des quanta d'un champ électromagnétique d'énergie $\hbar\omega$ et d'impulsion $\hbar\mathbf{k}$ ($k = \omega/c$). Dans ce qui suit, nous appellerons photons n'importe quels quanta de rayonnement dans le vide, mais ceci ne change rien au fait que les quanta du champ électromagnétique transversal obtenus dans ce qui précède (appelons-les pseudophotons) ne se ramènent pas en général à des photons. C'est que nous avons examiné non pas un champ de rayonnement, c.-à-d. un champ électromagnétique libre (résolution des équations homogènes du champ), mais un champ arbitraire (résolution des équations inhomogènes du champ : équations en présence des courants et des charges). Un tel champ électromagnétique transversal arbitraire diffère d'un champ de rayonnement ou, en langage quantique, de l'ensemble des photons (à titre d'exemple il suffit de mentionner le champ transversal d'une charge animée d'un mouvement uniforme, qui se déplace dans l'espace à la vitesse de la charge $v < c$). Qui plus est, si le champ transversal (1.45) a été quantifié sans aucune hypothèse, alors les expressions (1.46)-(1.48) aussi bien que les expressions (1.49) et (1.50) ont été obtenues d'une façon inconséquente, en négligeant l'interaction des charges et du champ. Mais si on ne le fait pas, on voit clairement que les coordonnées q du champ figurent dans $\hat{\mathcal{H}}_{tr}$ aussi bien que dans $\hat{\mathcal{H}}_e$, et l'énergie du champ transversal ne peut se mettre sous la forme (1.48), (1.49). L'introduction des pseudo-photons est pourtant justifiée dans un sens, puisque jusqu'à un certain temps on peut considérer que les pulsations ω_λ de (1.49) ne sont pas liées au vecteur d'onde par la relation $\omega_\lambda^2 = c^2k_\lambda^2$. Ces pseudo-photons, dits également virtuels, apparaissent aux états intermédiaires dans les calculs de la théorie des perturbations (cf. plus loin). Autrement dit, l'énergie des photons

virtuels $E_\lambda = \hbar\omega_\lambda$ et leur impulsion $\mathbf{p}_\lambda = \hbar\mathbf{k}_\lambda$ ne sont pas associées par la relation $E_\lambda^2 = c^2 p_\lambda^2$ ($\omega_\lambda^2 = c^2 k_\lambda^2$), vraie seulement pour les photons à impulsion donnée. Comme nous allons le voir, pour le champ transversal entraîné par une charge en mouvement, $\omega = (\mathbf{kv})$, où $\mathbf{v}$ est la vitesse de la charge. Si on considère les quanta d'énergie $\hbar\omega$ correspondants, on voit que ce sont des pseudo-photons qui forment, comme on le dit parfois, le « cortège » d'une charge en mouvement.

Soulignons que nous n'insistons nullement sur l'idée que l'introduction de la notion des pseudo-photons présente un avantage, ni non plus sur le terme tel quel *). Ce qui importe pour nous, c'est d'établir le fait qu'en général le champ électromagnétique transversal n'est pas un ensemble des photons. Dans ce qui suit nous reviendrons encore sur ce sujet.

Même pour un champ de rayonnement, les pseudo-photons qui fugurent dans l'expression (1.49) ne se réduisent pas aux photons d'énergie $\hbar\omega$ et d'impulsion $(\hbar\omega/c)\,(\mathbf{k}/k)$. Cela est dû au fait que ci-dessus (cf. (1.18), (1.19)) on a utilisé le développement suivant les ondes stationnaires. Celles-ci ne sont pas des fonctions propres de l'opérateur d'impulsion et leur quantification conduit aux photons d'impulsion nulle (nous avons en vue un champ de rayonnement pur, libre) **).

Pour obtenir des photons « ordinaires » d'énergie $\hbar\omega$ et d'impulsion $(\hbar\omega/c)\,(\mathbf{k}/k)$, mettons le potentiel vecteur sous la forme d'une somme des ondes mobiles

$$\mathbf{A} = \sum_\lambda (q_\lambda \mathbf{A}_\lambda + q_\lambda^* \mathbf{A}_\lambda^*), \tag{1.52}$$

où

$$\mathbf{A}_\lambda = \sqrt{4\pi}\, c\mathbf{e}_\lambda \exp(i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}), \tag{1.53}$$

et à la différence de (1.17) procédons dans (1.52) à la sommation suivant la demi-sphère, c.-à-d. suivant la moitié des directions $\mathbf{k}_\lambda$.

La fonction de Hamilton de la partie transversale du champ s'écrira alors

$$\mathcal{H}_{tr} = \sum_\lambda (p_\lambda p_\lambda^* + \omega_\lambda^2 q_\lambda q_\lambda^*). \tag{1.54}$$

---

*) Le terme de pseudo-photons s'emploie également dans un tout autre sens. On appelle méthode des pseudo-photons celle qui procède en remplaçant approximativement les composantes de Fourier du champ entraîné par une charge en mouvement, par un ensemble des photons respectif (cf., par exemple, [28]).

**) Pour calculer l'impulsion d'un photon on peut appliquer l'expression de l'impulsion du champ

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{EH}]\, dV \tag{1.51}$$

et définir $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ à travers $\mathbf{A}$, c.-à-d. à l'aide des quantités $p_{\lambda i}$ et $q_{\lambda i}$.

Examinons seulement le champ de rayonnement pur. Alors, nous pouvons admettre que $p_\lambda = \dot{q}_\lambda = -i\omega_\lambda q_\lambda$ (cf. également (1.26) et (1.28)) et

$$\mathcal{H}_{tr} = 2\sum_\lambda \omega_\lambda^2 q_\lambda q_\lambda^*. \tag{1.55}$$

Constatons que les quantités q_λ et q_λ^* ne sont pas des variables canoniques du fait que les équations du mouvement en ces variables ne sont pas de la forme

$$\dot{q}^* = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}, \quad \dot{q} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q^*}. \tag{1.56}$$

Introduisons donc de nouvelles variables

$$Q_\lambda = q_\lambda + q_\lambda^*, \quad P_\lambda = -i\omega_\lambda(q_\lambda - q_\lambda^*). \tag{1.57}$$

On a

$$\mathcal{H}_{tr} = 1/2\sum_\lambda (P_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2). \tag{1.58}$$

La quantification fournit évidemment l'expression (1.49) de l'énergie, et le calcul de l'impulsion du champ donne

$$\mathbf{G} = \sum_\lambda \frac{\hbar\omega_\lambda}{c} n_\lambda \frac{\mathbf{k}_\lambda}{k_\lambda}. \tag{1.59}$$

c.-à-d. l'impulsion d'un photon est en effet égale à

$$\mathbf{g}_\lambda = \frac{\hbar\omega_\lambda}{c}\frac{\mathbf{k}_\lambda}{k_\lambda} \equiv \frac{\hbar\omega_\lambda}{c}\mathbf{s}_\lambda, \quad \mathbf{s}_\lambda^2 = 1. \tag{1.60}$$

Outre l'énergie et l'impulsion, les champs et les quanta qui leur sont associés sont caractérisés par le moment cinétique. Dans la théorie classique le moment cinétique d'un champ électromagnétique s'écrit :

$$\mathbf{M}_{em} = \frac{1}{4\pi c}\int [\mathbf{r}\,[\mathbf{EH}]]\,dV. \tag{1.61}$$

Puisque dans une onde plane illimitée le vecteur de Poynting $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]$ est dirigé suivant le vecteur d'onde $\mathbf{k}_\lambda$, l'onde concernée ne possède pas dans cette direction de moment cinétique différent de zéro. Pourtant, dans un guide d'ondes cylindrique aux parois conductrices parfaites, la valeur de $M_{em,z} \equiv M_z$ (z est l'axe du guide d'ondes) d'une onde peut différer de zéro. Ainsi, pour les ondes monochromatiques à polarisation circulaire dans le guide d'ondes (cf. [1] et sa bibliographie)

$$\mathbf{M}_z = \pm\mathcal{H}_{tr}/\omega_\lambda. \tag{1.62}$$

Ici le signe dépend du sens de rotation du champ d'onde; $\mathcal{H}_{tr}$ est l'énergie du champ transversal. Pour la quantification (qui doit se faire en décomposant dans le guide d'ondes les champs suivant les ondes « normales »), $\mathcal{H}_{tr} = \hbar\omega_\lambda n_\lambda$ et l'expression (1.62) témoigne que le moment du champ se compose des moments cinétiques des quanta du champ, la valeur de M_z de chaque quantum est égale à $\pm\hbar$. Dans le langage adopté ci-dessus, ces quanta peuvent s'appeler photons (on admet que le guide d'ondes est vide et que ses parois sont conducteurs parfaits). Ce qui importe, certes, ce n'est pas la dénomination, mais la mise en évidence de la quantification du moment cinétique du rayonnement. Le moment (ou plutôt sa projection) vaut $\pm\hbar$, c.-à-d. le spin des photons est égal à l'unité. Son étude présente surtout un intérêt particulier lors du développement en ondes sphériques du champ électromagnétique en général et du champ de rayonnement en particulier (de telles ondes sont émises par les multipôles électriques et magnétiques, y compris les dipôles). Pour plus de détails sur le moment cinétique d'un champ de rayonnement et le spin des photons, cf. [1, 3].

Considérons encore le système complet d'un champ et d'une charge. En approximation non relativiste l'hamiltonien de ce système s'écrit

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi + \hat{\mathcal{H}}_{tr}, \tag{1.63}$$

et l'équation de la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r}, t, q)$ se met sous sa forme ordinaire

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}\Psi. \tag{1.64}$$

Pour résoudre les problèmes par les méthodes de la théorie des perturbations, l'hamiltonien se met sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}', \\ \hat{\mathcal{H}}_0 &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + e\varphi + \hat{\mathcal{H}}_{tr}, \\ \hat{\mathcal{H}}' &= -\frac{e}{mc}\,\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{A}} + \frac{e^2}{2mc^2}\,\hat{\mathbf{A}}^2, \end{aligned}\right\} \tag{1.65}$$

$\hat{\mathcal{H}}'$ étant envisagé comme une perturbation.

Remarquons qu'en général $\hat{\mathbf{p}}$ ne commute pas avec $\hat{\mathbf{A}}$ et de ce fait, dans l'expression de $\hat{\mathcal{H}}'$ il convient d'écrire non pas $\frac{e}{mc}\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{A}}$, mais $\frac{e}{2mc}(\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{p}})$, puisque précisément c'est là une expression hermitienne. Pourtant, dans le cas du champ transversal ($\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$), les termes avec $\mathbf{pA}$ et $\mathbf{Ap}$ sont égaux entre eux.

Les effets dûs à l'interaction de la lumière et de l'électron sont proportionnels à la « constante d'interaction électromagnétique » appelée également « constante de structure fine »

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,036}. \tag{1.66}$$

Puisque $\alpha \ll 1$, dans un certain sens l'interaction entre un électron et un champ électromagnétique est faible *). Aussi peut-on admettre que la fonction d'onde de l'état stationnaire diffère peu de la solution de l'équation

$$\hat{\mathscr{H}}_0\psi_{n0} = E_{n0}\psi_{n0}, \tag{1.67}$$

qu'on peut calculer au moins dans une série de cas. En particulier, en l'absence de champ électrostatique extérieur,

$$\psi_{n0} = \exp\left(\frac{i\mathbf{pr}}{\hbar}\right) \prod_{\lambda,\, i} \psi_{n\lambda i}(q_{\lambda i}). \tag{1.68}$$

La faible différence entre la fonction d'onde exacte et la solution de l'équation (1.67) est rendue évidente, par exemple par l'examen des électrons des niveaux excités d'un atome d'hydrogène. La durée de vie d'un électron à un niveau excité est de l'ordre de 10^{-9} s, et sa période de révolution sur l'orbite, de l'ordre de 10^{-15} s. D'où en utilisant la relation d'incertitude de l'énergie

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar, \tag{1.69}$$

on déduit que la largeur du niveau $\Delta E \sim 10^{-6}$ eV et la distance entre les niveaux est de l'ordre d'un électron-volt. Ainsi, le mouvement des électrons aux niveaux excités d'un atome d'hydrogène est « quasi stationnaire » et se distingue peu de celui qu'aurait un électron sans l'interaction avec le champ. Ceci est dû, comme nous l'avons déjà dit, au fait que la constante de structure fine $\alpha = e^2/\hbar c$ est sensiblement inférieure à l'unité. Si cette constante était de l'ordre de l'unité (comme c'est le cas de l'interaction d'un nucléon et d'un champ mésique), la largeur des niveaux serait de l'ordre des

---

*) Cette note concerne surtout les effets de radiation et ne signifie pas, certes, que l'interaction électromagnétique peut être toujours considérée comme une perturbation. Il suffit de constater que l'interaction électrostatique d'un électron et d'un noyau (de charge eZ) est définie par le paramètre $e^2Z/\hbar v$, où v est la vitesse de l'électron. Pour un atome d'hydrogène à l'état fondamental, $e^2/\hbar v \sim 1$.

distances entre les niveaux eux-mêmes et, en général il ne serait question d'aucun mouvement « quasi stationnaire » *).

Puisque les fonctions ψ_{n0} (cf. 1.67) forment un système complet, la solution Ψ de l'équation (1.64) peut se mettre sous la forme

$$\Psi = \sum_m b_m(t)\, \psi_{m0}(\mathbf{r}) \exp\left[-\frac{iE_{m0}t}{\hbar}\right]. \tag{1.70}$$

En portant (1.70) et l'hamiltonien (1.65) dans l'équation (1.64), en multipliant les deux membres de l'équation par ψ^*_{n0}, en intégrant sur l'espace tout entier et en tenant compte de l'orthogonalité et de la normalisation des fonctions ψ_{n0}, on obtient

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\frac{db_n(t)}{dt} &= \sum_m \mathcal{H}'_{nm} b_m(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_{n0}-E_{m0}t\right]. \\ \mathcal{H}'_{nm} &= \int \psi^*_{n0}\hat{\mathcal{H}}'\psi_{m0}\, dV. \end{aligned}\right\} \tag{1.71}$$

Supposons que pour $t = 0$ on ait $b_k = 1$ et $b_{n\neq k} = 0$. Alors sous l'hypothèse que pour $n \neq k$ à tous les autres instants b_n sont petits et en rejetant les termes d'ordre de petitesse successif, on a

$$i\hbar\frac{db_n(t)}{dt} = \mathcal{H}'_{nk} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_{n0}-E_{k0})\, t\right], \tag{1.72}$$

d'où on tire sans peine

$$|b_n(t)|^2 = \frac{2\,|\mathcal{H}'_{nk}|^2}{(E_{k0}-E_{n0})^2}\left\{1-\cos\left[\frac{(E_{k0}-E_{n0})\,t}{\hbar}\right]\right\}. \tag{1.73}$$

Si dans la théorie des perturbations on a en première approximation $|\, b_n(t)\,|^2 = 0$, une procédure analogue permet de trouver les approximations qui suivent. Par exemple, en deuxième approximation un élément matriciel s'écrit

$$\mathcal{H}'^{(2)}_{nk} = \sum_{n'} \frac{\mathcal{H}'_{nn'}\mathcal{H}_{n'k}}{E_{k0}-E_{n'0}}. \tag{1.74}$$

*) Sous ce rapport, la théorie quantique se distingue sensiblement de la théorie classique. Dans cette dernière il se peut que les perturbations relativement fortes n'aboutissent pas à modifier qualitativement l'allure du mouvement. Par exemple, les propriétés d'un oscillateur en forte interaction avec un gaz sont très voisines. Par contre, dans la théorie quantique, si la perturbation rend la largeur du niveau aussi grande quant à l'ordre de grandeur, que la distance entre les niveaux, les propriétés du mouvement changent sensiblement (cf. ci-dessous chapitre 13).

L'expression (1.73) ne détermine la probabilité de transition qu'à l'état final d'énergie E_{n0}. Or, ce qui nous intéresse d'habitude, c'est la transition à tous les états possibles, c.-à-d. l'intégrale

$$\int |b_n(t)|^2 \rho(E_{n0})\, dE_{n0}. \qquad (1.75)$$

Ici $\rho(E_{n0})\, dE_{n0}$ est le nombre d'états stationnaires (on admet qu'ils sont « très serrés » dans l'intervalle des énergies E_{n0}, $E_{n0} + dE_{n0}$. Pour t tendant vers l'infini, l'intégrale (1.75) vaut (cf. ci-dessous la formule (1.84) ou, pour plus de détails, [1])

$$\frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{H}'|^2_{E=E_{k0}} \rho(E_{k0})\, t; \qquad (1.76)$$

par conséquent, la probabilité de transition par unité de temps s'exprime par la formule

$$W = \frac{1}{t} \int |b_n(t)|^2 \rho(E_{n0})\, dE_{n0} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{H}'|^2 \rho(E_{k0}). \qquad (1.77)$$

(La transition ne se produit qu'en présence des états E_{n0} aussi proches que l'on veut de E_{k0}, ce qui est déjà traduit par (1.76). Pour calculer les éléments matriciels de $\mathcal{H}'_{nn'}$, il faut utiliser, comme l'indique l'exposé précédent, les expressions (1.65), ainsi que (1.18), (1.19) et (1.40), en entendant par q les opérateurs $q_{\lambda i}$ (pour un exposé plus détaillé, cf. [1]).

L'utilisation de la théorite des perturbations sous une forme aussi simple ou quelque peu plus compliquée permet de répondre à toute une série de questions de la théorie du rayonnement [1, 3]. Toutefois, son application plus large bute contre des difficultés importantes qui, formellement, se traduisent par l'apparition des expressions divergentes (infinies). Leur divergence est due à ce qu'on admet que l'électron est « ponctuel », que le champ possède un nombre infini de degrés de liberté, etc. Certaines de ces expressions ont une nature classique et ne sont pas conditionnées par la quantification. Il suffit de songer que l'énergie électrostatique d'une charge ponctuelle est infinie. Or, l'électrodynamique classique permettait déjà de contourner ces difficultés. A cet effet, on utilise en particulier, la méthode de « renormalisation » de la masse *). En électrodynamique quantique il faut renormaliser aussi la charge de la particule et, en général, la situation devient plus compliquée. Pendant longtemps l'attention des théoriciens était centrée sur l'étude de toutes ces questions en fonction de leur application à l'électrodyna-

*) A notre connaissance, le terme lui-même de « renormalisation de la masse » est apparu seulement à la suite de la réalisation des opérations correspondantes en électrodynamique quantique. C'est ce qui a fait croire que la méthode de renormalisation avait été engendrée par la théorie quantique, idée pour le moins inexacte (cf. chapitre 2).

mique quantique. Il en a résulté de grands succès et pratiquement dans ce domaine les « effets nocifs » des infinitudes ont été supprimés. On a conçu un outil permettant de répondre aux questions qui se posent et, notamment, rendre compte des effets de rayonnement très fins [1, 3].

Le cours que nous présentons ici passe outre tous ces problèmes bien que nous espérons que l'exposé qui précède sera utile pour comprendre les principes physiques de l'électrodynamique quantique. Pour ce qui est du texte qui suit, il nous fallait seulement décrire l'application du formalisme hamiltonien à l'électrodynamique classique et initier le lecteur aux aspects les plus élémentaires de l'électrodynamique quantique.

Fait curieux : autrefois le formalisme hamiltonien ne s'employait presque pas en électrodynamique classique; sa vogue ne date que du passage à l'électrodynamique quantique. Mais comme il arrive souvent la « rétroaction » est entrée en jeu. On a découvert que le formalisme hamiltonien est également très commode pour résoudre des problèmes classiques, surtout en présence du milieu (cf. plus loin chapitres 6 et 7). Ces dernières années, lorsque de nombreux problèmes ont été déjà résolus, on a vu se poser de nouveaux problèmes plus compliqués; d'autre part, plusieurs méthodes mathématiques puissantes ont été mises au point et largement appliquées par la suite (technique de diagrammes, fonctions de Green, etc.); il en a résulté que dans la théorie du rayonnement quantique aussi bien que dans la théorie classique, l'application du formalisme hamiltonien est devenue plus rare. Pourtant selon nous, il garde quand même l'avantage d'une intelligence immédiate; c'est une méthode simple, assez universelle, ce qui justifie parfaitement son application tout au moins dans des buts didactiques.

A titre d'illustration appliquons le formalisme hamiltonien au problème du rayonnement d'un oscillateur, charge animée d'oscillation harmonique. Pour définir le champ, il faut trouver les quantités $q_{\lambda i}$ du développement (1.18), l'équation du mouvement où interviennent ces quantités étant de la forme

$$\ddot{q}_{\lambda i} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda i} = e\sqrt{8\pi}\,(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{v}(t)) \begin{cases} \cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}), \\ \sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}), \end{cases} \qquad (1.24)$$

où $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ est le rayon vecteur de la charge rayonnante e; dans le cas d'un oscillateur,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 \sin \omega t, \quad \dot{\mathbf{r}}(t) \equiv \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \cos \omega_0 t = \mathbf{a}_0 \omega_0 \cos \omega_0 t. \qquad (1.78)$$

L'argument $(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}(t))$ de (1.24) est petit si

$$a_0 \ll \frac{1}{k_0} = \frac{\lambda_0}{2\pi}, \qquad (1.79)$$

où λ_0 est la longueur d'onde du rayonnement émis. Adoptons la condition (1.79), c.-à-d. admettons que l'amplitude des oscillations de l'oscillateur est beaucoup inférieure à la longueur de l'onde émise (ceci est toujours vrai pour un oscillateur non relativiste, puisque la vitesse $v_0 = \omega_0 a_0 \ll c$ et $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$). Alors, $(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})$ de (1.24) est bien inférieur à l'unité, et nous sommes légitimés de poser $\cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}) = 1$, $\sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}) = 0$. C'est pourquoi $q_{\lambda 2} = 0$, et on obtient pour $q_{\lambda 1}$ l'équation

$$\ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} = e(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}_0)\sqrt{8\pi}\cos\omega_0 t. \tag{1.80}$$

Sa solution vérifiant la prescription $q_{\lambda 1} = 0$, $\dot{q}_{\lambda 1} = 0$ pour $t = 0$ s'écrit

$$q_{\lambda 1} = \frac{b_\lambda}{\omega_\lambda^2 - \omega_0^2}[\cos\omega_0 t - \cos\omega_\lambda t], \quad b_\lambda = e(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}_0)\sqrt{8\pi}. \tag{1.81}$$

En obtenant $q_{\lambda 1}$ nous avons défini complètement le champ électromagnétique et pouvons calculer les autres grandeurs. Cherchons, par exemple, l'énergie émise par la charge (l'oscillateur) par unité de temps. A cet effet il convient évidemment de calculer l'énergie du champ $\mathcal{H}_{tr}$ d'après la formule (1.22), puis chercher sa variation par unité de temps, c.-à-d. $d\mathcal{H}_{tr}/dt$. Ceci donnera précisément l'énergie émise par l'oscillateur par unité de temps.

Pour $\mathcal{H}_{tr}$ on obtient l'expression

$$\mathcal{H}_{tr} = \sum_\lambda \left\{ b_{\lambda_1}^2 \omega_\lambda^2 \frac{[1 - \cos(\omega_\lambda - \omega_0)t]}{(\omega_\lambda^2 - \omega_0^2)^2} + \ldots \right\}. \tag{1.82}$$

Nous avons placé dans l'accolade le seul terme qui fait croître $\mathcal{H}_{tr}$ avec le temps; les termes qui ne figurent pas dans (1.82) n'apportent rien pour de grands t à l'énergie émise par l'oscillateur par unité de temps (on suppose ici que t est grand).

Pour calculer la somme (1.82) il est commode de passer de la sommation à l'intégration. Pour ce faire, l'expression (1.82) doit être encore multipliée par le nombre d'oscillateurs de champ dont les pulsations vont de ω à $\omega + d\omega$; ce nombre vaut

$$\frac{\omega^2\,d\omega\,d\Omega}{(2\pi c)^3}, \tag{1.83a}$$

où $d\Omega$ est un élément de l'angle solide.

Ainsi, le passage de la sommation à l'intégration consiste à réaliser le remplacement

$$\sum_\lambda \to \frac{1}{2(2\pi c)^3}\int \ldots \omega^2\,d\omega\,d\Omega, \tag{1.83b}$$

où le facteur supplémentaire 1/2 est dû à l'intégration sur toutes les directions et non seulement suivant la demi-sphère des directions $\mathbf{k}$.

L'intégration de (1.82) par rapport à ω se fait facilement si l'on tient compte de l'égalité, vraie pour de grandes valeurs de t:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \frac{[1-\cos(\omega-\omega_0)t]}{(\omega-\omega_0)^2} d\omega = \pi f(\omega_0) t. \tag{1.84}$$

De tous les calculs simples mentionnés on obtient l'expression de l'énergie rayonnée par un oscillateur par unité de temps dans un angle solide $d\Omega$

$$\frac{d\mathcal{H}_{tr}}{dt} = \frac{\mathcal{H}_{tr}}{t} = \frac{e^2 a_0^2 \omega_0^4}{8\pi c^3} \sin^2\theta \, d\Omega, \tag{1.85}$$

où θ est l'angle entre la direction des oscillations $\mathbf{a}_0$ et le vecteur d'onde du rayonnement $\mathbf{k}_0$, de plus $k_0 = \omega_0/c$.

Suivant la définition donnée ci-dessus (partie d'un champ qui croît proportionnellement au temps t), le rayonnement apparaît lorsque la fréquence de la « force » figurant dans le second membre de (1.24) est égale à la pulsation propre des oscillateurs du champ $\omega_\lambda = ck_\lambda$. Sous ce rapport, une charge animée d'oscillations harmoniques est parfaitement typique, bien que dans l'approximation dipolaire considérée (condition (1.79)) il n'y a qu'une seule fréquence rayonnée. Constatons que dans la théorie du rayonnement dans le cadre de la théorie des perturbations la situation est tout à fait analogue (comparez (1.82) et (1.73); pour plus de détails, cf. [1]).

Il est commode maintenant d'élucider certaines circonstances importantes qui d'ordinaire restent dans l'ombre, en discutant une question quelque peu rhétorique: un électron peut-il rayonner en se déplaçant en mouvement uniforme?

La réponse standard, banale, si l'on peut dire, est négative. Or, en fait, cela n'est vrai que sous de nombreuses réserves dont certaines ne sont ni triviales ni prises toujours en considération, ce qui conduit à des paradoxes et des erreurs.

Premièrement, il faut préciser le système de référence dans lequel l'électron considéré *) est animé d'un mouvement uniforme, c.-à-d. dans lequel il se déplace à une vitesse constante $\mathbf{v}$. D'habitude (lorsque ceci n'est pas spécifié à l'avance), il s'agit d'un mouvement dans des systèmes d'inertie. C'est dans ces systèmes-là que sont écrites les équations initiales du champ, et jusqu'ici il ne s'agissait que d'eux. Il est évident que si un électron se déplace uniformément dans un système non inertial, son mouvement par rapport à un système d'inertie est accéléré et il rayonne.

Deuxièmement, on examine le mouvement uniforme dans le vide et non dans un milieu. Un électron qui se déplace uniformément

*) Au fond, il s'agit assurément d'une charge appelée électron seulement par convention.

dans un milieu peut aussi bien émettre un rayonnement Tchérenkov qu'un rayonnement de transition (cf. chapitres 6 et 7).

Troisièmement, on considère que la vitesse de l'électron $v < c$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Souvent cette condition est considérée comme triviale, ce qui n'est pas le fait. La prescription de l'invariance relativiste ne conduit nullement à la condition $v < c$; en particulier, les équations du champ (1.1) sont tout à fait vraies (et du point de vue relativiste, invariantes) pour $v > c$ aussi. Il est vrai qu'une particule de masse au repos m ne peut être accélérée jusqu'à $v \gg c$, ce qui est déjà rendu clair par l'expression $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ qui donne l'énergie d'une particule. Mais ceci n'interdit pas encore l'étude des particules (tachyons) qui se déplacent toujours à la vitesse $v > c$ et dont l'énergie est $\mathcal{E} = \frac{imc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{v^2/c^2-1}}$. Les difficultés réelles de l'étude des mouvements à de vitesses $v > c$ sont dues aux perturbations éventuelles du principe de causalité (c'est cette dernière circonstance et non la violation de l'invariance relativiste qui a imposé l'« interdiction » $v < c$; cf. [4, 5]). C'est pourquoi les tachyons qui ces dernières années ont fait l'objet des discussions animées dans les ouvrages de physique, ne peuvent probablement pas exister. Mais il existe quand même des sources qui se déplacent à des vitesses $v > c$, bien que ce ne soit pas des particules isolées. Il en sera encore question au chapitre 8.

Après ce qui vient d'être dit formulons notre question d'une façon plus exacte: un électron rayonne-t-il s'il se déplace à une vitesse constante $v < c$ dans le vide dans un système d'inertie?

Il existe au moins quatre démonstrations qui prouvent que dans de telles conditions un électron ne rayonne pas.

La première démonstration et, dans un certain sens, la plus conséquente, est liée à la solution des équations du champ (1.1) pour $\mathbf{v} = \text{const}$. Cette solution (cf., par exemple, [1, 5, 6] et chapitre 3) traduit l'absence dans le cas discuté, de champ de rayonnement, c.-à-d. de champ décroissant comme $1/R$ et qui fournit un flux d'énergie à l'infini (elle montre aussi que le rayonnement apparaîtrait avec $v > c$).

La deuxième démonstration n'impose aucun calcul. Considérons un système de référence où l'électron est au repos, réalisable avec $\mathbf{v} = \text{const}$, $v < c$. Il est évident que dans un tel système de référence le rayonnement n'existe pas (l'électron est tout le temps au repos) *). Mais un rayonnement ne peut pas apparaître sous l'effet

*) En fait on suppose ici dès le début que dans un certain système de référence un électron est toujours au repos, et c'est pourquoi il faut appliquer des raisonnements plus détaillés, par exemple, comme ceux qui suivent. Supposons qu'un électron (particule chargée libre) se déplace sans rayonner à la vitesse

du passage d'un système d'inertie à un autre, il n'existe donc pas non plus pour v = const. Cette démonstration pèche dans une certaine mesure par le fait qu'elle semble être applicable également au cas $v > c$ en « prouvant » par là l'absence de rayonnement pour ce cas là aussi. Or, avec $v > c$, même dans le vide, une charge doit émettre le rayonnement Tchérenkov (à propos, c'est là l'une des difficultés de la théorie des tachyons; cf. également chapitre 8). Ce paradoxe disparaît si l'on tient compte que pour $v > c$ il est impossible de réaliser un système de référence dans lequel un électron est au repos.

La troisième démonstration part des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion. Le plus simple (bien que ce ne soit pas de rigueur) est de mener la discussion en un langage des quanta. Plus précisément, si on envisage une particule d'énergie $\mathcal{E} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$ et d'impulsion $\mathbf{p}$, on peut voir que les lois de la conservation de l'énergie et de l'impulsion empêchent cette particule d'émettre un photon d'énergie $\hbar\omega \neq 0$ et d'impulsion $\hbar\mathbf{k}$, $k = \omega/c$. Cette démonstration sera donnée en fait au chapitre 7 dans la discussion des conditions de rayonnement dans un milieu. A propos, dans le cadre d'une telle approche, le rayonnement ne peut exister dans le vide que si $v < c$; pour les tachyons d'énergie $\mathcal{E} = \sqrt{-m^2c^4 + c^2p^2}$ la vitesse

$$v = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial p} = \frac{c^2p}{\sqrt{c^2p^2 - m^2c^4}} > c$$

et les lois de la conservation n'interdisent pas l'émission des photons par une particule animée d'un mouvement uniforme.

La quatrième démonstration est basée sur l'application du formalisme hamiltonien. Lorsqu'un électron se déplace uniformément, son rayon vecteur $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t$ et $\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r} = (\mathbf{k}_\lambda\mathbf{v})\,t$, c.-à-d. le second membre de l'équation du mouvement des oscillateurs du champ comporte la fréquence $\mathbf{k}_\lambda\mathbf{v}$ (cf. (1.24)). Quant à la pulsation propre des oscillateurs du champ dans le vide, $\omega_\lambda = ck_\lambda$: aussi est-il évident que pour $v < c$ la résonance est impossible et donc, le rayonnement d'énergie $\mathcal{H}_{tr}$ croissante dans le temps n'existe pas.

Ainsi, sous toutes ces réserves (système d'inertie, vide, vitesse $v < c$), un électron animé d'un mouvement uniforme ne rayonne pas.

Si la question se réduisait à ce qui vient d'être dit, elle ne serait probablement même pas débattue. Or, il n'en est pas ainsi. C'est que

---

v = const. Nous démontrons alors en passant à un système d'inertie dans lequel un électron est toujours au repos, qu'une telle solution est compatible avec les équations du champ et que le champ de l'électron est électrostatique, le rayonnement n'existant pas. Cette démonstration ne se distingue au fond de la précédente que par la résolution des équations du champ qui est plus simple pour une charge au repos que pour une charge en mouvement, et qui peut être considérée comme universellement connue.

dans la première période de l'électrodynamique quantique on avançait en théorie quantique cette affirmation paradoxale qu'un électron animé d'un mouvement uniforme émet quand même. Une telle conclusion est tirée sans peine des calculs bien simples faits dans le cadre d'une première approximation de la théorie des perturbations. En effet, supposons que pour $t = 0$ l'électron se déplaçait uniformément (impulsion $\mathbf{p} =$ const) et l'énergie du champ transversal était nulle (tous les oscillateurs du champ étaient à l'état fondamental, c.-à-d. $n_{\lambda l} = 0$). Alors compte tenu de l'interaction, par exemple de l'interaction $\mathcal{H}'_1 = -\frac{e}{mc}\mathbf{pA}$ (cf. (1.65)), les éléments matriciels des transitions aux états quantiques de $n_{\lambda l} = 1$ sont différents de zéro (cf. (1.40)); par conséquent, la probabilité $|b_n(t)|^2$ de (1.73) est également différente de zéro. Il est vrai que l'énergie du champ ne croît pas avec le temps ($t \to \infty$), mais le rayonnement apparaît quand même. Nous ne faisons pas le calcul quantique détaillé, l'effet envisagé étant en fait purement classique [7]. En effet, reprenons la question en la formulant exactement comme dans ce qui précède, mais en la plaçant dans le cadre du formalisme hamiltonien de l'électrodynamique classique. Plus précisément, cherchons la solution des oscillateurs du champ $q_{\lambda l}$ (et par là, du champ transversal lui-même) pour le cas d'une charge animée d'un mouvement uniforme, si dans (1.24) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t$, et sous la condition que pour $t = 0$ tous les $q_{\lambda l} = 0$, ainsi que $\dot{q}_{\lambda l} = 0$, c.-à-d. que le champ est nul. Pour simplifier bornons-nous également au cas où $\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}(t) = (\mathbf{k}_\lambda \mathbf{v}) \ll 1$; autrement dit, admettons que le temps t est assez petit ou que la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ est assez grande. Les équations (1.24) deviennent alors

$$\ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} = e\sqrt{8\pi}\,(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}), \quad \ddot{q}_{\lambda 2} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 2} = 0. \tag{1.86}$$

La solution de ces équations qui satisfait aux conditions mentionnées, est de la forme

$$q_{\lambda 1} = \frac{e\sqrt{8\pi}}{\omega_\lambda^2}(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v})(1 - \cos\omega_\lambda t), \quad q_{\lambda 2} = 0. \tag{1.87}$$

En portant cette solution dans (1.22), on obtient

$$\mathcal{H}_{tr} = 8\pi e^2 \sum_\lambda \frac{(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v})^2}{\omega_\lambda^2}(1 - \cos\omega_\lambda t). \tag{1.88}$$

Le passage de la somme à l'intégrale (cf. (1.83)) et l'intégration sur les angles et sur les pulsations de $\omega = 0$ à un certain maximum ω_{max}, conduisent à

$$\mathcal{H}_{tr} = \frac{8e^2}{3\pi c^3}(1/2v^2)\left\{\omega_{max} - \frac{\sin\omega_{max} t}{t}\right\}. \tag{1.89}$$

Le calcul quantique fournit absolument le même résultat. Cette circonstance aussi bien que l'absence de la constante de Planck $\hbar$ dans (1.89) ne laisse aucun doute sur l'absence d'un élément quantique dans le problème discuté. Au fond, il s'agit apparemment du fait suivant. On admet que l'électron se déplace uniformément mais pour $t = 0$ on suppose qu'il n'existe pas de champ transversal. Or, un électron animé d'un mouvement uniforme (s'il se déplace tout le temps précisément de cette façon-là) est plongé dans son champ y compris dans le champ transversal (magnétique et électrique), qu'il entraîne avec lui. Considérer que ce champ, absent à $t = 0$, est décrit (avec $t > 0$) par les équations du champ, signifie en fait qu'avant l'instant $t = 0$ l'électron avait été au repos, puis, à $t = 0$, il a été instantanément accéléré jusqu'à la vitesse **v**. Il en résulte, naturellement, que la charge rayonne; de plus, premièrement, la charge est « entourée » par le champ qu'elle entraîne, et deuxièmement, elle émet un rayonnement « vrai » qui s'en va à l'infini et qui est dû à l'accélération de la charge. Cette partie du champ transversal (champ de rayonnement) est représentée dans (1.87) par le terme proportionnel à $\cos \omega_\lambda t$ qui correspond à la solution de l'équation homogène (1.86). Ceci rend déjà clair qu'il s'agit du rayonnement d'un champ libre (ou en langage quantique, du rayonnement des photons). Si le déclenchement de l'interaction est assez lent (adiabatique), c.-à-d., physiquement parlant, si l'accélération de l'électron est faible, le champ libre n'apparaît pas et il ne se forme que le champ entraîné dont l'énergie dans le cas non relativiste, c.-à-d. pour $v \ll c$, est

$$\mathcal{H}_{tr} = \frac{4e^2\omega_{max}}{3\pi c^3}(1/2v^2).$$

La pulsation $\omega_{max} = 2\pi c/\lambda_{min}$, où λ_{min} est la plus courte longueur d'onde. Il est évident que pour une charge étendue de rayon r_0, $\lambda_{min} \sim r_0$ et $\mathcal{H}_{tr} = 1/2 m_{em} v^2$; par ailleurs, comme il se doit, la masse électromagnétique $m_{em} \sim e^2/r_0 c^2$.

Ainsi aux conditions, dont l'observation est nécessaire pour qu'un électron animé d'un mouvement uniforme ne rayonne pas, il faut ajouter celle du mouvement stationnaire, autrement dit, du mouvement uniforme dans l'intervalle $-\infty < t < +\infty$. Cette prescription est en général évidente et dans une certaine mesure elle était toujours sous-entendue, mais dans les calculs quantiques évoqués il s'est trouvé qu'elle était dissimulée. L'utilisation du formalisme hamiltonien, et surtout la position du problème lié à cette utilisation, analogue à l'approche quantique prévoyant le déclenchement de l'interaction à l'instant $t = 0$, a permis d'éliminer le paradoxe et élucider la question. D'autre part, il devient évident, et il est utile de le retenir pour résoudre des problèmes parfaitement réels (cf. [7, 8]), qu'il n'est pas de rigueur que le champ d'une

charge en mouvement uniforme soit stationnaire. Autrement dit, le mouvement de la charge peut être déjà depuis un certain temps uniforme, alors que le champ qu'elle entraîne peut différer du champ stationnaire (celui-ci s'établit lorsque la durée du mouvement à vitesse constante est assez grande). L'exemple examiné d'un électron se déplaçant uniformément avec $t \gg 0$ rend surtout clair aussi la différence déjà notée entre le champ de rayonnement libre et le champ transversal entraîné. Ainsi, il ne faut pas identifier un champ électromagnétique transversal arbitraire à l'ensemble des photons (tout étrange que cela paraisse, cette circonstance évidente est littéralement devenue coutumière dans les exposés de la théorie quantique du rayonnement). Il est à noter que la construction réelle de l'électrodynamique quantique est complètement affranchie de toute hypothèse sur l'absence de charges ou sur l'identification du champ transversal quantifié à un champ de rayonnement libre (c'est-à-dire à l'ensemble des photons); ceci était déjà clair lors du passage (quantification) de l'électrodynamique classique à l'électrodynamique quantique, fait plus haut. C'est pourquoi si l'application de la théorie quantique du rayonnement est conséquente, naturellement les résultats ne sont jamais incorrects. Quant à la possibilité qui se présente ordinairement de négliger la différence entre un champ transversal arbitraire et l'ensemble des photons, elle est due au caractère des problèmes de la théorie quantique du rayonnement (dans la grande majorité des cas, le champ est considéré pour $t \to \infty$, à l'infini, etc.). Mais comme nous l'avons déjà dit, il n'est pas toujours permis de procéder de la sorte (cf. [7, 8]).

CHAPITRE 2

RÉACTION DE RAYONNEMENT

Réaction de rayonnement dans la translation d'une charge. Rotation d'un moment magnétique (rotation magnétique oblique)

S'il existe une source de rayonnement (charge, antenne, etc.) elle subit en général la réaction de rayonnement. L'exemple le plus simple et le plus connu est celui du mouvement d'une charge ponctuelle à une vitesse non relativiste, décrit par l'équation du mouvement

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0 + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}}, \tag{2.1}$$

où $\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}}$ est la réaction de rayonnement (force de réaction ou force de freinage radiatif) et $\mathbf{F}_0$, la force extérieure qui, dans le cas d'une origine purement électromagnétique, est de la forme

$$\mathbf{F}_0 = e\mathbf{E}_0 + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{H}_0]. \tag{2.2}$$

En tenant compte de la force de réaction (cf., par exemple, ci-dessous, chapitre 3), pour une vitesse $v \equiv |\dot{\mathbf{r}}| \to 0$, l'équation relativiste du mouvement se transforme en (2.1) et en fait, son obtention de (2.1) n'est pas liée à des hypothèses supplémentaires. C'est pourquoi la discussion des conditions sous lesquelles on peut obtenir et utiliser (2.1) est également en rapport direct avec le cas relativiste (cf. chapitre 4).

Le fait que l'équation (2.1) ne peut être appliquée « sans hésitation » est clair dès qu'on annule la force extérieure $\mathbf{F}_0$. L'équation qu'on obtient possède alors en plus de la solution correcte $\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v} \equiv$ const (mouvement uniforme dans le système d'inertie considéré), une solution « autoaccélérée » explicitement fausse

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \exp\left\{\frac{3mc^3}{2e^2}t\right\};$$

de plus, la « fréquence », $\Omega_e = 3mc^3/2e^2 = 1{,}6 \cdot 10^{23}$ s^{-1}.

L'équation (2.1) peut s'employer sans crainte lorsque la force de réaction f est faible devant la force extérieure $\mathbf{F}_0$

$$f \ll F_0. \tag{2.3}$$

Dans ces conditions la force f joue le rôle d'une perturbation ; en première approximation, $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0$, alors que l'approximation suivante donne

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\mathbf{E}}_0 + \frac{2e^4}{3m^2c^4}[\mathbf{E}_0\mathbf{H}_0]. \tag{2.4}$$

Pour une force harmonique à fréquence cyclique ω, lorsque $\dot{E}_0 \sim \omega E_0$, la condition (2.3) est équivalente aux prescriptions *)

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{\omega} \gg r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 2{,}82\cdot 10^{-13} \text{ cm}, \tag{2.5}$$

$$H_0 \ll \frac{m^2c^4}{e^3} = 6\cdot 10^{15} \text{ e}. \tag{2.6a}$$

Dans ce qui suit nous omettrons parfois le facteur 2π dans les inégalités de la forme (2.5), ce qui est formellement toujours légitime en présence des signes $\gg$ ou $\ll$. Constatons que l'inégalité (2.6 a) peut également s'écrire

$$\frac{\lambda_H}{2\pi} = \frac{c}{\omega_H} \gg r_e, \quad \omega_H = \frac{eH_0}{mc} = 1{,}76\cdot 10^7 H_0. \tag{2.6b}$$

Le sens de cette condition est évident si l'on songe que, dans le champ magnétique permanent H_0 une charge non relativiste tourne avec une fréquence $\omega_H = eH_0/mc$ en émettant des ondes électromagnétiques de cette même fréquence. La contrainte (2.6) pratiquement n'a pas d'importance du fait qu'il est improbable que même dans des pulsars les champs dépasseraient les valeurs supérieures à 10^{12} ou 10^{13} Oe. Il faut pourtant avoir en vue que pour les particules relativistes, les conditions d'application de l'expression correspondante de la force de réaction, bien qu'elles s'obtiennent de (2.5), (2.6) ne sont pas du tout les mêmes quantitativement, par suite de l'apparition des facteurs de la forme $\frac{\mathscr{E}}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ (cf. chapitre 4). Remarquons également que nous n'avons pas tenu compte des contraintes quantiques. Aussi, pour les électrons, la condition (2.5) a-t-elle au fond un caractère fictif, puisque l'étude classique n'est valable que pour

$$\lambda \gg \frac{\hbar}{mc} = 3{,}86\cdot 10^{-11} \text{ cm}. \tag{2.7a}$$

*) Toutes les valeurs numériques sont données pour un électron ($e = 4{,}8\cdot 10^{-10}$ UES (CGS) ; $m = 9{,}1\cdot 10^{-28}$ g). (2.5) tient compte de l'allure harmonique du champ **E** et (2.6) n'y tient pas.

Cette inégalité peut également se mettre sous la forme

$$\hbar\omega = \frac{2\pi c\hbar}{\lambda} \ll mc^2 = 5{,}1 \cdot 10^5 \text{ eV}. \tag{2.7b}$$

La condition (2.6) est remplacée par l'inégalité $\lambda_H \gg \hbar/mc$, ce qui s'accorde complètement avec (2.7). Le sens de la condition (2.7) est qu'elle permet de négliger la production éventuelle des paires électron-positron (y compris leur naissance à des états intermédiaires .

Mais d'où vient pourtant cette condition (2.3)? La meilleure réponse à cette question et la plus convaincante sera obtenue probablement en cherchant l'équation du mouvement à partir des équations initiales, c.-à-d. des équations du champ (1.1), et de l'équation du mouvement d'une charge « étalée »

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e \int D(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathbf{E}(\mathbf{r}')\,dV', \tag{2.8}$$

où pour simplifier on a négligé l'action du champ magnétique (cas $v \to 0$); la densité de charge $\rho(\mathbf{r}') = eD(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$; de plus $\int D(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dV' = 1$ et $\mathbf{r}$ est la position du centre de la charge; mais ce qui importe surtout, c'est que $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ de (2.8) est le champ total égal à la somme du champ extérieur $\mathbf{E}_0$ et du champ propre de la charge $\mathbf{E}'(\mathbf{r}')$. Si la longueur d'onde qui caractérise le champ extérieur vérifie la condition (2.5), $\mathbf{E}_0$ peut être sorti du signe d'intégration de (2.8). Pour ce qui est du champ propre $\mathbf{E}'$, son évaluation et, si l'on veut, son élimination doivent justement conduire à l'expression de la force de réaction. La voie usuelle assez lourde de l'élimination du champ $\mathbf{E}'$ est donnée, par exemple, dans [1]; quant à nous, nous appliquerons pour ce calcul le formalisme hamiltonien [9, 10], ce qui permettra de révéler certains aspects qui dans les cas courants, restent obscurs, et surtout de passer directement au problème de la réaction de rayonnement dans le mouvement du moment magnétique.

Pour rendre l'exposé plus commode, reprenons comme nous l'avons fait souvent et le ferons plus loin, les équations principales du premier chapitre, mais en modifiant d'une façon évidente les notations rendues claires par l'équation (2.8) et les explications qui la suivent. On a

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{A} = \sum_{\lambda} \sqrt{8\pi}\, c\mathbf{e}_\lambda \left[q_{\lambda 1}\cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}) + q_{\lambda 2}\sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})\right], \tag{2.9}$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} &= \sqrt{8\pi}\, e\,(\mathbf{e}_\lambda \dot{\mathbf{r}}(t)) \int D(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}')\,dV', \\ \ddot{q}_{\lambda 2} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 2} &= \sqrt{8\pi}\, e\,(\mathbf{e}_\lambda \dot{\mathbf{r}}(t)) \int D(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}')\,dV'. \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

Le système (2.10) peut être intégré sous sa forme générale. Toutefois, nous ne nous intéresserons pas aux coefficients numériques qui dépendent du type du facteur de forme D. C'est pourquoi nous admettrons simplement que les intégrales des seconds membres de (2.10) disparaissent pour les longueurs d'onde $\lambda = 2\pi/k_\lambda < \lambda_{\min} = 2\pi c/\omega_{\max} \sim r_0$, où r_0 est le rayon de la charge. Ensuite, pour $\omega_\lambda < \omega_{\max}$ on peut poser

$$\int D \cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}')\, dV' = 1 \quad \text{et} \quad \int D \sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}')\, dV' = 0.$$

Cette possibilité est évidente pour une charge au repos, lorsque $\mathbf{r}' = 0$ (en vertu de ce qui a été dit, r' se distingue de r par des grandeurs de l'ordre de r_0, et cette différence ne joue aucun rôle pour $\omega < \omega_{\max}$). Quant au cas d'une charge se déplaçant lentement, l'approximation considérée est justifiée par l'observation de l'inégalité $\omega_\lambda v/c \ll \omega_\lambda$ et qui est, soit dit en passant, confirmée par le résultat. Il en est ainsi du fait que la substitution $\mathbf{r}' \approx \mathbf{r} = \mathbf{v}t$ fait précisément apparaître dans le second membre des équations (2.10) une fréquence de l'ordre de $\omega_\lambda v/c$; quant à la fréquence propre des oscillateurs du champ, elle est égale à ω_λ. Par suite, l'intégrale donnée ci-dessous (cf. (2.13)) de la première des équations (2.10) change peu si l'on retient que les seconds membres des équations (2.10) dépendent du temps.

Constatons également que (2.9) ne rend pas compte de la partie longitudinale du champ $\mathbf{E}'$, puisque celle-ci n'apporte pas sa contribution à la force qui s'exerce sur la charge (particule) dans son ensemble.

En procédant de la sorte on obtient à partir de (2.8)-(2.10)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0 - e\sqrt{8\pi} \sum_\lambda \mathbf{e}_\lambda \dot{q}_{\lambda 1}, \tag{2.11}$$

$$\ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} = \sqrt{8\pi}\, e\, (\mathbf{e}_\lambda \dot{\mathbf{r}}(t)). \tag{2.12}$$

Ici on tient compte également que dans cette approximation on peut adopter $q_{\lambda 2} = 0$ et $\mathbf{A} = \sqrt{8\pi}\, c \sum_\lambda \mathbf{e}_\lambda q_{\lambda 1}$. La solution de l'équation (2.12) sous la condition que pour $t = 0$ la particule plongée dans son champ qu'elle entraîne avec elle se déplace uniformément, est de la forme

$$q_{\lambda 1} = \frac{e\sqrt{8\pi}}{\omega_\lambda^2} (\mathbf{e}_\lambda \dot{\mathbf{r}}(0)) \cos \omega_\lambda t + \frac{e\sqrt{8\pi}}{\omega_\lambda} \int_0^t (\mathbf{e}_\lambda \dot{\mathbf{r}}(\tau)) \sin \omega_\lambda (t-\tau)\, d\tau. \tag{2.13}$$

En portant (2.13) dans (2.11) et en passant de la sommation sur λ à l'intégration sur ω et sur les angles (cf. (1.83)), puis en effectuant

quelques opérations bien simples (intégration sur les angles et transformation de l'intégrale), on obtient finalement

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - \frac{4e^2\omega_{\max}}{3\pi c^3}\ddot{\mathbf{r}} + \frac{4e^2}{3\pi c^3}\ddot{\mathbf{r}}(0)\frac{\sin\omega_{\max}t}{t} +$$

$$+ \frac{4e^2}{3\pi c^3}\int_0^t\int_0^{\omega_{\max}}\dddot{\mathbf{r}}(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\omega\,d\tau =$$

$$= e\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - m_{em}\ddot{\mathbf{r}} + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}} + \frac{4e^2}{3\pi c^3}\ddot{\mathbf{r}}(0)\frac{\sin\omega_{\max}}{t} +$$

$$+ \text{les termes tendant vers zéro pour } \omega_{\max}\sim c/r_0\to\infty. \quad (2.14)$$

L'apparition du terme où figure la masse électromagnétique $m_{em} = 4e^2\omega_{\max}/3\pi c^3 \sim e^2/r_0c^2$ qui tend vers ∞ avec $r_0 \to 0$ témoigne que déjà en théorie classique il faut renormaliser la masse. La renormalisation revient à dire que la masse totale $m + m_{em}$ est la masse observée de la particule *). La force de réaction $\mathbf{f} = (2e^2/3c^3)\dddot{\mathbf{r}}$ ne dépend pas de r_0 et, par conséquent, des hypothèses quelles qu'elles soient sur la structure de la charge. Mais cette force n'est pas la seule force de réaction. Premièrement, un terme complémentaire apparaît proportionnel à $(\sin\omega_{\max}t)/t$, et important si les t sont petits. En général, il est clair qu'il est inadmissible d'intégrer simplement l'équation (2.1) sous des conditions initiales quelconques, cette équation étant inapplicable pour $t \to 0$. C'est pourquoi les difficultés liées aux solutions incorrectes « autoaccélératrices » et autres (pour plus de détails, cf. [11, 12]) n'apparaissent pas non plus. Deuxièmement, les termes d'ordre (r_0/λ), $(r_0/\lambda)^2$, etc. ne figurant pas dans (2.14), sont petits par rapport à f seulement sous la condition de la forme (2.5) qui précisément conduit à la prescription (2.3). Ainsi, c'est justement le fait d'envisager la force de réaction f comme une perturbation, qui permet sans crainte d'utiliser l'équation du mouvement (2.1), dont le sens et les limites de validité sont suffisamment clairs.

Les efforts ont été bien nombreux pour démontrer la possibilité d'utiliser l'équation (2.1) et sa généralisation relativiste comme une équation exacte ; de plus, il fallait ne serait-ce que pour éliminer les solutions « autoaccélératrices » imposer telles ou telles conditions supplémentaires. Outre toutes autres choses, on ne comprend pas très bien à quoi cela doit servir ? Nous ne connaissons pas de problèmes

*) Non seulement il est possible de procéder ainsi, il le faut même, puisque la masse « nue » m et la masse électromagnétique m_{em} ne se manifestent pas séparément et ne peuvent pas être mesurées (ce qui vient d'être dit est vrai au moins dans les cas où la fréquence caractéristique du champ extérieur $\omega \ll \omega_{\max}$; ceci étant supposé au départ).

classiques dans lesquels il est impossible de considérer la force de réaction comme une perturbation (dans un référentiel où l'électron est au repos). La représentation de la particule ponctuelle classique est inconséquente et le problème de la structure des particules « élémentaires » doit se résoudre en tenant compte des effets quantiques.

L'étude de la réaction de rayonnement permet une fois de plus d'insister sur la différence qui existe en présence d'un champ (ou, pour mieux dire, en tenant compte du champ : une particule chargée en mouvement possède toujours un champ transversal) entre la vitesse de la particule $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)$ et son impulsion généralisée $\mathbf{p}$. En effet, les expressions (2.11)-(2.14) ont été obtenues en négligeant la relation entre le potentiel vecteur du champ propre $\mathbf{A}$ et les coordonnées $\mathbf{r}$. Par ailleurs, dans le cas général,

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{r}} = -\operatorname{grad}\left\{\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\int \mathbf{A}(\mathbf{r}', t)\, D(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, dV'\right)^2\right\}, \\ \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{m}\left\{\mathbf{p} - \frac{e}{c}\int \mathbf{A}(\mathbf{r}', t)\, D(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, dV\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

où nous ne tenons pas compte de la force extérieure $\mathbf{F}_0$. Il est évident que lorsque $\mathbf{A}(\mathbf{r}', t)$ est indépendant de $\mathbf{r}'$, la réaction du champ de rayonnement à l'impulsion disparaît (c.-a-d. $\dot{\mathbf{p}} = 0$ ou, compte tenu du champ, $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_0$), alors qu'elle demeure pour la vitesse, étant décrite dans les limites indiquées par l'équation (2.1). Ce résultat ne peut être considéré comme paradoxal, puisque l'impulsion d'une particule chargée est assez complexe : $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$. Quant à la théorie quantique, pour elle c'est justement l'impulsion d'une particule qui importe surtout et en comparant les expressions quantiques et classiques il ne faut pas oublier la différence entre l'impulsion et $m\mathbf{v}$ d'une particule chargée.

Passons à la question de la réaction de rayonnement au moment magnétique, c.-à-d. dans le cadre de la théorie classique, à un corps ou à un système lié de particules douées d'un moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$. L'analyse de ce problème posé par la discussion des modèles des particules élémentaires [10] acquit un intérêt particulier à l'occasion des pulsars qui, dans une certaine approximation, constituent précisément des dipôles magnétiques animés d'une rotation, ou, comme on dit parfois, des rotateurs magnétiques obliques [13-16]. Ainsi, considérons un corps (toupie, rotateur) de moment cinétique $\mathbf{M}$ et de moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$, la magnétisation du rotateur étant $\mathfrak{M} = \boldsymbol{\mu} D(\mathbf{r})$, $\int D(\mathbf{r})\, dV = 1$; le centre des masses du rotateur se trouve en $\mathbf{r} = 0$ et on admet qu'il est fixe.

Dans ces conditions, le système d'équations du moment M et d'équations du champ est le suivant :

$$\dot{\mathbf{M}} = [\mu \mathbf{H}_0] + \int [\mu \mathbf{H}'(\mathbf{r})] D(\mathbf{r})\, dV, \tag{2.16}$$

$$\Box \mathbf{A} = -4\pi \operatorname{rot} \mathfrak{M} = 4\pi [\mu \nabla D], \quad \mathbf{H}' = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{2.17}$$

où l'on admet que le champ extérieur $\mathbf{H}_0$ est homogène dans les limites du rotateur, ce dernier étant pour le moment supposé non chargé. En utilisant pour A le développement (2.9), on tire de (2.17)

$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} &= -\sqrt{8\pi}\, c \int \mathbf{e}_\lambda [\mu \nabla D(\mathbf{r})] \cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})\, dV = \\ &= -\sqrt{8\pi}\, c \mathbf{e}_\lambda [\mu \mathbf{k}_\lambda] \int D(\mathbf{r}) \sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})\, dV, \\ \ddot{q}_{\lambda 2} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 2} &= \sqrt{8\pi}\, c \mathbf{e}_\lambda [\mu \mathbf{k}_\lambda] \int D(\mathbf{r}) \cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})\, dV. \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

L'intégration par parties de (2.18) (le passage de ∇D à D) est possible puisqu'on adopte que la fonction D ne diffère de zéro que dans la région de l'ordre de rayon r_0 du rotateur ; la même raison permet de poser

$$\int D \sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})\, dV = 0 \quad \text{et} \quad \int D \cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})\, dV = 1$$

pour $\omega_\lambda < \omega_{max} \sim 2\pi c / r_0$ et

$$\int D \cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})\, dV = 0$$

pour $\omega_\lambda > \omega_{max}$. Bien entendu de cette façon il est impossible de calculer exactement les coefficients contenant le paramètre r_0 et, en général, dépendant du facteur de forme D.

Si l'on procède comme indiqué, on peut admettre que $q_{\lambda 1} = 0$ et utiliser pour $q_{\lambda 2}$ l'équation (cf. (2.18))

$$\ddot{q}_{\lambda 2} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 2} = \sqrt{8\pi}\, c \mathbf{e}_\lambda [\mu(t) \mathbf{k}_\lambda], \quad \omega_\lambda < \omega_{max}. \tag{2.19}$$

Sa solution s'écrit

$$q_{\lambda 2} = \frac{\sqrt{8\pi}\, c}{\omega_\lambda^2} \mu(0) [\mathbf{k}_\lambda \mathbf{e}_\lambda] \cos \omega_\lambda t + \\ + \frac{\sqrt{8\pi}\, c}{\omega_\lambda} \int_0^t \mathbf{e}_\lambda [\mu(\tau) \mathbf{k}_\lambda] \sin \omega_\lambda (t - \tau)\, d\tau, \tag{2.20}$$

où l'on admet pour $t = 0$ que le champ $\mathbf{H}'$ correspond au moment fixe $\mu(0)$.

A l'aide de (2.20) on trouve aisément le champ

$$\mathbf{H}' = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \sqrt{8\pi}\, c \sum_{\lambda} \mathbf{e}_\lambda q_{\lambda 2} \sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})$$

que l'on porte dans (2.16). Des opérations bien simples, analogues à celles appliquées à une charge, conduisent à l'équation du mouvement ($\mu = \mu(t)$, $\dot{\mu} = d\mu/dt$ et d'une façon analogue pour les autres grandeurs)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{M}} &= [\mu \mathbf{H}_0] - \frac{4\omega_{\max}}{3\pi c^3}[\mu\ddot{\mu}] + \frac{2}{3c^3}[\mu\dddot{\mu}] + \\ &+ \frac{4}{3\pi c^3}\left[\mu, \ddot{\mu}(0)\frac{\sin \omega_{\max} t}{t} + \dot{\mu}(0)\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin \omega_{\max} t}{t}\right)\right] + \\ &+ \text{les termes tendant vers zéro pour } \omega_{\max} \sim c/r_0 \to \infty.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Si on rejette les termes liés aux conditions initiales et les termes qui disparaissent avec $r_0 \to 0$, l'équation du mouvement devient

$$\dot{\mathbf{M}} = [\mu \mathbf{H}_0] - \mathbf{L} + \mathscr{R},$$
$$\mathbf{L} = \frac{4\omega_{\max}}{3\omega c^3}[\mu\ddot{\mu}], \quad \mathscr{R} = \frac{2}{3c^3}[\mu\dddot{\mu}]. \tag{2.22}$$

Le terme $\mathscr{R}$ est le moment des forces de réaction ; ce terme est dissipatif. Dans les conditions stationnaires ou en moyenne dans le temps, le travail du moment des forces $\mathscr{R}$ est égal à l'énergie rayonnée, ainsi que le travail de la force de réaction $\mathbf{f}$ (pour plus de détails, cf. chapitre 3). Soit, par exemple, le moment magnétique μ constant en grandeur et perpendiculaire à l'axe de rotation du rotateur ($\mu = \mu_\perp$, $\mu_{\perp x} = \mu_{0\perp} \cos \Omega t$, $\mu_{\perp y} = \mu_{0\perp} \sin \Omega t$, la vitesse angulaire Ω est dirigée suivant l'axe z). La puissance du rayonnement est alors

$$\mathscr{P} = \frac{2}{3c^3}(\ddot{\mu})^2 = \frac{2\Omega^4 \mu_{0\perp}^2}{3c^3}. \tag{2.23}$$

Sous les mêmes conditions, $\mathscr{R} = \frac{2}{3c^3}[\mu_\perp \dddot{\mu}_\perp]$ et le travail $\mathscr{R}\Omega$ est égal justement à l'expression (2.23). Le terme $\mathbf{L}$ de (2.22) est conservatif, et il est clair que

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{M}}_m, \quad \mathbf{M}_m = \frac{4\omega_{\max}}{3\pi c^3}[\mu\dot{\mu}], \tag{2.24}$$

c.-à.-d. $\mathbf{M}_m$ représente un certain moment cinétique d'origine électromagnétique. Comme il résulte de la déduction de l'équation

(2.21) et d'une façon parfaitement analogue au cas de la charge (cf. (2.14)), il faut adopter que dans l'équation (2.22) la fréquence de rotation du moment $\Omega \ll \omega_{max} \sim 2\pi c/r_0$. C'est pourquoi dans (2.22) $L \gg \mathcal{R}$ en valeur absolue. Mais d'autre part, le moment **L** peut être très petit par rapport au moment cinétiqe **M** (par exemple, c'est le cas des pulsars; cf. [16]). Ainsi, c'est le caractère du problème qui détermine si l'on doit ou non prendre en considération les termes **L** et $\mathcal{R}$. Dans l'exemple susmentionné du calcul du rayonnement d'un dipôle magnétique, le terme **L** ne joue aucun rôle. Mais si on envisage la diffusion des ondes électromagnétiques sur un dipôle magnétique, alors, au contraire, le terme **L** prédomine sur $\mathcal{R}$ (cf. [10]).

L'apparition de **L** dans (2.22) est plutôt inattendue, puisque par analogie avec le cas d'une charge, on pourrait s'attendre que l'application du champ propre fait apparaître le terme proportionnel à $\dot{\mathbf{M}}$ ou à $\dot{\boldsymbol{\mu}}$ et simulant la contribution de ces grandeurs. La situation devient plus claire si le rotateur mis à l'étude possède non seulement un moment magnétique, mais encore une charge de densité $eD(\mathbf{r})$. Calculons pour un tel rotateur l'impulsion électromagnétique angulaire:

$$\mathbf{M}_{em} = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{r}\,[\mathbf{EH}]]\, dV\,; \tag{2.25}$$

pour simplifier, adoptons que le rotateur est une sphère de rayon r_0, que le champ extérieur à la sphère est celui de la charge e et du dipôle magnétique $\boldsymbol{\mu}$ placés au centre de la sphère et, enfin, posons que le champ électrique à l'intérieur de la sphère est nul (un tel modèle, parfaitement réaliste, correspond à une sphère bonne conductrice, chargée et aimantée). Un calcul bien simple (cf. [17]) conduit alors au résultat

$$\mathbf{M}_{em} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_m, \quad \mathbf{M}_e = \frac{2e\boldsymbol{\mu}}{3r_0 c}, \quad \mathbf{M}_m = \frac{2}{3r_0 c^2}[\boldsymbol{\mu}\dot{\boldsymbol{\mu}}]. \tag{2.26}$$

Le moment cinétique $\mathbf{M}_m$ coïncide avec celui obtenu précédemment (cf. (2.24), où pour rendre la coïncidence complète il faut poser $\omega_{max} = \pi c/2r_0$), et le moment $\mathbf{M}_e$ est réellement proportionnel à $\boldsymbol{\mu}$ (ceci signifie qu'un terme proportionnel à $\dot{\boldsymbol{\mu}}$ apparaîtra dans l'équation du type (2.22)). Si le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ est proportionnel au moment cinétique **M** (ce qui est souvent le cas), le moment de l'impulsion électromagnétique angulaire $\mathbf{M}_e$ ne joue en fait aucun rôle et il faut le réunir avec **M** pour « renormaliser » le moment total en égalant sa valeur à la valeur observée (nous avons ici en

vue la particule « ponctuelle »; pour un rotateur macroscopique, avec $\mu = \varkappa \mathbf{M}$, on a tout simplement

$$\mathbf{M}_e = \frac{2e\varkappa}{3r_0c}\mathbf{M} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} + \mathbf{M}_e = \left(1 + \frac{\varkappa}{\varkappa_e}\right)\mathbf{M},$$

où, sous les conditions (2.26), $\varkappa_e = \mu/M_e = 3r_0c/2e \sim e/m_{em}c$, puisque la masse électromagnétique $m_{em} \sim e^2/r_0c^2$. Pour un rotateur magnétique non chargé, l'impulsion électromagnétique angulaire se ramène exactement à $\mathbf{M}_m$; de plus, l'intervention de ce moment peut changer radicalement la dynamique du rotateur (cf. (2.22)).

Notons à titre de conclusion que dans ce qui suit nous examinerons encore certains autres aspects du problème de la réaction de rayonnement.

CHAPITRE 3

CHARGE UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉE

Rayonnement et force de radiation dans le mouvement uniformément accéléré d'une charge. Loi de conservation de l'énergie d'une charge et d'un champ

La physique compte quelques questions littéralement « éternelles » débattues depuis plus d'une décennie par les scientifiques. Pour ne parler que de l'électrodynamique classique, citons les exemples des problèmes de la masse électromagnétique et des équations exactes du mouvement compte tenu de la force de réaction (cf. chapitre 2), du choix de l'expression du tenseur énergie-impulsion dans un milieu (cf. chapitre 12), du rayonnement et de la réaction de rayonnement d'une charge uniformément accélérée.

La première étude du champ d'une charge uniformément accélérée date d'il y a plus de 60 ans [18] ; elle a été suivie par de nombreuses publications parfois assez contradictoires (cf. § 32 de [5] et [19-25] ; l'article [22] donne également une bibliographie assez vaste que nous n'indiquons pas, en limitant nos références aux articles cités dans ce qui suit [19-21], ainsi qu'aux publications qui les ont suivies [23-25]).

Le problème du rayonnement d'une charge uniformément accélérée, tout comme les autres questions « éternelles », ne sont plus d'actualité aujourd'hui, ou en tous cas, leur aspect pragmatique est depuis longtemps suffisamment clair. C'est la seule raison de la conservation pendant un temps si long de certains points obscurs de caractère plutôt didactique ou méthodique. Mais, par contre, si de telles questions méthodiques sont négligées, elles deviennent sources de malentendus et d'articles erronés publiés dans des revues scientifiques sérieuses (dans ce qui suit nous en donnons quelques exemples, tout en nous gardant de les désigner).

Voici une difficulté élémentaire mais au fond la plus importante de l'étude du rayonnement d'une charge uniformément accélérée. Par définition, pour un mouvement uniformément accéléré, $\dot{\mathbf{v}} = \text{const}$ et $\ddot{\mathbf{v}} \equiv \dddot{\mathbf{r}} = 0$; donc, la force de réaction $\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}$ est nulle (nous nous bornons ici au cas non relativiste). Mais aussi, d'après la for-

mule connue de la puissance du rayonnement appelée parfois formule de Larmor

$$\mathcal{P} = \frac{2e^2}{3c^3} (\dot{\mathbf{v}})^2. \tag{3.1}$$

Il est évident que pour un mouvement uniformément accéléré la puissance $\mathcal{P} \neq 0$, et on se demande alors, comment une charge peut rayonner si la force de réaction est nulle?

Dans le cas général le travail $-\mathbf{vf}$ de la réaction de rayonnement n'est pas non plus égal à $\mathcal{P}$ (le signe « moins » est dû ici au fait que le produit $\mathbf{vf}$ traduit la diminution de l'énergie de la particule, et que la puissance $\mathcal{P}$ est positive; cf. plus loin). Toutefois, pour un mouvement périodique, le bilan énergétique se maintient en moyenne dans le temps ou pendant un intervalle de temps suffisamment long. En effet, $\mathbf{v}\ddot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) - (\dot{\mathbf{v}})^2$ et sous la condition $[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]_{t_1}^{t_1+T} = 0$, on obtient

$$-\int \mathbf{vf}\, dt = -\frac{2e^2}{3c^3} \int \mathbf{v}\ddot{\mathbf{v}}\, dt = \frac{2e^2}{3c^3} \int (\dot{\mathbf{v}})^2\, dt = \int \mathcal{P}\, dt, \tag{3.2}$$

où les intégrales sur le temps sont prises de t_1 à $t_1 + P$ (T est la période du mouvement)

Dans la plupart des cas la conservation du bilan en moyenne dans le temps suffit déjà pour éliminer toute contradiction réelle. De plus, la méthode élémentaire très employée pour déduire l'expression de la réaction de rayonnement $\mathbf{f}$ est basée précisément sur l'application de l'égalité (3.2) et de l'expression (3.1) de la puissance $\mathcal{P}$. Une telle méthode d'obtention de la force $\mathbf{f}$ peut suggérer que l'expression utilisée $\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}$ n'est vraie que pour un mouvement périodique ou pour une classe plus large de mouvements tels que pour un temps T assez long on puisse négliger le terme $[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]_{t_1}^{t_1+T}$. Mais comme nous l'avons vu, cette conclusion est fausse et pour obtenir l'expression de $\mathbf{f}$ on n'a aucune raison d'appliquer une contrainte de cette sorte.

L'explication de ce fait est bien simple. Mais notre tâche n'est pas de discuter cette question; il nous importe bien plus d'y initier le lecteur, ou plutôt de lui rappeler certaines formules utiles de la théorie du rayonnement.

Le champ électromagnétique d'une charge e qui se déplace dans le vide suivant une certaine trajectoire est défini par les formules connues qu'on déduit des expressions des potentiels de Liénard-Wiechert (cf. [1, 6]),

$$\mathbf{E} = \frac{e(1 - v^2/c^2)}{(R - \mathbf{vR}/c)^3}\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}R}{c}\right) + \frac{e}{c^2(R - \mathbf{vR}/c)^3}\left[\mathbf{R}\left[\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}R}{c}\right)\dot{\mathbf{v}}\right]\right], \tag{3.3}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R}[\mathbf{RE}]. \tag{3.4}$$

Ici les champs **E** et **H** sont pris au point d'observation à l'instant t, alors que les grandeurs **R**, **v** et $\dot{\mathbf{v}}$ des seconds membres des deux égalités se rapportent au « temps de rayonnement » $t' = t - R(t')/c$; le vecteur **R** est mené du point où se trouve la charge e au point d'observation. Ensuite, la vitesse de la charge $\mathbf{v}(t') = \partial\mathbf{R}(t')/\partial t'$ et $\dot{\mathbf{v}} = \partial\mathbf{v}/\partial t'$. Il est évident que la fonction $\mathbf{R}(t')$ détermine la trajectoire de la charge, mais il est plus commode de décrire la position de cette dernière par le vecteur $\mathbf{r}(t')$, et le point d'observation, par le vecteur $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t') + \mathbf{R}(t')$, d'où on a également $\dot{\mathbf{r}} \equiv \partial\mathbf{r}/\partial t' = -\partial\mathbf{R}/\partial t'$.

Le premier terme de (3.3) correspond au champ d'une charge qui se déplace à la vitesse **v**; ce terme diminue avec la distance R suivant la loi $1/R^2$. Le deuxième terme de (3.3) diminue avec la loi $1/R$ et pour $R \gg \frac{c^2(1-v^2/c^2)}{\dot{v}}$ devient le plus important; le champ décrit par ce terme se trouve être un champ transversal, c'est le champ d'une certaine onde électromagnétique. Si la charge produit un tel champ, on dit qu'elle rayonne. Au fond, nous avons là une définition nullement triviale qui a même besoin d'être précisée. En effet, le champ d'ondes d'une charge qui diminue avec la loi $1/R$ ne peut être considéré que dans sa zone d'onde, où pratiquement il n'y a que ce champ. Pourtant, on peut établir que le terme d'onde (deuxième terme de (3.3) et de l'expression développée (3.4)) existe même à de plus faibles distances de la charge. Mais dans ce cas, le champ total n'est nullement un champ de rayonnement se propageant à la vitesse de la lumière. Pour des raisons qui deviendront claires dans ce qui suit, il convient mieux de comprendre l'affirmation « la charge rayonne » dans un sens plus large, c'est-à-dire l'envisager en présence d'un champ d'ondes et indépendamment de l'existence ou de l'absence de l'autre partie du champ. Il faut souligner également qu'en mesurant les champs **E** et **H** à l'instant t, nous pouvons connaître l'état de l'électron (son accélération, par exemple) seulement à l'instant précédent $t' = t - R(t')/c$.

Si le champ examiné n'est que celui de la charge donnée, en présence du rayonnement, le flux d'énergie à travers toute surface fermée contenant la charge, doit être différent de zéro. Il est évident que l'énergie qui passe en un temps $dt = (1 - \mathbf{s}\mathbf{v}/c)\,dt'$ par une aire $d\sigma = R^2 d\Omega$ dans la direction $\mathbf{s} = \mathbf{R}/R$, vaut

$$dW_s = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]\,\mathbf{s}R^2\,d\Omega\,dt = \frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{[\mathbf{s}\,[(\mathbf{s}-\mathbf{v}/c)\,\dot{\mathbf{v}}]]^2}{(1-\mathbf{s}\mathbf{v}/c)^6}\,d\Omega\,dt, \qquad (3.5)$$

où $d\Omega$ est un élément de l'angle solide, le champ étant envisagé comme un champ d'ondes (deuxième terme de (3.3), (3.4)); aussi l'expression (3.5) n'est-elle vraie en général que dans la zone d'onde.

Le calcul de l'énergie totale émise par unité de temps t' donne

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt'} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \int \frac{[\mathbf{s}\,[(\mathbf{s}-\mathbf{v}/c)\,\dot{\mathbf{v}}]]^2}{(1-\mathbf{s}\mathbf{v}/c)^5}\, d\Omega =$$

$$= \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - [(1/c)\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]^2}{(1-v^2/c^2)^3} = -\frac{2e^2 c}{3} w^i w_i. \qquad (3.6)$$

Ici $w^i = (w^0, \mathbf{w}) = du^i/ds$ est le quadrivecteur accélération de la particule (ne pas confondre le vecteur unité s et la longueur de l'intervalle s qui figure ci-dessus seulement sous la forme de différentielle ds) *). L'invariance de Lorentz de (3.6) fait que cette expression peut se calculer dans n'importe quel système d'inertie. Dans un tel système où $\mathbf{v} = 0$, la formule (3.5) est vraie pour tout R et, par conséquent, on peut calculer l'énergie rayonnée, ainsi qu'établir l'existence même du rayonnement non seulement dans la zone d'onde mais aussi au voisinage de la charge. Dans une certaine mesure cette conclusion est déjà rendue évidente, certes, par des considérations générales, puisque le champ (et, en particulier, le champ d'onde) est défini par les formules (3.3), (3.4) quelle que soit la distance de la charge.

La quantité $\mathcal{P} = dW/dt'$ caractérise le flux d'énergie passant par une sphère de rayon R à l'instant t, mais il faut souligner que dans le second membre figurent les grandeurs associées à l'instant $t' = t - R(t')/c$, et l'énergie rayonnée se rapporte elle aussi à l'unité de « temps de rayonnement » t'. La différence entre les intervalles $dt = (1 - \mathbf{s}\mathbf{v}/c)\, dt'$ et dt' est une manifestation de l'effet Doppler; l'impulsion (le train d'ondes) émise en un temps dt' aura une durée dt.

---

*) Nous empruntons les notations à [6]. Dans ces conditions, la quadrivitesse

$$\frac{dx^i}{ds} = u^i = (u^0, \mathbf{u}) = \left\{ \frac{1}{1\sqrt{-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \right\},$$

$$u^i u_i = u_0^2 - \mathbf{u}^2 = 1, \quad ds = c\, dt \sqrt{1-v^2/c^2}$$

et

$$w^i = \frac{du^i}{ds} = \left\{ \frac{\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}}{c^3(1-v^2/c^2)^2}, \quad \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c^2(1-v^2/c^2)} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})}{c^4(1-v^2/c^2)^2} \right\},$$

où $\dot{\mathbf{v}} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt}$.

On voit aisément que

$$w^i w_i = -\frac{(\dot{\mathbf{v}})^2}{c^4(1-v^2/c^2)^2} - \frac{(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})^2}{c^6(1-v^2/c^2)^3} = -\frac{(\dot{\mathbf{v}})^2 - [(\mathbf{v}/c)\,\dot{\mathbf{v}}]^2}{c^4(1-v^2/c^2)^3}. \qquad (3.7)$$

Si, à l'instant t de l'émission la vitesse est nulle (ou pratiquement, assez petite), la puissance

$$\mathcal{P}=\frac{dW}{dt'}=\frac{dW}{dt}=\frac{2e^2}{3c^3}(\dot{\mathbf{v}})^2. \qquad (3.1a)$$

Cette expression coïncide au fond avec (3.1), elle est simplement plus détaillée.

Dans un mouvement uniformément accéléré non relativiste, $\dot{\mathbf{v}}=\text{const}$. On appelle relativiste un mouvement uniformément accéléré tel que dans le référentiel propre, c.-à-d. dans le système de référence où la vitesse de la particule est nulle, son accélération soit constante. Cela signifie que si et seulement si on est dans le cas d'un référentiel propre, alors pour un mouvement uniformément accéléré on a toujours $\ddot{\mathbf{v}}=0$. Sous une forme covariante cette condition peut s'écrire

$$\frac{dw^i}{ds}+\alpha u^i=0,$$

où α est une constante; pour $v=0$, cette expression conduit en effet, à l'égalité $\ddot{\mathbf{v}}=0$. En tenant compte que $u^iu_i=1$ et $w^iu_i\equiv\equiv\frac{du^i}{ds}u_i=0$, on trouve

$$\alpha=-\frac{dw^i}{ds}u_i=w^iw_i.$$

Ainsi on est amené à la condition qui détermine le mouvement uniformément accéléré

$$\frac{dw^i}{ds}+w^kw_ku^i=0; \qquad (3.8a)$$

dans une notation tridimensionnelle cette condition se met sous la forme

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{\mathbf{v}}+\frac{3}{c^2}(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})\,\dot{\mathbf{v}}=0. \qquad (3.8b)$$

Après la multiplication par w_i, (3.8a) entraîne que pour un mouvement uniformément accéléré

$$w^iw_i=-\frac{w^2}{c^4}=\text{const}, \qquad (3.9)$$

où w est l'accélération dans le système de référence où la particule est au repos. La réciproque serait pourtant fausse : bien que la grandeur w^iw_i soit constante, dans le cas général, elle ne respecte pas pour autant la condition (3.8a) ou (3.8b), dont l'observation est imposée par la définition du mouvement uniformément accéléré adoptée précédemment (il semble que cette définition soit raisonnable,

mais s'il le fallait on pourrait appeler uniformément accéléré le mouvement au carré de la quadriaccélération constant, c.-à-d. le mouvement qui remplit la condition (3.9)). Notons que cette condition est satisfaite précisément lors du mouvement d'une particule chargée dans un champ constant et homogène, si la réaction de rayonnement n'est pas prise en considération.
En effet, en dérivant par rapport à s l'équation du mouvement

$$\frac{du^i}{ds} \equiv w^i = \frac{e}{mc^2} F^{ik} u_k,$$

on voit que

$$\frac{dw^i}{ds} = \frac{e}{mc^2} F^{ik} w_k \quad \text{et} \quad \frac{dw^i}{ds} w_i = 1/2 \frac{d}{ds}(w^i w_i) = \frac{e}{mc^2} F^{ik} w_k w_i = 0$$

en vertu de l'antisymétrie du tenseur champ électromagnétique F^{ik}. Nous avons non seulement utilisé ici la persistance du champ (son indépendance du temps), mais encore tenu compte de l'homogénéité du champ qui dans les équations du mouvement est prise au point « occupé » par la charge (de cette façon, $F^{ik} = F^{ik}(t, \mathbf{r}(t))$; on peut alors négliger la dérivée de F^{ik} par rapport à s, comme on l'a fait ci-dessus, dans le seul cas il est vrai, où F^{ik} est indépendant aussi bien de t que de $\mathbf{r}$.)

En vertu de ce qui vient d'être dit, le mouvement d'une charge dans un champ électromagnétique homogène et constant arbitraire n'est pas toujours uniformément accéléré. Il l'est pourtant dans le cas particulier important d'une charge évoluant dans un champ électrique homogène et constant (par exemple, dans un condensateur) dans les conditions où la vitesse $\mathbf{v}$ et l'accélération $\dot{\mathbf{v}}$ sont colinéaires, c.-à-d. le mouvement est parallèle au champ. (3.7) et (3.9) entraînent alors

$$\frac{\dot{v}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = w = \text{const},$$

et, par conséquent,

$$\ddot{v} + \frac{3v\dot{v}^2}{c^2(1 - v^2/c^2)} = 0,$$

ce qui pour les $\mathbf{v}$ et $\dot{\mathbf{v}}$ colinéaires coïncide avec (3.8). En choisissant la direction de la vitesse $\mathbf{v}$ comme axe z et en posant pour simplifier les expressions à obtenir que, pour $t = 0$, les valeurs de $z = c^2/w$ et de $v = dz/dt = 0$, on a dans le cas particulier considéré

$$\left.\begin{aligned} z &= c\sqrt{\frac{c^2}{w^2} + t^2}, \qquad v = \frac{dz}{dt} = \frac{wt}{\sqrt{1 + w^2t^2/c^2}}, \\ \dot{v} &= \frac{dv}{dt} = \frac{c^3}{w^2(c^2/w^2 + t^2)^{3/2}} = \frac{w}{(1 + w^2t^2/c^2)^{3/2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}9\text{a})$$

La translation uniformément accélérée relativiste, est dite également hyperbolique, la fonction $z(t)$ étant une hyperbole.

Certes, le mouvement est hyperbolique non seulement dans le cas susmentionné du champ électrique homogène et constant colinéaire à la vitesse de la charge *), il l'est aussi dans le champ de gravitation correspondant; il importe seulement que l'équation du mouvement soit de la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=F=\text{const.}$$

Les formules (3.6) et (3.1a) ainsi que l'exposé précédent rendent clair que dans le cas du mouvement uniformément accéléré relativiste aussi bien que non relativiste la charge rayonne et $\mathcal{P} = \frac{dW}{dt'} = \frac{2e^2}{3c^3} w^2$. Qui plus est, le rayonnement émis dans un mouvement à accélération constante ne se distingue qualitativement en rien du rayonnement émis dans un mouvement à accélération quelconque. Cette dernière remarque est vraie non seulement pour le calcul de la puissance globale $\mathcal{P} = dW/dt'$, mais aussi pour la répartition spectrale du rayonnement [21].

L'approximation non relativiste de l'équation du mouvement d'une charge est de la forme (2.1); elle a été discutée en détail au chapitre 2. Mais pour rendre l'exposé plus commode, employons pour l'écrire des notations quelque peu différentes:

$$m\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{F}_0+\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \tag{3.10}$$

Sa généralisation relativiste est de la forme (cf., par exemple, [6]) **)

$$mc\frac{du^i}{ds}=\frac{e}{c}F_0^{ik}u_k+\frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2}+u^i\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}\right), \tag{3.11}$$

où on admet que la force extérieure est une force de Lorentz (F_0^{ik} est le tenseur champ électromagnétique extérieur); parfois l'équa-

*) Comme on le voit de l'exposé qui précède, si la charge se déplace dans un champ électrique $\mathbf{E}_0$ sous un angle à ce champ, c.-à-d. si sa vitesse possède une composante transversale, un tel mouvement n'est pas uniformément accéléré (dans ce cas, dans le repère, où la charge est au repos, il existe aussi un champ magnétique). Le rayonnement d'une particule émis lorsqu'elle se déplace dans un champ électrique homogène et constant de direction arbitraire a fait l'objet de l'étude de [21].

**) L'expression de la force de réaction

$$g^i=\frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2}+u^i\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}\right)$$

a cette propriété que dans le repère propre (cf. ci-dessus la discussion de la condition (3.8a)) elle conduit à la force $\mathbf{f}=\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}$.

tion (3.11) s'écrit sous une autre forme, en tenant compte que $u^i\,(du_i/ds) = 0$, et donc

$$u^k \frac{d^2u_k}{ds^2} = -\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}.$$

Dans la notation tridimensionnelle (3.11) devient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = e\left\{\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c}\,[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]\right\} + \mathbf{f},\\ &\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3\,(1-v^2/c^2)}\left\{\ddot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{v}}\,\frac{3\,(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})}{c^2\,(1-v^2/c^2)} + \right.\\ &\left. + \frac{\mathbf{v}}{c^2\,(1-v^2/c^2)}\left((\mathbf{v}\ddot{\mathbf{v}}) + \frac{3\,(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})^2}{c^2\,(1-v^2/c^2)}\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.12)$$

Comme il résulte de (3.8), (3.11) et (3.12), la force de réaction du mouvement uniformément accéléré, et en particulier, du mouvement hyperbolique, est nulle.

Notons que les limites d'application de l'équation du mouvement (2.1) (ou (3.10)) examinée au chapitre 2 rendent, certes, impossible l'utilisation des équations relativistes (3.11), (3.12). Les contraintes correspondantes ne sont pourtant liées d'aucune façon à la question du mouvement uniformément accéléré d'une charge que nous examinons ici.

Quels sont donc les points obscurs et les paradoxes qui se présentent ici?

Le premier point obscur a déjà été mentionné (c'est l'existence d'une radiation malgré la réaction de rayonnement nulle). Le deuxième point obscur débattu relatif au cas du mouvement uniformément accéléré d'une charge est lié à l'application du principe d'équivalence à une charge se déplaçant dans un champ de gravitation homogène (cf. article [22]). La troisième difficulté apparaît lorsqu'on entreprend de décrire pour tous les z et t le champ de la charge dont le mouvement est toujours (c.-à-d. pour $-\infty < t < \infty$) uniformément accéléré. En particulier, l'article [20] s'achève sur l'affirmation suivante: « Nous sommes ainsi amenés à conclure que les équations de Maxwell sont incompatibles avec l'existence d'une charge unitaire tout le temps uniformément accélérée ». Il se peut très bien qu'une telle conclusion soit vraie, puisque dans un mouvement hyperbolique illimité dans le temps l'énergie rayonnée totale est infinie tout comme l'énergie cinétique de la charge pour $t \to \pm\infty$, (la vitesse de la charge est c). Or, en effet, rien n'impose la recherche de la solution correspondante pour toute position réelle du problème, lorsque le mouvement uniformément accéléré de la particule ne dure qu'un intervalle de temps fini. Ainsi, s'il s'agit du mouvement dans un champ électrique constant et homogène (par exemple, dans un condensateur) la charge est accélérée seulement quand

$t'_1 < t' < t'_2$, alorc qu'aves $t' < t'_1$ et $t' > t'_2$, sa vitesse, disons, est constante (rappelons que dans un condensateur un tel mouvement est uniformément accéléré et, notamment, hyperbolique, seulement si la vitesse de la charge est parallèle au vecteur du champ). Si on retient cette circonstance, il ne reste aucun doute sur la possibilité d'obtenir la solution du champ sous la forme de potentiels retardés. Le fait que le champ d'une charge animée d'un mouvement uniformément accéléré ou hyperbolique est très spécial, est traduit également par le passage dans la zone d'onde. Comme nous l'avons déjà dit, le champ diminue comme $1/R$ (zone d'onde) si $R \gg c^2(1 - v^2/c^2)/\dot{v}$. Mais pour le mouvement hyperbolique, le temps d'observation étant fixé, une telle zone n'existe pas. En effet, t étant fixé, la distance $R = c(t - t') \to \infty$ pour $t' \to \infty$. Mais avec $t' \to -\infty$, pour une particule animée d'un mouvement hyperbolique (cf. formules (3.9a)):

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{1 + (w^2/c^2)\,t'^2} \approx \frac{c^2}{w^2 t'^2},$$

$$\dot{v}(t') \approx \frac{c^3}{w^2 t'^3},$$

d'où $(c^2/\dot{v})(1 - v^2/c^2) \approx ct'$. Il est donc clair que pour un mouvement hyperbolique $t = t' + R/c$ étant fixé et $R \to \infty$, la condition mentionnée $R \gg (c^2/\dot{v})(1 - v^2/c^2)$ ne peut être remplie. Ceci révèle le caractère dans un certain sens conventionnel de la notion de l'énergie émise par la charge : il faut s'entendre sur les valeurs de t ou de t' dont il est question.

Pour le mouvement uniformément accéléré pendant un temps fini, la situation est néanmoins bien définie. Le temps d'observation t étant donné et la loi du mouvement de la charge étant connue, on cherche $R(t')$ et le temps du rayonnement t'. Si t' se trouve dans l'intervalle (t'_1, t'_2), lorsque le mouvement de la charge est uniformément accéléré, on peut dire que la charge rayonne sans subir à cet instant t' la force de réaction : à l'instant $t = t' + R/c$ le flux d'énergie par une sphère de rayon $R(t')$ est différent de zéro.

Ainsi, nous revenons au premier paradoxe : un rayonnement existe en l'absence de force de freinage radiatif. Fixons sur ce fait notre attention puisqu'il nous permettra de mieux comprendre la loi de conservation de l'énergie en électrodynamique et ce qui l'associe au calcul de l'énergie rayonnée et du travail de la force de freinage radiatif.

Pour trouver l'énergie rayonnée par une charge ou l'intensité de rayonnement observé à la surface donnée, on calcule loin de la charge le vecteur de Poynting $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]$ et s'il s'agit des pertes d'énergie de la charge, on trouve le flux de ce vecteur passant par une surface fermée. C'est ainsi qu'on obtient en particulier les formules stan-

dard (3.6) et (3.1). Bien entendu, il ne s'agit pas seulement d'utiliser ces formules, puisqu'elles ne sont vraies que dans le vide. Si la charge se déplace dans un milieu, les résultats obtenus sont en général tout à fait différents. Il suffit de dire que dans un milieu une charge peut rayonner même si elle est animée d'un mouvement uniforme, c'est ce qu'on observe d'ailleurs dans le cas du rayonnement Tchérenkov ou du rayonnement de transition (cf. ci-dessous chapitres 6 et 7). Le calcul du vecteur de Poynting et de son flux traversant une surface reste néanmoins un mode parfaitement correct pour déterminer l'énergie émise par une charge se déplaçant dans un milieu (plus précisément, dans un milieu sans dispersion spatiale, car en présence d'une dispersion, le vecteur de Poynting ne rend pas compte de la densité du flux; cf. ci-dessous chapitre 10). Les pertes d'énergie par la charge ou l'énergie rayonnée se calculent également par deux autres procédés: on cherche la dérivée par rapport au temps de l'énergie du champ $\frac{d}{dt}\int\frac{\mathbf{ED}+H^2}{8\pi}\,dV$ ou le travail $e\mathbf{v}\mathbf{E}' = \mathbf{v}\mathbf{f}$ effectué par la charge pour surmonter le champ produit par elle-même (autrement dit, on calcule le travail de réaction de rayonnement $\mathbf{f}$, qui en présence d'un milieu n'est pas défini, certes, par les expressions (3.10), (3.11)). Pour un cas très fréquent (rendu évident par ce qui suit) tous les trois modes conduisent au même résultat; indiquons à titre d'un de nombreux exemples le calcul de l'énergie du rayonnement Tchérenkov *). Mais en général, le flux d'énergie total, la variation de l'énergie du champ et le travail de la réaction de rayonnement ne sont pas égaux entre eux. La négligence de cette circonstance a conduit, par exemple à des inexactitudes dans la théorie du rayonnement synchrotron dans le cas du mouvement hélicoïdal (non circulaire) des particules (cf. chapitre 5).

Le paradoxe dû au rayonnement d'une charge uniformément accélérée est lié également à l'identification illégitime du flux d'énergie avec le travail de la force de réaction.

Par un procédé bien connu (cf., par exemple, chapitres 10 et 12), on obtient à partir les équations du champ électromagnétique les relations (théorème de Poynting):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}\right) = -\mathbf{jE} - \operatorname{div}\mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]. \qquad (3.13)$$

Ici et plus loin dans ce chapitre nous nous bornons au cas du vide et nous examinons le mouvement d'une charge ponctuelle pour $\mathbf{j} =$

*) Dans leur ouvrage original [26], Tamm et Franck ont calculé le flux d'énergie; dans [7] l'auteur a déterminé la variation de l'énergie par unité de temps (cf. également chapitre 6) et, par exemple, dans [27], les auteurs ont défini le travail de la force de réaction associée au rayonnement Tchérenkov.

$= e\mathbf{v}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t))$. Après l'intégration de (3.13) sur un certain volume V limité par la surface σ, on a

$$\frac{d\mathcal{H}_{em}}{dt} = -e\mathbf{v}\mathbf{E} - \oint S_n\, d\sigma, \quad \mathcal{H}_{em} = \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi}\, dV. \tag{3.14}$$

D'autre part, l'équation du mouvement (3.12) amène

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = e\mathbf{v}\mathbf{E}_0 + \mathbf{v}\mathbf{f}, \quad \mathscr{E} \equiv \mathcal{H}_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3.15}$$

Dans (3.14) figure d'après le sens le champ total $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ où $\mathbf{E}'$ est le champ de la charge elle-même, ou plus précisément, la partie de son champ qui importe pour le calcul de la force $\mathbf{f}$; au point où se trouve la charge $e\mathbf{E}' = \mathbf{f}$ et, par conséquent, dans (3.14), le terme $e\mathbf{v}\mathbf{E} = e\mathbf{v}\mathbf{E}_0 + \mathbf{v}\mathbf{f}$. Aussi, comme il fallait s'attendre, (3.14) et (3.15) conduisent-elles à la loi de conservation

$$\frac{d(\mathcal{H}_{em} + \mathscr{E})}{dt} = -\oint S_n\, d\sigma. \tag{3.16}$$

L'énergie du champ $\mathcal{H}_{em}$ inclut l'énergie des champs extérieurs $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{H}_0$, par exemple, l'énergie du champ du condensateur par où passe et s'accélère la charge considérée. C'est pourquoi nous allons admettre, rien que pour simplifier le problème, que la charge est accélérée par l'un quelconque champ extérieur non électromagnétique ((3.11) ne tient pas compte de ce champ, et les relations (3.15) et (3.16) non plus).

La loi de conservation (3.14) se met alors sous la forme

$$\frac{d\mathcal{H}_{em}}{dt} = -\mathbf{v}\mathbf{f} - \oint S_n\, d\sigma, \tag{3.17}$$

où $\mathcal{H}_{em}$ est l'énergie du champ de la charge (comme on l'a dit, on considère que tous les autres champs électromagnétiques sont absents); soulignons que dans (3.13)-(3.17) figure partout comme argument non noté, le même temps, le temps d'observation t.

L'équation (3.17) dont le sens est parfaitement clair, montre que le travail de la force de réaction $\mathbf{v}\mathbf{f}$, la variation de l'énergie du champ $d\mathcal{H}_{em}/dt$ et le flux d'énergie total $\oint S_n\, d\sigma$ sont liés par la même relation et dans le cas général ne sont nullement égaux entre eux *). Mais si on envisage le mouvement stationnaire, alors $d\mathcal{H}_{em}/dt = 0$ et $-\mathbf{v}\mathbf{f} = \oint S_n\, d\sigma$. Ensuite on peut calculer $\mathcal{H}_{em}$ dans l'espace tout entier, en repoussant la surface σ à l'infini, pour

*) Pour simplifier l'exposé nous négligeons les signes, c.-à-d. nous considérons les valeurs absolues des quantités $\mathbf{v}\mathbf{f}$, $d\mathcal{H}_{em}/dt$ et $\oint S_n\, d\sigma$.

obtenir $\oint S_n \, d\sigma = 0$. Alors, $d\mathcal{H}_{em}/dt = -\mathbf{vf}$. Ce qui vient d'être dit explique pourquoi, disons, les pertes d'énergie par la particule $\mathbf{vf}$ au régime stationnaire peuvent s'établir en calculant $\oint S_n \, d\sigma$ ou $d\mathcal{H}_{em}/dt$.

Le rayonnement stationnaire est difficile à réaliser dans le sens exact du terme (un exemple de processus stationnaire est fourni par le rayonnement Tchérenkov) et d'habitude il s'agit d'un processus périodique, tel que l'énergie du champ dans un volume fixé satisfait à la relation $\mathcal{H}_{em}(t_1) = \mathcal{H}_{em}(t_1 + T)$. Il en est précisément ainsi dans le cas, par exemple, d'un oscillateur fixe ou du rayonnement synchrotron d'une charge se déplaçant sur une orbite circulaire (ce qui importe ici, c'est que chaque période T la particule émettrice revient au même point). Pour un processus périodique

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \mathbf{v}(t)\,\mathbf{f}(t)\,dt = -\int_{t_1}^{t_1+T} \oint S_n(t)\,d\sigma\,dt. \tag{3.18}$$

Le désaccord entre le temps d'observation t et celui du rayonnement t' n'a évidemment aucune importance ici, puisque pour un processus périodique le choix de l'instant t' ne joue aucun rôle. Mais si on envisage un mouvement tel que l'énergie du champ $\mathcal{H}_{em}(t < t_1) = \mathcal{H}_{em}(t > t_2) = \mathcal{H}_{em}^{(0)}$, alors la relation (3.18) est encore vraie, à condition de remplacer $t_1 + T$ par un temps quelconque $t > t_2$. Tel ou pratiquement à peu près tel est le cas du rayonnement d'une charge « reflétée » par le champ électrique d'un condensateur (on admet que pour $t < t_1' \leqslant t_1$ et $t > t_2 \geqslant t_2'$, la vitesse de la charge est constante). Il faut seulement prendre en considération que l'énergie $\mathcal{H}_{em}(t)$ dépend du volume V limité par la surface σ (ainsi, on peut admettre que t_1 est l'instant d'arrivée t_1' de la charge dans le condensateur, mais t_2 doit être plus grand que t_2', l'instant où la particule s'échappe du condensateur, du fait que le champ de rayonnement doit avoir le temps pour quitter le volume V).

Comme nous l'avons vu (cf. (3.2)), dans le cas non relativiste la force de réaction $\mathbf{f}$ satisfait à la prescription imposée (rappelons que d'après le sens même, dans (3.2) $\mathcal{P} = \oint S_n \, d\sigma$).

Dans le cas relativiste écrivons, après des substitutions élémentaires, la composante temporelle de l'équation (3.11)

$$\frac{d}{dt'}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = e\mathbf{v}\mathbf{E}_0 + \frac{2e^2}{3}\left(\frac{dw^0}{dt'} + cw^i w_i\right). \tag{3.19}$$

Compte tenu des relations (3.6) et (3.12) l'équation (3.19) devient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt'}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=e\mathbf{v}\mathbf{E}_0+\mathbf{v}\mathbf{f}=e\mathbf{v}\mathbf{E}_0+\frac{2e^2}{3}\frac{dw^0}{dt'}-\mathcal{P},\\ &w^0=\frac{\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}}{c^3(1-v^2/c^2)^2},\quad \mathcal{P}=\frac{dW}{dt'}=-2/3e^2cw^iw_i. \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

Dans (3.19) et (3.20) le temps est noté t' ; il caractérise le mouvement de la charge et lorsqu'on étudie un rayonnement, c'est le temps que ce rayonnement dure. Or, dans (3.17) et dans les expressions initiales (3.13) et (3.14) le temps t est le même pour les charges et le champ. Sous ce rapport, la puissance de rayonnement $\mathcal{P} = dW/dt'$ se distingue de $dW/dt = \oint S_n(t)\, d\sigma$.

La charge qui entre dans le condensateur parallèlement au champ de freinage émet pendant tout le temps t' de sa présence dans le champ (comme nous l'avons dit, $t_1' \leqslant t' \leqslant t_2'$) des ondes électromagnétiques; en outre,

$$\mathcal{P}=\frac{dW}{dt'}=\frac{2e^2}{3c^3}w^2=\frac{2e^4E_0^2}{3m^2c^3}=\text{const.}$$

Cela signifie qu'à une distance $R(t')$ assez grande de la charge, on observera à l'instant $t = t' + R(t')/c$ un champ de rayonnement à flux d'énergie de valeur correspondante. Si $t' < t_1'$ et $t' > t_2'$, la force de réaction n'agit pas sur la charge, et le déplacement de cette dernière est régi par la loi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\mathbf{F}_0=e\mathbf{E}_0.$$

Par ailleurs, aux instants t_1' et t_2' la charge subit l'action du freinage qui au cours du déplacement accéléré produit le travail

$$\int_{t_1'}^{t_2'}\mathbf{v}\mathbf{f}\,dt'=-\int_{t_1'}^{t_2'}\mathcal{P}\,dt'=-\frac{2e^2}{3c^3}w^2(t_2'-t_1'),$$

c.-à-d. il est égal exactement à l'énergie rayonnée.

Ce qui vient d'être dit rend clair que, malgré l'existence du rayonnement, l'égalité à zéro de la force de réaction pendant le mouvement uniformément accéléré n'a rien de paradoxal. En effet, le flux total d'énergie différent de zéro à travers la surface qui entoure la charge, la force de réaction étant nulle, est égal exactement à la diminution de l'énergie du champ dans le volume limité par cette surface. Or, dans le cas général, toutes les trois quantités $d\mathcal{E}_{em}/dt$, $\mathbf{v}\mathbf{f}$ et $\oint S_n\, d\sigma$ (cf. la relation (3.17)) sont différentes de zéro. On n'a d'autant plus aucune raison de s'attendre que le travail

de la force de réaction $\mathbf{vf}$ soit égal au flux d'énergie $dW/dt = \oint S_n \, d\sigma$ ou au flux $dW/dt' = \mathcal{P}$, puisque la force est appliquée à la charge, alors que le flux se calcule à l'aide de la sphère de rayon R. Parfaitement en accord avec l'esprit de la théorie du champ, le flux d'énergie traversant la surface se détermine directement par le champ au voisinage de cette surface, et non pas par le champ sur la trajectoire de la charge, se déplaçant à l'intérieur de cette surface.

Les explications ci-dessus peuvent sembler trop détaillées. Mais nous les avons données parce que, par exemple, dans l'article détaillé [19] specialement consacré au rayonnement d'une charge uniformément accélérée, on n'applique pas du tout la loi de conservation (3.17). Au lieu de le faire, on introduit comme dans toute une série d'autres ouvrages, la notion de « l'énergie d'accélération »

$$Q = \frac{2e^2 w^0}{3} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}}{(1 - v^2/c^2)^2}.$$

(3.20) rend clair que $\mathbf{vf} = dQ/dt' - \mathcal{P}$ et les équations (3.15), (3.19) et (3.20) s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mathscr{E}}{dt'} - \mathbf{vf} = \frac{d\mathscr{E}}{dt'} - \left(\frac{dQ}{dt'} - \mathcal{P}\right) = e\mathbf{v}\mathbf{E}_0, \\ &\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad Q = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}}{(1 - v^2/c^2)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.21)$$

La grandeur Q est parfois interprétée comme une partie de l'« énergie interne d'une particule chargée », alors que d'autres fois elle est considérée comme une fraction de l'énergie du champ au voisinage immédiat de la charge qui n'apporte rien à la masse électromagnétique. De ce point de vue, la force de réaction étant nulle, on peut admettre que l'énergie rayonnée $\mathcal{P}$ est fournie pas l'« énergie d'accélération » Q ou l'« énergie interne » $\mathscr{E} - Q$. Mais si on admet que Q est une fraction de l'énergie du champ, l'énergie du rayonnement $\mathcal{P}$ est fournie par l'énergie du champ. Ceci est formellement exact, puisque $\mathcal{P} = dW/dt'$ est le flux d'énergie du champ rapporté à l'unité de temps t' et traversant la surface enveloppant la charge.

Nous pensons, pourtant, que l'introduction d'une sorte d'« énergie d'accélération » ou d'« énergie interne » de la charge non seulement ne rend pas plus claire la question du bilan d'énergie, mais plutôt ne fait que l'embrouiller. La charge ne possède que l'énergie $\mathscr{E} = \frac{nc^2}{1 - v^2/c^2}$; la division de la force de réaction $\mathbf{f}$ ou du travail de cette force $\mathbf{vf}$ en deux ou en plusieurs parties n'est certainement pas univoque, et pour cette seule raison ne peut avoir aucun sens spécial. Plus exactement, si un tel sens lui est attribué, c'est seule-

ment en vertu de l'identification d'une partie du travail $\mathbf{vf}$ à l'expression de $\mathcal{P}$, établie à partir des considérations indépendantes. C'est pourquoi en discutant la question du bilan d'énergie dans le mouvement accéléré et le rayonnement d'une charge, nous ne voyons aucune raison spéciale pour dépasser le cadre de la loi de conservation (3.15) et (3.17). Bien entendu, l'écriture du travail $\mathbf{vf}$ sous la forme de la somme de deux termes (cf. (3.21)) est également commode et naturelle, mais rien n'oblige d'accorder à ces termes un sens nouveau quel qu'il soit.

CHAPITRE 4

SUR LE RAYONNEMENT D'UNE CHARGE ANIMÉE DE MOUVEMENT NON RELATIVISTE OU RELATIVISTE

Traits caractéristiques des particules non relativistes et relativistes se déplaçant dans le vide. Mouvement et rayonnement dans un oscillateur. Mouvement dans un champ magnétique. Réaction de rayonnement et limites d'application de la théorie classique. Pertes radiatives (par freinage magnétique) d'une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique

Le rayonnement des particules non relativistes ($v \ll c$) est très important et se distingue déjà qualitativement du rayonnement des particules relativistes ($v \sim c$). Comme dans ce qui suit nous aurons à les envisager à plus d'une reprise, il convient de rappeler au lecteur les traits particuliers qui leur sont propres.

Si une particule chargée se déplace dans le vide (le présent chapitre ainsi que le chapitre 5 ne traitent que de ce cas), elle rayonne seulement s'il y a accélération; de plus, dans le cas non relativiste, lorsque la vitesse $v \ll c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s, elle émet le plus souvent un rayonnement dipolaire. Plus précisément, l'intensité d'un rayonnement de polarité plus élevée que dipolaire, est proportionnelle aux facteurs supplémentaires d'ordre $(v/c)^{2n} \sim (a/\lambda)^{2n}$ où a est la dimension du système rayonnant, et $\lambda \equiv \lambda_0 = 2\pi c/\omega = cT$, la longueur d'onde du rayonnement; $T \sim a/v$, la période caractéristique ou la quasi-période de la particule; pour un quadripôle, $n = 1$, pour un octipôle, $n = 2$; etc. C'est pourquoi le rayonnement quadripolaire, par exemple, ne présente ordinairement de l'intérêt que si le moment dipolaire du système est nul ou anomalement petit *). Pour un doublet (oscillateur) à moment $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$ qui ne varie qu'en valeur, le champ électrique dans la zone d'onde varie suivant la loi $E \backsim \sin\theta$, et l'intensité (flux d'énergie rapporté à l'angle solide $d\Omega$), suivant

$$I = \frac{dW_s}{d\Omega\, dt} = \frac{(\ddot{p})^2}{4\pi c^3} \sin^2\theta, \tag{4.1}$$

*) C'est, certes, la plus simple des possibilités. Un rayonnement quadripolaire peut être plus intense qu'un rayonnement dipolaire aussi dans le cas où la fréquence des variations du moment quadripolaire est plus grande que celle du moment dipolaire. La différence entre la dépendance angulaire (ou comme on dit, le diagramme polaire) du rayonnement dipolaire et du rayonnement quadripolaire peut également être importante.

où θ est l'angle entre **p** et le vecteur d'onde **k** (fig. 4.1); pour le mouvement harmonique tel que $\mathbf{p} = e\mathbf{a}_0 \sin \omega_0 t$, la formule (4.1) conduit à la formule (1.85) mise également en moyenne dans le temps.

Le rayonnement d'un électron non relativiste en mouvement dans un champ magnétique s'appelle rayonnement cyclotron *). La fréquence de ce rayonnement qui est dipolaire est égale naturellement à la fréquence de rotation d'un électron dans le champ H_0, c.-à-d.

$$\omega_H = \frac{eH_0}{mc} = 1{,}76 \cdot 10^7 H_0. \tag{4.2}$$

Dans le cas le plus simple du mouvement circulaire (vitesse suivant le champ $v_z = 0$), le rayon de l'orbite est

$$r_H = \frac{v}{\omega_H} = \frac{mc^2}{eH_0}\frac{v}{c} = \frac{\lambda_H}{2\pi}\frac{v}{c}. \tag{4.3}$$

Il est évident que pour $v/c \ll 1$ on a toujours $2\pi r/\lambda_H \ll 1$, ce qui définit justement la validité de l'approximation dipolaire ($\lambda_H = 2\pi c/\omega_H$ est la longueur d'onde du rayonnement cyclotron).

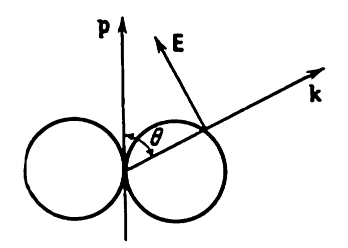


Fig. 4.1. Intensité du champ électrique d'un doublet fixe, fonction de l'angle θ entre l'axe **p** et le vecteur d'onde **k**

Si le déplacement circulaire de la charge est non relativiste, le champ magnétique est le même que celui de deux oscillateurs harmoniques perpendiculaires entre eux et déphasés de $\frac{\pi}{2}$ ou, ce qui revient au même, celui d'un doublet électrique fixe de moment er_H perpendiculaire au champ magnétique, qui tourne à une fréquence ω_H. L'intensité moyenne par période de rayonnement cyclotron émis par une charge se déplaçant circulairement est

$$I = \frac{dW_n}{d\Omega\, dt} = \frac{e^2\omega_H^4 r_H^2}{8\pi c^3}(1+\cos^2\alpha), \tag{4.1a}$$

où α est l'angle entre $\mathbf{H}_0$ et **k**, et $d\Omega = \sin\alpha\, d\alpha\, d\varphi$; le diagramme polaire correspondant est représenté sur la figure 4.2.

*) La terminologie du rayonnement des particules se déplaçant dans un champ magnétique n'est pas encore bien établie. Compte tenu des termes déjà adoptés, dans le cas général il serait raisonnable de l'appeler rayonnement de freinage magnétique, dans celui des particules non relativistes, rayonnement cyclotron, et dans celui des particules ultra-relativistes, rayonnement synchrotron. Autrement dit, dans le cadre de cette terminologie, les rayonnements cyclotron et synchrotron sont des cas limites du rayonnement de freinage magnétique, le premier étant associé aux particules non relativistes et le second, aux particules ultra-relativistes.

Pour le mouvement hélicoïdal, tant que la composante de la vitesse parallèle au champ $v_z \equiv v_H = \mathbf{vH}_0/H \ll c$, la distribution qualitative de l'intensité se distingue peu de celle qui vient d'être indiquée, sauf, peut-être, une certaine asymétrie dont le caractère devient clair de ce qui suit.

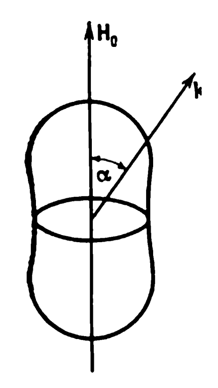


Fig. 4.2. Diagramme polaire du rayonnement cyclotron

Dépendance entre l'intensité du rayonnement cyclotron et l'angle α formé par le vecteur du champ magnétique $\mathbf{H}_0$ et le vecteur d'onde $\mathbf{k}$

Les particules relativistes ou, pour être plus concret, les particules ultrarelativistes (dans ce qui suit dites relativistes) telles que

$$\xi \equiv \frac{1}{\gamma} \equiv \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \ll 1 \qquad (4.4)$$

rayonnent d'une toute autre façon (introduisons en plus de la notation ξ la notation $1/\gamma$, dont l'usage est très général dans la littérature). C'est le cas où, en général, le rayonnement dipolaire ne prédomine pas ; pour établir le caractère du rayonnement, le plus simple est de recourir aux formules de passage d'un système d'inertie à un autre. Soit un système de coordonnées où à l'instant donné, la particule étant au repos ou se déplaçant à une vitesse non relativiste émet un rayonnement dipolaire à la fréquence ω_{00}. Alors dans le système du laboratoire dans lequel l'émetteur se déplace comme un tout à la vitesse v, la fréquence est définie par la formule bien connue de l'effet Doppler (cf., par exemple, [6])

$$\omega(\theta) = \frac{\omega_{00}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-(v/c)\cos\theta}. \qquad (4.5)$$

Il importe de souligner que l'angle θ entre $\mathbf{v}$ et $\mathbf{k}$ est mesuré ici dans le système du laboratoire. Si on respecte (4.4),

$$\omega(0) = \omega_{00}\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \approx 2\omega_{00}\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \equiv 2\gamma\omega_{00}, \qquad (4.6)$$

et pour les angles

$$\theta \leqslant \xi \equiv \frac{1}{\gamma} \equiv \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \ll 1, \qquad (4.7)$$

la fréquence $\omega(\theta)$ est grande devant ω_{00}.

Mais si $\theta > \xi$, la fréquence du rayonnement décroît assez vite avec l'augmentation de l'angle θ (à propos, le sens immédiat, et au fond, le contenu de l'effet Doppler, est élucidé au chapitre 5).

Il existe de nombreux cas où l'on observe un rayonnement analogue à celui d'un doublet animé d'un mouvement rapide : atomes, molécules et noyaux excités se déplaçant à grande vitesse (nous nous écartons ici de la description donnée par la mécanique quantique du système émetteur nécessaire dans de pareils cas), mouvement d'une charge dans un champ magnétique sous un angle χ entre **H** et **v** très petit, enfin, mouvement dans des oscillateurs de toute sorte. Par oscillateur on entend ici un dispositif qui assure le déplacement périodique d'une charge sur un parcours L suivant une trajectoire

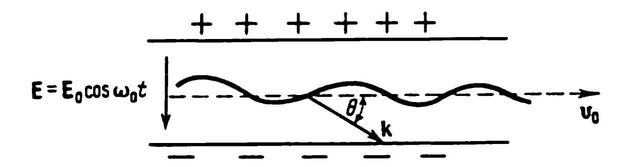


Fig. 4.3. Mouvement d'une charge dans un oscillateur électrique

proche d'une trajectoire rectiligne. Dans un oscillateur électrique, une particule se déplace de la même façon que, par exemple, dans un condensateur sous l'action d'un champ électrique homogène $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega_0 t$ perpendiculaire à la vitesse non perturbée (à la grande vitesse) $\mathbf{v}_0$ de la particule. Un oscillateur magnétique possède un champ magnétique statique inhomogène à période spatiale l, qui fait osciller la particule à la fréquence cyclique $\omega_0 \equiv 2\pi c/\lambda_0 = 2\pi v_0/l$ (c'est le cas qui a lieu pratiquement si une particule passe successivement au-dessus des aimants de pôles NS NS NS . . .).

L'équation du mouvement d'une particule dans un oscillateur électrique (fig. 4.3) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = e\mathbf{E}_0 \cos \omega_0 t, \tag{4.8}$$

où la vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$, $v' \ll v_0$, $v_0 = \text{const}$, $\mathbf{v}_0\mathbf{E}_0 = 0$. C'est pourquoi on peut écrire avec une bonne approximation *)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathscr{E}}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\mathscr{E}}{c^2}\frac{d^2\mathbf{r}_\perp}{dt^2} = e\mathbf{E}_0 \cos \omega_0 t\,; \quad \mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}\,; \\ &\mathbf{r}_\parallel = \mathbf{v}_0 t\,; \quad \mathbf{r}_\perp = \mathbf{a}_0 \cos \omega_0 t\,; \quad \mathbf{a}_0 = -\frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega_0^2}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

où $\mathscr{E}/c^2$ joue le rôle d'une masse « transversale ».

*) Il s'agit de l'approximation suffisante pour calculer le rayonnement en approximation dipolaire examinée dans ce qui suit (la théorie du rayonnement d'un oscillateur est exposée plus en détail dans l'article [29c]).

Le moment dipolaire qui apparaît sous l'action du champ **E** est égal à $\mathbf{p} = e\mathbf{r}_\perp$. Le rayonnement est celui d'un doublet en mouvement (pour $\gamma = \mathscr{E}/mc^2 \gg 1$), si

$$a_0 \ll \frac{\lambda_0}{2\pi\gamma} = \frac{c}{\gamma\omega_0}. \tag{4.10}$$

c.-à-d. sous la condition que

$$eE_0\lambda_0 \ll 2\pi mc^2. \tag{4.10a}$$

Si cette condition est observée, elle assure à l'avance la petitesse de la vitesse $v' \backsim a_0\omega_0$ par rapport à la vitesse de la lumière c (en effet, $v' \backsim (eE_0\lambda_0/2\pi\mathscr{E})\ c$). Dans (4.10) figure la longueur d'onde λ_0/γ, puisque dans le système de coordonnées se déplaçant à la vitesse moyenne de la particule $v_0 \approx c$, la longueur de l'élément périodique de l'oscillateur $l' = l/\gamma \approx \lambda_0/\gamma$, alors que l'amplitude des oscillations est toujours a_0.

La fréquence émise est égale à

$$\omega(\theta) = \frac{\omega_0}{1-(v/c)\cos\theta}, \quad \lambda(\theta) = \frac{2\pi c}{\omega(\theta)}, \tag{4.11}$$

où l'indice zéro de v est omis (et nous l'omettrons également dans ce qui suit). La différence entre la première des formules (4.11) et la formule (4.5) est due au fait que la fréquence ω_0 de (4.8), (4.9) est mesurée dans le système du laboratoire, alors que dans (4.5) elle est mesurée dans le système de repos. Dans le cas relativiste on a d'après (4.11)

$$\omega(0) = \frac{\omega_0}{1-v/c} \approx 2\omega_0\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 \equiv 2\omega_0\gamma^2, \quad \frac{\mathscr{E}}{mc^2} \gg 1, \tag{4.12}$$

ce qui ne diffère de (4.6) que par le facteur supplémentaire $\mathscr{E}/mc^2$.

Un oscillateur peut être considéré comme un transformateur de la fréquence du champ extérieur ω_0 en fréquence $\omega(\theta)$, les « coefficients de transformation » pouvant atteindre des valeurs énormes. Par exemple, pour l'énergie usuelle des accélérateurs électroniques modernes, $\mathscr{E} \sim 5$ GeV, le facteur $\gamma^2 \sim 10^8$, puisque $mc^2 = 5 \times 10^5$ eV. C'est pourquoi pour $\omega_0 \sim 10^{10}\ s^{-1}$ ($\lambda_0 \sim 20$ cm, gamme des ondes radio) la fréquence $\omega(0) \sim 10^{18}\ s^{-1}$ ($\lambda(0) \sim 10^{-7}$ cm $= 10$ Å, rayons X). Il est évident qu'un oscillateur peut en principe être utilisé comme un générateur de rayonnement dans le domaine des fréquences où d'autres méthodes sont inefficaces : on peut encore utiliser le rayonnement qu'il fournit pour détecter les particules incidentes (cf. [29] et sa bibliographie ; un oscillateur présente des

possibilités nouvelles si on y insère un milieu transparent ; on en reparlera au chapitre 6).

Les expressions de l'intensité des champs et du rayonnement, ainsi que les formules (4.5) et (4.11) de l'effet Doppler contiennent le facteur caractéristique $(1 - (v/c)\cos\theta)$ élevé à une certaine puissance. Bornons-nous ici à nous référer aux expressions (3.3), (3.4) du champ d'une charge ponctuelle, peut-être les plus importantes de la théorie du rayonnement, ou aux expressions initiales des potentiels de Liénard-Wiechert (cf. § 63 de [6])

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{cR\,(1-(v/c)\cos\theta')}, \quad \varphi = \frac{e}{R\,(1-(v/c)\cos\theta')}, \tag{4.13}$$

où θ' est l'angle entre la vitesse $\mathbf{v}$ et le rayon vecteur $\mathbf{R}$, mené du point où se trouve la charge au point d'observation; dans la zone d'onde l'angle θ' et l'angle θ entre $\mathbf{v}$ et $\mathbf{k}$ sont évidemment identiques. Enfin, dans la formule (3.5) de $dW_s = Id\Omega dt$ figure au

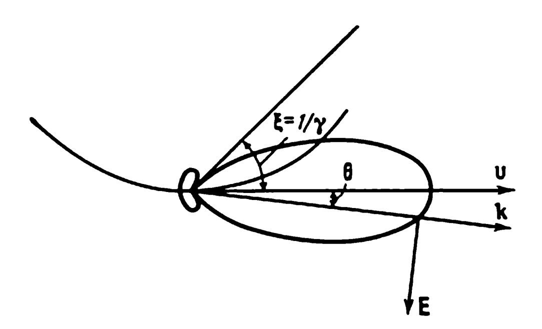


Fig. 4.4. Diagramme polaire du rayonnement d'un doublet

Projection du champ électrique sur le plan passant par l'axe du doublet, fonction de l'angle θ entre la vitesse de translation $\mathbf{v}$ et le vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Le doublet se déplace perpendiculairement à son axe. La distribution du champ correspond au cas $v = 2/3\ c$

dénominateur le facteur $(1 - (v/c)\cos\theta)^6$. Ceci rend évident que dans le cas relativiste le rayonnement est dirigé surtout en avant : il se concentre essentiellement dans les angles d'ouverture $\theta \leqslant \xi \equiv$ $\equiv 1/\gamma \equiv mc^2/\mathscr{E}$. Dans le langage quantique (ou plutôt corpusculaire) ce résultat est particulièrement immédiat : les photons à énergie maximale $\hbar\omega$ sont justement rayonnés en avant. Le diagramme polaire du rayonnement d'un doublet qui parcourt une trajectoire à la vitesse comparable à celle de la lumière est représenté sur la figure 4.4.

Lorsqu'une particule se déplace dans un oscillateur, ainsi que dans de nombreux autres cas, c'est l'énergie totale émise sur son parcours (sur toute la longueur L de l'oscillateur) qui présente le

plus d'intérêt ; l'observation s'effectue à des distances $R \gg L$, c.-à-d. loin de l'émetteur. Dans ces conditions on s'intéresse surtout à la quantité (cf. (3.5))

$$\frac{dU_s}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \int [\mathbf{EH}]\, \mathbf{s} R^2\, dt = \int \frac{dW_s}{d\Omega\, dt} \left(1 - \frac{\mathbf{sv}}{c}\right) dt' =$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c^3} \int \frac{[\mathbf{s}\,[\mathbf{s} - \mathbf{v}/c)\, \dot{\mathbf{v}}]]^2}{1 - (\mathbf{sv}/c)^5}\, dt' =$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c^3} \int \left\{ \frac{2\,(\mathbf{s}\dot{\mathbf{v}})\,(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})}{c\,(1 - (\mathbf{sv}/c))^4} + \frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{(1 - (\mathbf{sv})/c)^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1 - v^2/c^2)\,(\mathbf{s}\dot{\mathbf{v}})^2}{(1 - (\mathbf{sv})/c)^5} \right\} dt'. \qquad (4.14)$$

Cette formule (sauf les notations) coïncide avec la formule (73.11) de [6], et comme nous l'avons dit, résulte directement de l'expression (3.5). Pour un oscillateur $\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}} = 0$, $\dot{\mathbf{v}} = -\omega_0^2 \mathbf{r}$, $\mathbf{sv} = v \cos\theta$. D'autre part, d'après le sens même, dans (4.9) figure précisément le « temps de la source » t' bien que le signe « prime » y est omis. L'intégration sur dt' se ramène à remplacer $\cos^2 \omega_0 t'$ par 1/2 et à multiplier par la durée du passage de la particule par l'oscillateur $T = L/v_0 \equiv L/v$. Il en résulte

$$\frac{dU_s}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_0^4 a_0^2 L\, \{(1 - (v/c)\cos\theta)^2 - (1 - v^2/c^2)\sin^2\theta \cos^2\varphi\}}{8\pi c^3 v\, (1 - (v/c)\cos\theta)^5} =$$

$$= \frac{e^4 E_0^2 L\, \{(1 - (v/c)\cos\theta)^2 - (mc^2/\mathscr{E})^2 \sin^2\theta\cos^2\varphi\}}{8\pi c^3 v m^2\, (1 - (v/c)\cos\theta)^5} \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2, \qquad (4.15)$$

où φ est l'angle compris entre le champ $\mathbf{E}_0$ et la projection de $\mathbf{s} = (\mathbf{k}/k)$ sur le plan perpendiculaire à $\mathbf{v}$.

Dans le cas relativiste (en fait, ultra-relativiste) (4.4), lorsque $1/(1 - v/c) \approx 2\,(\mathscr{E}/mc^2)^2$, on a

$$\frac{dU_s}{d\Omega} \approx \frac{e^4 E_0^2 L\, (mc^2/\mathscr{E})^2}{8\pi m^2 c^4\, (1 - (v/c)\cos\theta)^3},$$

$$U = \int \frac{dU_s}{d\Omega}\, d\Omega \approx \frac{1}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 E_0^2 L; \quad \frac{\mathscr{E}}{mc^2} \gg 1. \qquad (4.16)$$

Comme nous l'avons dit plus haut et comme le rend clair (4.15), le rayonnement est concentré dans les angles $\theta \sim mc^2/\mathscr{E}$ et sa fréquence caractéristique est $\omega \sim \omega(0) \sim \omega_0 (\mathscr{E}/mc^2)^2$. L'énergie rayonnée totale est proportionnelle au facteur $\frac{e^4 \mathscr{E}^2}{m^4} = \frac{e^4 c^4}{m^2 (1 - v^2/c^2)}$, c.-à-d. pour la charge donnée, elle dépend tant de l'énergie totale $\mathscr{E}$ que de la masse au repos m (ou de m et de la vitesse v). En même temps, dans le cas considéré, l'accélération de la charge ne dépend que de $\mathscr{E}$ (cf. (4.9)).

L'étude détaillée du rayonnement d'une charge qui se déplace dans un champ magnétique à une vitesse relativiste fera l'objet du chapitre 5. Pour le moment, nous allons examiner la force de réaction appliquée aux particules relativistes.

Nous avons déjà donné au chapitre 3 (cf. (3.11), (3.12), (3.19), et (3.20)) l'équation relativiste du mouvement compte tenu de la force de réaction. Il est pourtant commode, tout comme dans le cas non relativiste, de tenir compte au départ du caractère approximatif de la formule de la force de réaction, et l'exprimer par l'intensité du champ. Cette opération a été réalisée au § 76 de [6] mais nous la reprendrons ici en partant de l'équation du mouvement

$$mc\frac{du^i}{ds}=\frac{e}{c}F^{ik}u_k+g^i, \quad g^i=\frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2}-u^iu^h\frac{d^2u_h}{ds^2}\right). \qquad (4.17)$$

En première approximation

$$mc\frac{du^i}{ds}=\frac{e}{c}F^{ik}u_k\,; \quad \frac{d^2u^i}{ds^2}=\frac{e}{mc^2}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l}u_ku^l+\frac{e^2}{m^2c^4}F^{ik}F_{kl}u^l. \qquad (4.18)$$

Portons d^2u^i/ds^2 de (4.18) dans l'expression de g^i et mettons (4.17) sous la forme

$$mc\frac{du^i}{ds}=\frac{e}{c}F^{ik}u_k+$$
$$+\frac{2e^3}{3mc^3}\left\{\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l}u_ku^l-\frac{e}{mc^2}F^{il}F_{kl}u^k+\frac{e}{mc^2}(F_{kl}u^l)(F^{km}u_m)u^i\right\}. \qquad (4.19)$$

Dans le cas ultra-relativiste, partout sauf dans les expressions de la forme $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, on peut poser $v = c$. Aussi, dans (4.19) c'est le dernier terme qui est le terme de rayonnement principal et l'équation tridimensionnelle du mouvement pour $v \to c$ peut s'écrire *)

*) Rappelons également pour commodité la liaison de toute force quadridimensionnelle g^i avec une force tridimensionnelle $\mathfrak{f}_l$ correspondante. Plus précisément

$$g^i=(g^0, \mathbf{g})=\left\{\frac{\mathfrak{f}\mathbf{v}}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad \frac{\mathfrak{f}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\}.$$

de plus,

$$\frac{dp^i}{ds}=mc\frac{du^l}{ds}=g^i, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathfrak{f},$$

puisque

$$u^i=\left\{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\}, \quad ds=c\,dt\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right)+\mathbf{f},\\
&\mathbf{f}=\frac{2e^4}{3m^2c^5}(F_{kl}u^l)(F^{km}u_m)\,\mathbf{v}=\\
&\quad=-\frac{2e^4}{3m^2c^4}\frac{(E_y-H_z)^2+(E_z+H_y)^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{\mathbf{v}}{v},\\
&\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\gg 1,
\end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

où dans la dernière expression de f, pour rendre explicites les composantes des champs, la direction de v est choisie comme l'axe des x. Le fait qu'avec $\gamma \gg 1$ la force f est dirigée suivant v résulte également de l'équation (3.12), mais cette dernière est moins commode que (4.20).

Voici encore quelques remarques importantes auxquelles parfois on ne prête pas attention. Dans le cas relativiste, le rayonnement est dirigé surtout en avant dans le même sens que la vitesse. Aussi le recul, la réaction, doit-elle être orientée en arrière (le rayonnement directionnel est porteur d'impulsion). C'est ce qui explique pourquoi la force f est antiparallèle à v. Il semblerait que ceci entraîne également que la réaction de rayonnement conduit à la diminution de la projection de la vitesse sur toutes les directions. Mais en général cette conclusion est fausse.

Examinons à titre d'exemple le mouvement dans un champ magnétique $\mathbf{H}_0$ homogène et constant. Puisque dans la suite ce cas nous intéressera à plus d'une reprise, examinons de près son application à la particule de charge eZ et de masse M.

L'équation du mouvement se met alors sous la forme (pour l'instant nous ne tenons pas compte de la réaction de rayonnement *)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\frac{eZ}{c}[\mathbf{vH}_0]. \tag{4.21}$$

Cette équation s'intègre facilement en montrant que la trajectoire de la particule est hélicoïdale : sa vitesse $\mathbf{v}=\mathbf{v}_\parallel+\mathbf{v}_\perp$; $\mathbf{v}_\parallel=\text{const}$

---

*) Pour appliquer l'équation (4.21), en toute rigueur, même cette réserve ne suffit pas ; il faut encore remarquer que nous allons admettre que la charge eZ et la masse M sont constantes. Une telle hypothèse est, certes, presque toujours sous-entendue non explicitement, mais elle n'est pas obligatoire du fait que, en tenant compte des fissions nucléaires et (ou) des « dépouillements » des électrons atomiques, la charge et la masse des ions ne sont pas des grandeurs constantes.

est la vitesse constante le long du champ (axe z), et $\mathbf{v}_\perp$ est sa vitesse dans le plan (x, y) perpendiculaire à $\mathbf{H}_0$ (fig. 4.5) ; on a

$$\left.\begin{array}{lll} v_{\perp,x} = v_\perp \cos \omega_H^* t, & v_{\perp,y} = -v_\perp \sin \omega_H^* t, & v_\parallel = \mathrm{const}, \\ v_\parallel = v \cos \chi, & v_\perp = v \sin \chi, & v^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2, \\ \omega_H^* = \dfrac{eZH_0}{Mc}, & \dfrac{Mc^2}{\mathscr{E}} = \omega_H \dfrac{Mc^2}{\mathscr{E}}, & r_H = \dfrac{v \sin \chi}{\omega_H^*}. \end{array}\right\} \quad (4.22)$$

Ici χ est l'angle entre $\mathbf{v}$ et $\mathbf{H}_0$; r_H, le rayon de la circonférence décrite par la projection du rayon vecteur sur le plan (x, y) ; comme d'habitude, nous l'appellerons rayon de courbure, mais il ne faut pas le confondre avec r_H^* qui est le rayon de courbure de la trajectoire spatiale de la particule, qui vaut

$$r_H^* = \frac{r_H^2 + (v_\parallel/\omega_H^*)^2}{r_H} = \frac{v}{\omega_H^* \sin \chi}. \quad (4.23)$$

Si dans ce qui suit le contraire n'est pas mentionné, on entend par e la valeur absolue de la charge d'un électron, et on admet que les fréquences ω_H et ω_H^* sont positives. Dans le cas des électrons ultra-relativiste on a

$$r_H = \frac{\mathscr{E} \sin \chi}{eH_0} = \frac{\mathscr{E}\,(\mathrm{eV}) \sin \chi}{300 H_0},$$
$$\mathscr{E} \gg mc^2 = 5{,}1 \cdot 10^5 \ \mathrm{eV}. \quad (4.24)$$

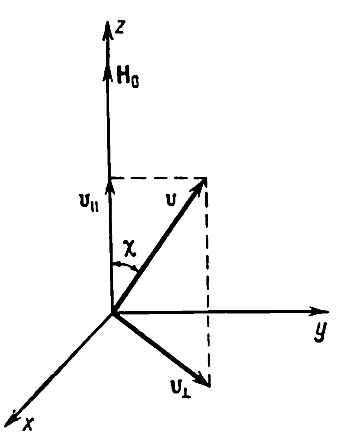


Fig. 4.5. Figure illustrant la détermination des quantités $\mathbf{v}_\parallel$, $\mathbf{v}_\perp$ et χ

Le champ H_0 est toujours exprimé en œrsteds (gauss) et r_H, ainsi que les autres longueurs, en centimètres. Il est souvent plus commode d'exprimer l'énergie $\mathscr{E}$ en électron-volts, ce qui se note sous la forme $\mathscr{E}$ (eV) = $\mathscr{E}/1{,}6 \cdot 10^{-12}$, où $\mathscr{E}$ est l'énergie en ergs.

Dans le cas relativiste, le champ H_0 étant donné, la gyrofréquence ω_H^* est inférieure à la gyrofréquence non relativiste ω_H pour la raison évidente de l'augmentation de la masse « dynamique » $\mathscr{E}/c^2 = M/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Pour les électrons

$$\omega_H^* = \omega_H \frac{mc^2}{\mathscr{E}} = 1{,}76 \cdot 10^7 H_0 \frac{mc^2}{\mathscr{E}}. \quad (4.25)$$

Revenons maintenant à la réaction de rayonnement.

Puisque la force de réaction (4.20) est antiparallèle à $\mathbf{v}$, il semble, comme nous l'avons déjà dit, que la charge se déplaçant dans un champ magnétique, les deux projections de la vitesse $v_\parallel$ et $v_\perp$ devraient diminuer. Or, il est évident qu'en approximation considérée

(4.19) (et c'est la seule approximation justifiée, cf. chapitre 2 et plus loin) et compte tenu de la force de réaction dans un champ magnétique homogène et constant, $v_{\parallel}$ = const. En effet, puisque dans un champ magnétique constant $v_{\parallel}$ = const ou $dv_{\parallel}/ds = 0$ sans qu'on tient compte de la réaction de rayonnement, en itérant (en passant de (4.17) à (4.19)) on peut voir que là aussi, comme toujours, $dv_{\parallel}/ds = 0$. Cette contradiction apparente par rapport à l'équation (4.20) disparaît si l'on songe que l'équation elle-même n'est valide que si $v \to c$ et qu'elle permet l'étude de l'impulsion $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, mais non pas de la vitesse. Pour ce qui est de l'impulsion d'une particule, elle diminue en effet sous l'action du rayonnement, et ceci concerne aussi bien $\mathbf{p}_{\parallel}$ que $\mathbf{p}_{\perp}$.

Dans un temps suffisamment long, $\mathbf{p}_{\perp} \to 0$ et

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_{\parallel}^2/c^2}}, \quad p_{\parallel} = \frac{mv_{\parallel}}{\sqrt{1 - v_{\parallel}^2/c^2}}, \quad p_{\perp} \to 0, \ t \to \infty. \tag{4.26}$$

On comprend donc que la particule ne reste relativiste (pour $t \to \infty$) que sous un très petit angle χ_0, de sorte que $v_{\parallel} = v \cos \chi_0 \sim c$.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2 dans le cas non relativiste, la réaction de rayonnement doit être envisagée comme une perturbation, elle doit être petite devant les autres forces. Le passage au cas relativiste, et surtout de l'équation (4.17) à (4.19), peut pousser à faire une conclusion analogue. Mais une conclusion qui impose à la force de réaction d'être petite par rapport à la force de Lorentz (en particulier, dans l'équation (4.20)) serait incorrecte. En effet, les conditions initiales sont données par (2.5) et (2.6) obtenues au chapitre 2 et d'après lesquelles dans le repère où à l'instant donné la particule est au repos, la force de réaction est petite. Dans un système du laboratoire où la vitesse de la particule est v, la condition (2.6a) devient

$$H_0 \ll \frac{m^2c^4}{e^3} \frac{mc^2}{\mathscr{E}} = 6 \cdot 10^{15} \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \text{ e}, \tag{4.27}$$

où H_0 est le champ dans le système du laboratoire (dans le système où la particule est au repos ce champ est $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ fois plus grand suivant l'ordre de grandeur; or, ceci conduit non pas à (2.6 a) mais à (4.27); ici il s'agit au fond de la composante de la force de Lorentz perpendiculaire à la vitesse $\mathbf{v}$, alors que pour $\mathscr{E}/mc^2 \gg 1$, la force de réaction est dirigée suivant $-\mathbf{v}$, et par conséquent, ainsi que la projection de $\mathbf{E}$ sur $\mathbf{v}$, elle est la même dans le système du laboratoire et le système de repos de la particule).

La situation devient plus claire au sens physique si l'on raisonne en termes de longueurs d'onde ou de fréquences de rayonnement (c.-à-d. d'une façon analogue au passage de la condition (2.6a) à la condition équivalente (2.6b). Si $\omega = 2\pi c/\lambda$ est la fréquence de

rayonnement dans le système du laboratoire, en vertu de l'effet Doppler dans le système de repos de la particule, la fréquence $\omega_{00} \sim \omega/\gamma = \omega mc^2/\mathscr{E}$ et $\lambda_{00} \sim \lambda\mathscr{E}/mc^2$ (cf. (4.6); d'après le sens on prend comme ω la fréquence maximale ω (0)). C'est pourquoi la condition (2.5) se met sous la forme

$$\lambda_{00} \sim \lambda\mathscr{E}/mc^2 \gg r_e$$

ou

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg r_e \frac{mc^2}{\mathscr{E}} = \frac{e^2}{mc^2}\frac{mc^2}{\mathscr{E}}, \quad \omega \ll \frac{c}{r_e}\frac{\mathscr{E}}{mc^2} = \frac{c\mathscr{E}}{e^2}. \tag{4.28}$$

On obtient le même résultat si on impose que la longueur d'onde λ soit supérieure à la « dimension » de l'électron $r_e mc^2/\mathscr{E}$ dans le système du laboratoire (il s'agit de tenir compte de la « compression » relativiste d'un objet en mouvement).

Appliquons maintenant la condition (4.28) au cas du rayonnement dans un champ magnétique. Comme nous allons le montrer au chapitre 5, dans ce cas la fréquence caractéristique s'écrit $\omega \sim$ $\sim (eH_0/mc)\,(\mathscr{E}/mc^2)^2$. En portant cette fréquence dans (4.28) on obtient justement la condition (4.27).

Ainsi, si on reste dans le cadre de la théorie classique, l'action de la force de réaction peut être évaluée à partir des équations (4.17), (4.19) et (4.20) sous les conditions (4.27) et (4.28). Si on fait entrer en ligne de compte les effets quantiques on rend alors possible, comme nous l'avons noté déjà au chapitre 2 (cf. (2.7)), l'application de la théorie classique seulement aux longueurs d'onde $\lambda \gg \hbar/mc =$ $= r_e/\alpha$, $\alpha = e^2/\hbar c \approx \frac{1}{137}$. Mais cette inégalité intéresse seulement le système de repos. Dans un système du laboratoire, pour obtenir la condition d'application de la théorie classique il faut dans (4.28) remplacer r_e par $\hbar/mc$, c.-à-d. la mettre sous la forme

$$\lambda \gg \frac{\hbar}{mc}\frac{mc^2}{\mathscr{E}}, \quad \hbar\omega \ll \mathscr{E}. \tag{4.29}$$

Cette inégalité (ses deux formes sont quant au fond équivalentes) exprimée à travers ω est parfaitement naturelle : si une particule émet des photons d'énergie $\hbar\omega$ comparable à l'énergie de la particule $\mathscr{E}$, l'approche classique devient inapplicable (il suffit de dire qu'elle n'exclut pas non plus le rayonnement d'une onde de fréquence $\omega \gg \mathscr{E}/\hbar$, ce qui contredit pourtant la loi de conservation de l'énergie) *).

*) La situation est en fait un peu plus compliquée. Si, comme on l'admet souvent dans la théorie classique, le mouvement de la particule est donné, elle peut en principe émettre des fréquences aussi grandes que l'on veut : la réaction de rayonnement (le recul) est compensée par les forces extérieures assurant le mouvement de paramètres donnés. Mais une particule libre d'énergie $\mathscr{E}$ ne peut d'aucune façon, certes, émettre des photons d'énergie $\hbar\omega > \mathscr{E}$.

Pour le cas du mouvement dans un champ magnétique et pour celui d'un rayonnement synchrotron la contrainte quantique sur le champ et l'énergie, rendant possible l'application de la théorie classique est de la forme

$$H_0 \ll \frac{e^2}{\hbar c}\frac{m^2c^4}{e^3}\frac{mc^2}{\mathscr{E}} = \frac{m^2c^3}{e\hbar}\frac{mc^2}{\mathscr{E}} = 4{,}4\cdot 10^{13}\,\frac{mc^2}{\mathscr{E}}. \tag{4.30}$$

On aboutit à cette contrainte en appliquant la condition (4.29) au rayonnement synchrotron à fréquence caractéristique $\omega \sim \sim (eH_0/mc)\,(\mathscr{E}/mc^2)^2$.

Le champ « quantique » caractéristique $m^2c^3/e\hbar$ a également le sens suivant: sur le parcours $\hbar/mc$ le travail du champ électrique $E_0 \sim m^2c^3/e\hbar$ appliqué à la charge e est d'ordre mc^2. La conséquence physique de cette affirmation est que dans de tels champs (et, bien entendu, dans des champs plus forts) peuvent déjà apparaître des paires électron-positon ce qui nécessite une énergie non inférieure à $2mc^2 \approx 10^6$ eV). Une particule d'énergie $\mathscr{E}$ peut déjà produire des paires dans des champs $F_0 \gtrsim (m^2c^3/e\hbar)\,(mc^2/\mathscr{E})$, puisque dans son système de repos le champ atteint précisément la valeur critique $m^2c^3/e\hbar$ (pour plus de détails sur les effets quantiques dans des champs forts, cf. [30] et sa bibliographie).

En considérant maintenant l'équation (4.20) nous voyons que devant la force de Lorentz la réaction de rayonnement est faible sous la condition

$$F_0 \ll \frac{m^2c^4}{e^3}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 = 6\cdot 10^{15}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2, \quad F_0 \sim E_0 \quad \text{ou} \quad H_0 \tag{4.31}$$

(on admet que $H_\perp \sim H_0$, etc.; cf. également plus loin (4.44) et la note relative à l'inégalité (4.27)).

Le facteur supplémentaire $mc^2/\mathscr{E}$ (supplémentaire par rapport aux critères (4.27) et (4.29)) peut rendre la réaction de rayonnement assez grande devant la force de Lorentz, mais, le critère (4.30) étant observé, l'équation classique (4.20) est quand même applicable. Le domaine des champs qui donne lieu à cette situation est évidemment défini par les inégalités

$$\frac{m^2c^4}{e^3}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 \ll H_0 \ll \frac{m^2c^3}{e\hbar}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right) \sim 4\cdot 10^{13}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right). \tag{4.32}$$

Le champ H_0 étant donné, la condition (4.32) peut également s'écrire

$$\sqrt{\frac{m^2c^4}{e^3H_0}} \ll \frac{\mathscr{E}}{mc^2} \ll \frac{m^2c^3}{e\hbar H_0} \sim \frac{4\cdot 10^{13}}{H_0}. \tag{4.33}$$

Pour des champs d'ordre 10^9—10^{13}Oe (surface des pulsars), la majoration imposée au paramètre $\mathscr{E}/mc^2$ (c.-à-d. la limite d'appli-

cation de la théorie classique) est assez importante et sa signification est parfaitement réelle. D'autre part, pour l'énergie

$$\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \gg \sqrt{\frac{m^2c^4}{e^3H_0}} \sim \frac{10^8}{\sqrt{H_0}}. \tag{4.34}$$

la force de réaction l'emporte sur la force de Lorentz.

Il est donc clair que la petitesse relative de la force de réaction dans le système de repos de la particule ne se conserve pas dans le système du laboratoire, vu que la force de réaction et la force de Lorentz dépendent différemment de l'énergie. Dans le cas (4.34) également la formule (4.19) se déduit de (4.17) d'une façon correcte, la méthode employée ici étant invariante et donc juste dans le cas des composantes du quadrivecteur (vecteur g^i) petites par rapport à celles de l'autre quadrivecteur (vecteur $(e/c)\ F^{ik}u_k$), même dans un seul quelconque des systèmes de référence (nous avons repris ici l'explication donnée au § 76 de [6]).

L'expression de la force de réaction (4.20) est très commode pour calculer les pertes par radiation, pertes d'énergie par rayonnement. Par exemple, dans un champ magnétique constant, les pertes par radiation sont

$$\mathscr{R}(\mathscr{E}) = \frac{2e^4}{3m^2c^3} H_\perp^2 \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2, \quad \frac{\mathscr{E}}{mc^2} \gg 1. \tag{4.35}$$

où $\mathbf{H}_\perp \equiv \mathbf{H}_{0\perp}$ est la projection du champ $\mathbf{H}_0$ sur le plan perpendiculaire à la vitesse $\mathbf{v}$. Pour une vitesse arbitraire on a pour une particule de charge eZ et de masse M,

$$\mathscr{R} = \frac{2(eZ)^4 H_\perp^2 v^2}{3M^2c^5(1-v^2/c^2)} = \frac{2(eZ)^4 H_\perp^2}{3M^2c^3} \left\{ \left(\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}\right)^2 - 1 \right\}. \tag{4.36}$$

Le mode le plus conséquent pour obtenir cette expression consiste à utiliser l'équation (4.19). Pour déterminer les pertes par rayonnement on calcule souvent l'énergie rayonnée mais nous avons déjà noté au chapitre 3 une certaine étroitesse de cette approche qui peut conduire à des confusions (cf. [31] et la discussion au chapitre 5 des particularités du rayonnement synchrotron dans un mouvement hélicoïdal). Pourtant, pour un mouvement circulaire dans un champ magnétique, le calcul de l'énergie rayonnée (cf. § 74 de [6]) donne l'expression correcte (formule (4.36) où $H_\perp = H_0$); sa généralisation au cas du mouvement hélicoïdal se fait de proche en proche de la façon déjà mentionnée, mais en général la substitution $H_0 \to H_\perp \equiv \equiv H_{0\perp}$ peut également être justifiée d'une autre façon. C'est que pour $H_\perp = 0$ il n'y a aucune perte; pour $H_\perp = H_0$ admettons que les pertes sont connues, et enfin pour $\mathscr{E}/mc^2 \gg 1$, (4.35) est vraie; c'est pourquoi il semble que la formule (4.36) qui donne le résultat correct dans les trois cas limites, soit assez naturelle.

Si la particule se déplace dans un champ magnétique et sa force de réaction est négligée, elle conserve son énergie $\mathscr{E} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ (pour le démontrer, il suffit de multiplier scalairement (4.21) par v). Aussi, si l'on tient compte de la force de réaction on a tout de suite

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\mathscr{R} \tag{4.37}$$

ou, dans le cas ultra-relativiste,

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\frac{2(eZ)^4 H_\perp^2}{3M^2c^3}\left(\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}\right)^2 = \\ = -0{,}98\cdot 10^{-3} H_\perp^2 \left(\frac{Z^2m}{M}\right)^2 \left(\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}\right)^2 \text{ eV/s}. \tag{4.38}$$

Pour les électrons ($Z = 1$, $M = m$)

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{e^4 H_\perp^2}{m^2c^3}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 = \\ = -0{,}98\cdot 10^{-3} H_\perp^2 \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 \text{ eV/s} = \\ = -1{,}58\cdot 10^{-15} H_\perp^2 \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right) \text{ erg/s} \tag{4.39}$$

Mettons encore cette équation sous une autre forme

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\beta\mathscr{E}^2, \quad \beta = \frac{2e^4H_\perp^2}{3m^4c^7} = 1{,}95\cdot 10^{-9}\frac{H_\perp^2}{mc^2} \text{ (erg.s)}^{-1} \tag{4.40}$$

D'où

$$\mathscr{E}(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{1+\beta\mathscr{E}_0 t}, \quad \mathscr{E}_0 = \mathscr{E}(0). \tag{4.41}$$

Ainsi, il faut que

$$T_m = \frac{1}{\beta\mathscr{E}_0} = \frac{5.1\cdot 10^8}{H_\perp^2}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}_0}\right) \text{ s} \tag{4.42}$$

pour que l'énergie de l'électron devienne deux fois plus faible. Ensuite, (4.41) rend évident que quelle que soit l'énergie initiale $\mathscr{E}_0$ à l'instant t l'énergie d'un électron ne dépasse pas la valeur

$$\mathscr{E}_{max}(t) = \frac{1}{\beta t} = \frac{5{,}1\cdot 10^8}{H_\perp^2 t} mc^2 = \frac{2{,}8\cdot 10^{14}}{H_\perp^2 t} \text{ eV}, \tag{4.43}$$

où t se mesure en secondes.

Le résultat (4.43), c.-à-d. l'existence pour une charge se déplaçant dans un champ magnétique d'une certaine énergie maximale (limite) $\mathscr{E}_{max}$, est généralisé au cas d'un champ inhomogène (cf. § 76 de [6]). A notre connaissance, pour la première fois la question de l'énergie limite a été discutée sur l'exemple des rayons cosmiques qui atteignent la Terre [32]. Dans ce cas la particule doit franchir

le champ magnétique terrestre $H \sim 0{,}2$ à $0{,}5$ Oe, c.-à-d. parcourir $L \sim R_\delta \sim 10^9$ cm ($R_\delta \approx 6\,360$ km est le rayon de la Terre) en un temps $t \sim R_\delta/c \sim 3 \cdot 10^{-2}$ s. Il en résulte que pour les électrons $\mathscr{E}_{max} \sim 10^{17}$ eV (dans (4.43) on pose que $H_\perp \sim H_0 \sim 0{,}2$ Oe ce qui correspond aux particules qui frappent la région équatoriale; pour atteindre l'équateur magnétique terrestre les calculs de [32] donnent la valeur $\mathscr{E}_{max} = 4 \cdot 10^{17}$ eV).

Les formules (4.38)-(4.43) sont données sous des formes différentes avec des coefficients numériques, du fait qu'elles sont d'un usage très courant, notamment en astrophysique (cf. chapitre 15).

Si une particule se déplaçant dans un champ magnétique homogène et constant perd en un tour (c.-à-d. en une période $T = 2\pi/\omega_H^* = (2\pi Mc/eZ H_0)(\mathscr{E}/Mc^2)$) l'énergie $\Delta\mathscr{E}$ petite devant $\mathscr{E}$, la force de réaction est alors faible par rapport à la force de Lorentz. On en tire la condition (pour $M = m$ et $Z = 1$)

$$\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \ll \sqrt{\frac{m^2c^4H_0}{e^3H_\perp^2}} \sim 10^8 \sqrt{\frac{H_0}{H_\perp^2}} = \frac{10^8}{\sqrt{H_0 \sin^2\chi}}. \qquad (4.44)$$

Comme il fallait s'attendre, cette condition coïncide avec celle obtenue précédemment, tout en la rendant quelque peu plus précise (cf. (4.34) qui envisageait l'inégalité inverse et où l'on adoptait $H_\perp \sim H_0$). Il est fréquent que l'inégalité (4.44) est bien respectée dans l'espace. Ainsi, dans le champ interstellaire $H_0 \sin^2\chi \sim 10^6$ Oe et (4.44) est observée pour les électrons d'énergie $\mathscr{E} \ll 10^{17}$ eV. Mais pour $H_0 \sim 10^4$ Oe (taches solaires, étoiles magnétiques, accélérateurs), la prescription est plus rigoureuse: $\mathscr{E} \ll 10^{12}$ eV; pourtant, dans les cas susmentionnés on ne rencontre pratiquement pas les électrons d'énergie $\mathscr{E} \gg 10^{11}$ eV. Dans les naines blanches magnétiques ($H_0 \sim 10^7 - 10^8$ Oe) et dans les pulsars ($H_0 \sim 10^9 - 10^{13}$ Oe) l'inégalité (4.44) est violée déjà pour les énergies relativement faibles. Par ailleurs, plus les pertes sont grandes, plus il est difficile d'accélérer les particules jusqu'aux hautes énergies et, en général, ces particules sont moins nombreuses. C'est pourquoi la condition d'une faible force de réaction (4.44) n'est pratiquement violée que dans des cas exceptionnels. Assurément, la particule ne se déplace pas alors suivant une trajectoire circulaire ou hélicoïdale, mais suivant une courbe de rayon rapidement décroissant (quelques calculs relatifs à ce cas sont donnés dans [33]). D'autre part, le caractère du rayonnement synchrotron (intensité, composition spectrale, polarisation) ne change pas même si la condition (4.44) est compromise, puisque la partie de la trajectoire responsable du rayonnement avec $\gamma = \mathscr{E}/mc^2 \gg 1$ n'est pas grande et le rayonnement chan-

gerait seulement si les principes de la théorie classique n'étaient pas respectés (cf. (4.33)

$$\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \ll \frac{m^2c^3}{e\hbar H_0} \sim \frac{4\cdot 10^{13}}{H_0}. \qquad (4.45)$$

Nous reviendrons encore à ce qui vient d'être dit pour l'expliquer au chapitre 5. Dans ce qui suit nous admettons toujours que la condition (4.45) est remplie *); nous supposerons aussi pour simplifier que la condition (4.44) est vraie, bien que dans la plupart des cas elle ne s'emploie pas dans les calculs.

L'expression des pertes (4.38) rend clair que dans le champ donné $H_\perp$ et pour la même énergie $\mathscr{E}$, les protons émettent $(M/m)^4 \sim 10^{13}$ fois moins que les électrons. C'est pourquoi les pertes par rayonnement synchrotron (par freinage magnétique) ne jouent généralement aucun rôle pour les protons et les autres noyaux. Mais dans des champs très forts, lorsque les électrons de haute énergie « ne tiennent pas », le rayonnement synchrotron protonique peut s'avérer en principe important. Notons qu'une particule chargée qui se déplace dans un champ magnétique, ou bien, toute particule qui subit une accélération, rayonne non seulement des ondes électromagnétiques mais aussi des quanta de tous les champs avec lesquels elle interagit. Ainsi, pour toutes les particules chargées il existe un rayonnement de freinage magnétique de gravitation. Ensuite, dans un champ magnétique les protons doivent émettre des mésons π^+ et π^0 (processus $p \to n + \pi^+$, $p \to p + \pi^0$, où n est un neutron), ainsi que des positons et des neutrinos (processus $p \to n + e^+ + \nu$, où ν est un neutrino). Toutefois, dans des conditions réelles l'intensité du rayonnemnt synchrotron non électromagnétique est d'habitude négligeable [34], et le rayonnement lui-même ne joue aucun rôle. Il ne faut pas pour autant perdre de vue le rayonnement synchrotron non électromagnétique tant pour son aspect méthodologique que pour des possibilités éventuelles (qu'il ne faut jamais oublier). A propos, si nous appliquons le terme synchrotron ou le terme plus général de freinage magnétique seulement au rayonnement des particules qui se déplacent dans un champ magnétique, dans la littérature on parle de rayonnement synchrotron dans un sens plus large, par exemple, en l'appliquant aux ondes de gravitation, électromagnétiques et autres (disons, aux ondes du champ scalaire)

---

*) Si l'inégalité (4.45) est inobservée, nous retombons sur le domaine quantique et l'étude doit se poursuivre par des méthodes de l'électrodynamique quantique [30]. Comme nous l'avons noté, le domaine quantique est caractérisé par la production des paires électron-positon et, pour les champs ou énergies encore plus forts, par la production de paires de particules d'autres types (mésons, baryons). Assurément, l'intérêt que présente le domaine quantique (champs forts, hautes énergies) est très grand et qui ne cesse de croître par suite de la découverte des pulsars, de l'obtention des champs plus forts dans des laboratoires et la construction de nouveaux accélérateurs.

quand les particules relativistes se déplacent dans un champ de gravitation fort [35, 36]. Dans tous ces cas, le rayonnement possède certains traits communs avec le rayonnement synchrotron électromagnétique ordinaire, mais dans l'ensemble son caractère (intensité comme fonction d'énergie, diagramme polaire, etc.) change sensiblement en fonction du type (sorte) des champs accélérateur et rayonné. En retenant qu'il est impossible d'« englober l'inglobable », nous ne parlerons au chapitre 5 sous une forme explicite que du rayonnement synchrotron des électrons, ou plus en détail, du rayonnement des ondes électromagnétiques émis par les électrons ultra-relativistes, qui se déplacent dans un champ magnétique uniforme et constant.

CHAPITRE 5

RAYONNEMENT SYNCHROTRON

Particularités du rayonnement synchrotron. Certaines applications de la théorie du rayonnement synchrotron dans l'astrophysique. Limites de l'application de la théorie

Le caractère et surtout le spectre du rayonnement synchrotron changent sensiblement en fonction de la relation entre l'angle θ compris entre le vecteur d'onde du rayonnement $\mathbf{k}$ et la vitesse de la particule $\mathbf{v}$, et l'angle χ compris entre $\mathbf{v}$ et le champ magnétique extérieur $\mathbf{H}_0$ (nous limitons ici notre examen au mouvement dans un champ magnétique, bien qu'en fait il s'agisse d'un résultat très général; cf. par exemple, § 77 de [6]). Tout simplement le rayonnement se concentre surtout dans les angles d'ouverture $\theta \sim mc^2/\mathscr{E} \ll 1$ et si l'angle $\chi \lesssim mc^2/\mathscr{E}$, alors, dans la direction donnée $\theta \leqslant mc^2/\mathscr{E}$, le rayonnement « cumulé » provient de la trajectoire tout entière, ou, en tout cas, de sa partie la plus importante. Mais si

$$\chi \gg \xi = \frac{mc^2}{\mathscr{E}}, \quad \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \ll 1, \tag{5.1}$$

le rayonnement synchrotron qui vient à l'observateur n'est émis que par un petit secteur de la trajectoire (pour plus de détails voir plus loin).

Avec

$$\chi \lesssim \xi = \frac{mc^2}{\mathscr{E}}, \quad \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \ll 1 \tag{5.2}$$

le rayonnement est parfaitement analogue à celui d'un oscillateur, étant donné que dans ce cas (cf. (4.22))

$$\left.\begin{aligned} r_H &= \frac{v \sin\chi}{\omega_H^*} \approx \frac{c\chi}{\omega_H^*} \lesssim \frac{c}{\omega_H} = \frac{\lambda_H}{2\pi}, \\ \omega_H &= \frac{eH}{mc}, \quad \omega_H^* = \omega_H \frac{mc^2}{\mathscr{E}}; \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

ici et plus loin nous omettons l'indice zéro de $\mathbf{H}_0$ puisque partout ne figure que le champ extérieur.

Plus précisément, si (cf. (4.10))

$$\chi \ll \frac{mc^2}{\mathscr{E}}, \quad r_H \ll \frac{\lambda_H}{2\pi}, \tag{5.4}$$

le rayonnement s'identifie au rayonnement d'un doublet (oscillateur) de moment $er_H = ec\chi/\omega_H^* = \mathcal{E}\chi/H \ll mc^2/H$, animé d'un mouvement rapide.

Nous n'allons pas pousser plus loin l'étude de ce cas déjà examiné qualitativement au chapitre 4 (pour plus de détails, cf. pp. 275-277 de [6] ainsi que [37]).

Pour ce qui est du rayonnement qui satisfait à l'équation (5.1), il serait raisonnable d'aborder l'étude par le cas particulier important du mouvement circulaire, lorsque $\chi = \frac{\pi}{2}$.

C'est le cas où le rayonnement tout entier se concentre au voisinage du plan de l'orbite limité par les angles $\theta \lesssim mc^2/\mathcal{E}$. A grande

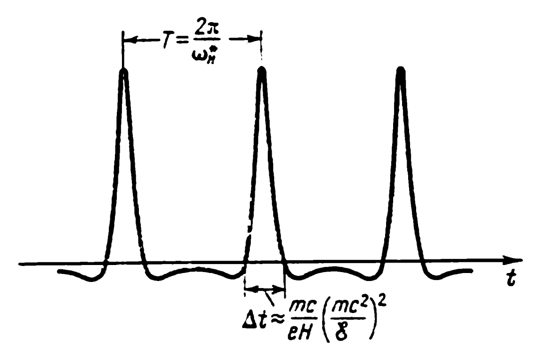


Fig. 5.1. Relation entre le champ électrique dans la zone d'onde et le temps pour une particule animée d'un mouvement circulaire dans un champ magnétique

Cette courbe s'obtient si l'on fait tourner le champ d'un doublet en mouvement rapide à une vitesse angulaire ω_H^* (cf. fig. 4.4)

distance de l'orbite un « observateur » (admettons qu'il se trouve dans le plan de l'orbite ou dans son voisinage limité par les angles $\theta \lesssim mc^2/\mathcal{E}$) enregistrera les impulsions de rayonnement qui se suivent à des intervalles de temps égaux à la période de révolution de la charge

$$T = \frac{2\pi}{\omega_H^*} = \frac{2\pi mc}{eH}\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right). \tag{5.5}$$

La forme des impulsions du rayonnement (fig. 5.1) est facile à établir si on considère le champ électrique d'un oscillateur doublet animé d'un mouvement rapide (cf. fig. 4.4) et qui tourne par rapport à l'observateur sous l'effet de la rotation de la particule dans un champ magnétique (le vecteur d'accélération associé à l'axe du

doublet est perpendiculaire au champ **H** et tourne autour de ce champ à la fréquence ω_H^*). La durée de chaque impulsion

$$\Delta t \sim \frac{r_H \xi}{c} \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 \approx \frac{mc}{eH} \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2, \qquad (5.6)$$

où $r_H = v/\omega_H^* \approx \mathscr{E}/eH$ est le rayon de courbure de la trajectoire de la particule, alors que l'apparition du facteur $(mc^2/\mathscr{E})^2$ est due à l'effet Doppler. En effet, dans les limites de l'angle $\xi = mc^2/\mathscr{E}$ un électron se déplace vers l'observateur pendant le temps $\Delta t' \sim \sim r_H \xi/c \approx mc/eH$. Pendant ce même temps le parcours de l'électron est $v\Delta t'$ et l'impulsion qu'il émet se comprime aussi de ce fait à la grandeur $v\Delta t'$ (c'est en cela précisément que consiste l'effet Doppler). Il en résulte que la longueur de l'impulsion est d'ordre $(c - v)\,\Delta t'$, et sa durée

$$\Delta t = \Delta t' \left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx 2\,\Delta t' \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2,$$

ce qui est équivalent à (5.6).

Le spectre du rayonnement qui a la forme des impulsions se répétant à des intervalles de temps $T = 2\pi/\omega_H^*$ se composera évidemment d'harmoniques de fréquence ω_H^*. En fait, puisque $T \gg \Delta t$ dans le domaine des harmoniques élevés on peut admettre que le spectre est continu, le maximum du spectre étant associé à la fréquence

$$\omega_m \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \frac{eH}{mc} \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2. \qquad (5.7)$$

Ce qui importe ici c'est que le champ de rayonnement change de signe (cf. fig. 5.1). C'est pour cette raison précisément que le spectre possède un maximum (cf. plus loin). La largeur effective du spectre de rayonnement est également de l'ordre de ω_m ; la densité spectrale moyenne du rayonnement synchrotron peut donc être évaluée en divisant par ω_m sa puissance totale $\mathscr{P} = \mathscr{R} = (2e^4H^2/3m^2c^3)\,(\mathscr{E}/mc^2)^2$ (cf. formule (4.39)) *). Il en résulte

$$\bar{p} \sim \frac{\mathscr{P}(\mathscr{E})}{\omega_m} \sim \frac{e^3H}{mc^2}. \qquad (5.8)$$

L'une des particularités caractéristiques du rayonnement synchrotron et, en général, du rayonnement de freinage magnétique est sa polarisation. La direction privilégiée du vecteur électrique des ondes rayonnées repose dans le même plan que la direction de l'accélération et le rayon de vision (vecteur **k**). Etant donné que l'accélération d'une particule se déplaçant dans un champ magnétique change tout le temps de direction, les ondes sont, en général, polarisées

*) Dans un mouvement circulaire (et en général lorsque l'ensemble de l'émetteur ne s'approche pas de la source éloignée) la puissance de rayonnement $\mathscr{P}$ et les pertes par rayonnement $\mathscr{R}$ sont égales entre elles (cf. chapitre 3 et les notes ci-dessous).

elliptiquement. En effet, si un oscillateur (cf. fig. (4.4)) se déplace vers l'observateur, la polarisation du rayonnement qui se propage dans le sens de la vitesse de translation ne change pas. Il est donc clair que le rayonnement de freinage magnétique d'un électron isolé est, dans le cas général, polarisé suivant une ellipse, le champ électrique **E** dans l'onde étant maximal dans le plan contenant la direction de l'accélération. Cela signifie que la direction privilégiée du champ **E** de l'onde est perpendiculaire à la projection du champ magnétique sur le tableau (il est d'usage d'entendre par tableau le plan perpendiculaire au rayon visuel).

Examinons maintenant le rayonnement qui apparaît lors du mouvement hélicoïdal (mais en observant la condition (5.1)). La situation relative à chaque impulsion isolée est dans ce cas la même que pour un mouvement circulaire, mais le champ H est remplacé par sa composante $H_{\perp} = H \sin \chi$ perpendiculaire à la vitesse. En effet, maintenant la durée de l'impulsion est

$$\Delta t \sim \frac{r_H^* \xi}{c} \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 \approx \frac{mc}{eH_{\perp}} \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2, \quad (5.9)$$

où $r_H^* = v/\omega_H^* \sin \chi \approx \mathscr{E}/eH_{\perp}$ est le rayon de courbure de la trajectoire spatiale de la particule (cf. (4.23)). (5.9) rend compte du déplacement de l'électron dans le sens de l'observateur dans l'angle d'ouverture $\xi = mc^2/\mathscr{E}$ pendant le temps $\Delta t' \sim r_H^* \xi/c \approx mc/eH_{\perp}$; quant au passage de $\Delta t'$ à Δt, il se fait de même que pour le mouvement circulaire.

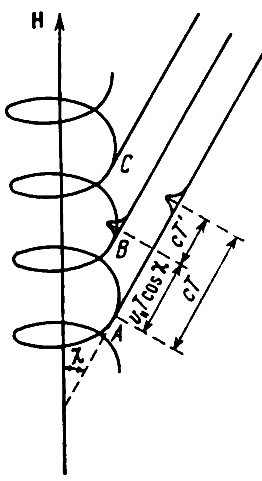


Fig. 5.2. Rayonnement dans un mouvement hélicoïdal
Le temps T' entre les impulsions se distingue de la période $T = (2\pi mc/eH)(\mathscr{E}/mc^2)$ en vertu de l'effet Doppler

Par ailleurs, si dans le mouvement circulaire les impulsions se suivent avec une période T (cf. (5.5)), dans le mouvement hélicoïdal l'intervalle entre les impulsions est T' qui diffère de T par suite de l'effet Doppler.

Le calcul de T' est élémentaire si l'on recourt à la figure 5.2. Les sauts de rayonnement parviennent à l'observateur choisi lorsque l'électron se trouve aux points A, B, C, . . . (là et dans ce qui suit nous admettons pour simplifier que le rayonnement est strictement « needle stralung » (« en aiguille »). Autrement dit, ce sont précisément les points où l'électron se trouve « en regard » de l'observateur. L'intervalle de temps entre les instants du passage de l'électron de A en B est égal, évidemment à la période $T = 2\pi/\omega_H^*$. La distance

entre A et B est $v_{\parallel} T = vT \cos \chi$ (χ est l'angle entre **v** et **H**), et la distance parcourue pendant ce temps par l'impulsion émise en A est cT. La figure 5.2 montre qu'en se déplaçant vers l'observateur, l'impulsion émise en B retardera par rapport à la première impulsion d'un temps

$$T' = T\left(1 - \frac{v_{\parallel} \cos \chi}{c}\right) = T\left(1 - \frac{v \cos^2 \chi}{c}\right) \approx T \sin^2 \chi = \qquad 192$$

$$= \frac{2\pi}{\omega_H^*} \sin^2 \chi, \qquad (5.10)$$

où en passant à l'avant-dernière expression on tient compte que le calcul se fait pour le cas limite $v \to c$. Rappelons encore une fois que la représentation imagée d'un rayonnement qui parvient jusqu'à l'observateur sous la forme d'une impulsion isolée ne convient que pour $\chi \gg \xi = mc^2/\mathscr{E}$. Toutefois, l'expression du type $T' = T(1 - v_{\parallel} \cos \chi/c)$ est de caractère général et son application ne résulte pas obligatoirement de l'hypothèse du « needle stralung » et de sa division éventuelle en impulsions discrètes (pour plus de détails, cf. [31]).

Ainsi, dans la zone d'onde le spectre du rayonnement d'un électron ultra-relativiste se compose des harmoniques de fréquence

$$\Omega_H = \frac{2\pi}{T'} = \frac{\omega'_H}{\sin^2 \chi}. \qquad (5.11)$$

Cette circonstance n'est pas très importante par elle-même si l'on songe que dans les cas qui nous intéressent, les harmoniques ne se résolvent pas et il faut envisager le spectre continu. Pourtant, la variation de l'intervalle entre les impulsions intervient non seulement sur le spectre mais aussi sur toutes les caractéristiques du champ de rayonnement, et notamment, sur son intensité enregistrée au point d'observation. En effet, supposons comme le montrent (4.37) et (4.39) qu'un électron perd à chaque tour (en un temps $T = 2\pi/\omega_H^*$) par rayonnement, l'énergie $\Delta\mathscr{E} = \mathscr{R}T$, où $\mathscr{R} = (2e^4 H_{\perp}^2/3m^2c^3)(\mathscr{E}/mc^2)^2$. Aussi est-il évident d'après ce qui vient d'être dit que cette énergie parviendra aux « observateurs » portés par une certaine sphère fixe à une distance R de l'électron en un temps T', et par conséquent, la puissance moyenne observée du rayonnement (flux total de l'énergie) vaut :

$$\mathscr{P} = \frac{\Delta\mathscr{E}}{T'} = \frac{\mathscr{R}.T}{T'} = \frac{\mathscr{R}}{\sin^2 \chi}. \qquad (5.12)$$

A première vue il semble que nous sommes ici en présence d'une contradiction à la loi de la conservation d'énergie. L'électron perd par unité de temps l'énergie $\mathscr{R}$. Toute cette énergie qui se transforme en rayonnement devrait être égale au flux de rayonnement total passant par la sphère considérée. C'est justement ainsi qu'on procède

souvent en calculant les pertes par rayonnement subies par la particule, pour les égaler au flux total du rayonnement. Dans le cas stationnaire et pour un émetteur de centre de gravité fixe on peut en effet procéder de cette façon. Mais en général, comme nous l'avons rappelé au chapitre 3, le travail fourni par un émetteur par unité de temps (puissance des pertes $\mathcal{R}$) est égal au flux total traversant une surface plus la variation de l'énergie du champ $\frac{d}{dt}\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}dV$ dans le volume enveloppé par cette surface. Dans le cas qui nous intéresse, la région de l'espace occupé par le rayonnement, entre l'électron en mouvement et la surface observée fixée dans l'espace, ne cesse de diminuer. L'énergie que contient cette région diminue elle aussi, et c'est pourquoi la puissance $\mathcal{P}$ du rayonnement incident est plus grande que la puissance des pertes $\mathcal{R}$. Or, dans plusieurs ouvrages, pour passer aux grandeurs spectrales, on calcule l'intensité en utilisant la puissance des pertes $\mathcal{R}$. Une telle approche ne conduit pas, certes, si l'on tient compte du déplacement de l'émetteur, aux expressions correctes de l'intensité du rayonnement enregistrée à une surface fixe. Par ailleurs, si les particules émettrices se trouvent dans un volume fixé (par exemple, dans l'enveloppe d'une supernova) ou, plus précisément, si la fonction de distribution des particules émettrices ne change pas dans le temps, l'intensité du rayonnement de l'ensemble des particules coïncide avec la puissance spectrale des pertes. Cette conclusion résulte directement de la loi de conservation de l'énergie et est confirmée par le calcul immédiat (cf. [31] et plus loin).

Le fait que cette question parfaitement élémentaire quant au fond n'est pas définitivement tranchée depuis si longtemps et a conduit à l'utilisation des formules incorrectes *) ou pas tout à fait correctes, nous autorise à donner un exposé aussi détaillé et à reprendre à plus d'une reprise les remarques correspondantes.

Les considérations et les formules susmentionnées rendent parfaitement claire la situation qualitative et permettent d'évaluer les caractéristiques du rayonnement synchrotron (intensité, spectre, polarisation) pour des cas concrets. Les formules quantitatives, elles, s'obtiennent, au contraire, par des calculs assez lourds. Ces calculs se font sur la base des formules bien connues des potentiels retardés, et on peut les trouver, par exemple, dans [31] (pour le mouvement circulaire, c.-à-d. pour $\sin\chi = 1$, plusieurs calculs sont décrits au § 74 de [6]) **). C'est pourquoi dans ce qui suit nous ne

*) Ce qui vient d'être dit se rapporte en particulier, à quelques formules données dans [38, 39]. Heureusement, ces formules n'étaient appliquées qu'aux cas (ou dans les conditions) où les différences correspondantes entre les expressions de l'intensité pouvaient être négligées (cf. [31] et plus loin).

) Il faut retenir la différence dans les notations. Ainsi, dans [31], l'angle entre **v et **H** est θ et nous le désignerons par χ (dans notre cours θ est l'angle entre **v** et **k**).

donnerons que quelques résultats définitifs et examinerons leur application à l'astrophysique. En vue de telles applications, nous nous écarterons quelque peu de la forme de l'exposé adopté dans l'ensemble de notre cours. Plus précisément, conformément à [38, 39], nous donnerons un assez grand nombre de formules auxiliaires ou commodes pour le calcul. Bien entendu, les lecteurs qui ne s'intéressent pas à l'application de la théorie du rayonnement synchrotron peuvent omettre ces détails. Ainsi, le texte qui suit jusqu'à la formule (5.66) y compris est d'un caractère auxiliaire.

La période du champ du rayonnement synchrotron étant T', ce champ peut être développé en série de Fourier suivant les harmoniques de fréquence $\Omega_H = 2\pi/T' = \omega_H^*/\sin^2\chi$. Autrement dit, à une grande distance R de la charge le champ de rayonnement peut s'écrire

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{E} = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n \exp\left[i\omega_n\left(\frac{R}{c} - t\right)\right], \\ &\omega_n = n\Omega_H = n\frac{\omega_H^*}{\sin^2\chi}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Dans le cas ultra-relativiste considéré, aux termes d'ordre $\xi^3 = (mc^2/\mathscr{E})^3$ près, on a pour un électron

$$\mathbf{E}_n = \frac{2e\omega_H^*}{\sqrt{3}\,\pi cR}\frac{n}{\sin^5\chi}\{(\xi^2+\psi^2)K_{2/3}(g_n)\mathbf{l}_1 + \\ + i\psi(\xi^2+\psi^2)^{1/2}K_{1/3}(g_n)\mathbf{l}_2\}, \tag{5.14}$$

$$\psi \ll 1, \quad \xi = \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \ll 1,$$

où $\psi = \chi - \alpha$ est la différence des angles entre $\mathbf{v}$ et $\mathbf{H}$ d'une part et entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{H}$ de l'autre; l'angle ψ est, évidemment, la distance angulaire entre les génératrices du cône décrit par le vecteur $\mathbf{v}$ et la direction du vecteur d'onde $\mathbf{k}$ (si les vecteurs $\mathbf{v}$, $\mathbf{k}$ et $\mathbf{H}$ appartiennent au même plan, comme c'est le cas à l'instant correspondant, l'angle ψ est égal en valeur absolue à l'angle θ). Dans (5.14), e est la grandeur absolue de la charge (charge d'un électron) et par définition, $\omega_H^* > 0$. Pour une particule chargée positive (positon), d'après (5.14) l'amplitude du champ est conjuguée complexe par rapport à $\mathbf{E}_n$, ce qui correspond à la direction de rotation opposée du vecteur électrique. Ensuite, $\mathbf{l}_1$ et $\mathbf{l}_2$ de (5.14) sont deux vecteurs unités réciproquement orthogonaux dans le tableau; $\mathbf{l}_2$ est dirigé suivant $\mathbf{H}_\perp$, et $\mathbf{l}_1 = [\mathbf{l}_2\mathbf{k}]/k$ (fig. 5.3). Enfin, $K_{1/3}(g_n)$ et $K_{2/3}(g_n)$ sont les fonctions de Bessel de second ordre de l'argument imaginaire g_n (fonctions de Macdonald; cf., par exemple, §§ 8.4, 8.5 de [40])

$$g_n = \frac{n}{3\sin^3\chi}(\xi^2+\psi^2)^{3/2} = \frac{\nu}{2\nu_c}\left(1+\frac{\psi^2}{\xi^2}\right)^{3/2}. \tag{5.15}$$

Dans la deuxième égalité (5.15) nous avons remplacé le rang de l'harmonique par la fréquence $\nu = \omega/2\pi = n\omega_H^*/2\pi \sin^2 \chi$ et introduit la notation

$$\nu_c = \frac{3\omega_H^* \sin \chi}{4\pi \zeta^3} = \frac{3eH_\perp}{4\pi mc}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2. \qquad (5.16)$$

La présence dans l'expression (5.14) de l'unité imaginaire devant le deuxième terme de l'accolade correspond à la polarisation elliptique du rayonnement. L'un des axes de l'ellipse des oscillations du

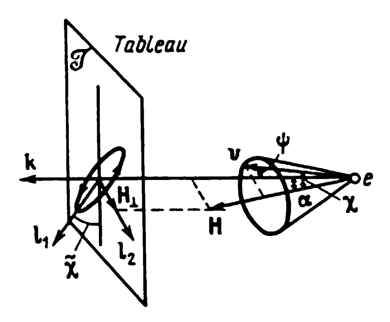


Fig. 5.3. Ellipse d'oscillations du vecteur électrique de l'onde émise par une particule se déplaçant dans un champ magnétique

On admet que la charge est négative (un électron) ; la rotation d'une particule à charge positive (positon) se fait dans le sens opposé. $\mathscr{T}$ — tableau (plan perpendiculaire à la direction du rayonnement, ou, ce qui revient au même, à la direction d'observation); l_1 et l_2, deux vecteurs unités orthogonaux dans le tableau ; l_2 est dirigé suivant $H_\perp$ qui est la projection du champ magnétique sur le tableau

vecteur électrique est dirigé le long de $H_\perp$ et l'autre (le grand) lui est perpendiculaire. Le rapport des axes que nous noterons tg β est égal en vertu de (5.14) à

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\psi K_{1/3}(g_n)}{(\xi^2+\psi^2)^{1/2} K_{2/3}(g_n)}. \qquad (5.17)$$

Avec $\psi > 0$, la rotation a lieu à gauche (pour un observateur, dans le sens inverse à celui des aiguilles d'une montre) et avec $\psi < 0$, elle a lieu à droite; de plus, on considère que l'angle ψ est positif si $\chi > \alpha$, c.-à-d. si le vecteur **k** est à l'intérieur du cône des vitesses (cf. fig. 5.3).

La polarisation dégénère en polarisation linéaire seulement si $\psi = 0$, c.-à-d. si le vecteur d'onde repose strictement à la surface du cône des vitesses. Pour de grands ψ, la polarisation tend vers une polarisation circulaire, puisque pour de grandes valeurs de l'argument $K_{2/3}(x) \approx K_{1/3}(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/3} e^{-x}$; mais dans ces conditions, l'intensité du rayonnement devient négligeable (cf. ci-dessous fig. 5.4).

Le champ du rayonnement peut être caractérisé par le « tenseur polarisation du rayonnement » qui vaut par définition

$$\tilde{p}_{\alpha\beta}'(n) = \frac{c}{8\pi} E_{n,\,\alpha} E^*_{n,\,\beta}, \tag{5.18}$$

où $\alpha, \beta = 1, 2$ et $E_{n/\alpha}$ sont les composantes du vecteur électrique figurant dans (5.13), (5.14); de plus, la moyenne de la densité du flux d'énergie (du vecteur de Poynting) de la n-ième harmonique est par période

$$\tilde{p}_n = \mathrm{Sp}\, p_{\alpha\beta}(n) \equiv \tilde{p}_{11} + \tilde{p}_{22} = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}_n|^2. \tag{5.19}$$

Dans le domaine des harmoniques élevées, le spectre du rayonnement est pratiquement continu, $\nu = \omega/2\pi = n\omega^*_H/2\pi \sin^2\chi$, et au lieu de $\tilde{p}_n$ il est commode d'introduire la « densité spectrale du tenseur polarisation »

$$\tilde{p}_{\alpha\beta}(\nu) = \tilde{p}_{\alpha\beta}(n) \frac{dn}{d\nu} = \frac{2\pi \sin^2\chi}{\omega^*_H} \tilde{p}_{\alpha\beta}(n). \tag{5.20}$$

Pour le champ d'un électron ultra-relativiste introduisons les fonctions (ici $g_\nu = g_n$; cf. (5.15)):

$$\tilde{p}^{(1)}_\nu \equiv \tilde{p}_{11}(\nu) = \frac{3e^2\omega^*_H}{4\pi^2 R^2 c \xi^2 \sin^2\chi} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2 \left(1 + \frac{\psi^2}{\xi^2}\right)^2 K^2_{2/3}(g_\nu), \tag{5.21}$$

$$\tilde{p}^{(2)}_\nu \equiv \tilde{p}_{22}(\nu) = \frac{3e^2\omega^*_H}{4\pi^2 R^2 c \xi^2 \sin^2\chi} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2 \left(\frac{\psi^2}{\xi^2}\right) \left(1 + \frac{\psi^2}{\xi^2}\right) K^2_{1/3}(g_\nu), \tag{5.22}$$

$$\tilde{p}_{12}(\nu) = \tilde{p}_{21}(\nu) = -i \frac{3e^2\omega^*_H}{4\pi^2 R^2 c \xi^2 \sin^2\chi} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2 \times$$
$$\times \left(1 + \frac{\psi^2}{\xi^2}\right)^{3/2} \left(\frac{\psi}{\xi}\right) K_{1/3}(g_\nu) K_{2/3}(g_\nu). \tag{5.23}$$

Il est évident que $p^{(1)}_\nu\, d\nu$ est le flux de rayonnement dans l'intervalle des fréquences $d\nu$, le vecteur électrique de l'onde étant dirigé suivant $\mathbf{l}_1$; d'une façon analogue, la direction 2 est définie par le vecteur $\mathbf{l}_2$. Pour les deux polarisations, la densité spectrale du flux est $\tilde{p}_\nu = \tilde{p}^{(1)}_\nu + \tilde{p}^{(2)}_\nu$.

Si on applique les expressions (5.21) et (5.22) pour calculer le flux total de l'énergie rayonnée à travers la surface fixée, c.-à-d. pour calculer l'intégrale de la densité du flux dans toutes les fréquences et directions, alors en accord avec (5.12) il s'avère égal à $\mathcal{P} = \mathcal{R}/\sin^2\chi$, où $\mathcal{R}$ est la perte d'énergie par un électron ultra-relativiste due au rayonnement synchrotron (cf. (4.37), (4.39)); pour la commodité nous donnons encore une fois l'expression de $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2e^4 H^2_\perp}{3m^2c^3} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2 = 2/3 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right) c H^2_\perp \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2. \tag{5.24}$$

Nous avons déjà souligné que la différence entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est définie par la stationnarité (pour $\chi = 1/2\pi$) du champ de rayonnement dont la moyenne est établie pour la période de rotation de l'électron. En effet, dans un mouvement hélicoïdal, l'électron s'approche de l'observateur, et ce n'est que pour $\chi = 1/2\pi$ (mouvement circulaire) que le centre de son orbite reste fixe. En vertu de la loi de conservation de l'énergie, le flux total d'énergie qui traverse une surface fixée σ vaut

$$\mathcal{P} = \int_{\sigma} \tilde{p}_{\nu} d\nu \, d\sigma = \mathcal{R} - \frac{d}{dt} \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV. \tag{5.25}$$

Lorsque l'électron s'approche de l'« observateur » (c.-à-d. de la surface σ), l'énergie du champ localisé entre la source et la surface σ change, ce qui explique la différence entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$.

Dans la plupart des applications du rayonnement synchrotron (rayonnement de freinage magnétique) on a en premier lieu, affaire non pas aux particules isolées mais à leur ensemble. Puis, dans les cas habituels, cet ensemble est stationnaire, ou, en tout cas, il change très lentement dans son intégralité. Ainsi, s'il s'agit des électrons relativistes des enveloppes des supernova ou d'autres nébuleuses, on peut admettre que pendant le temps nécessaire aux ondes électromagnétiques pour franchir la longueur de la région émettrice dans le sens du rayon visuel, cette longueur ne change pas. Autrement dit, la vitesse de l'enveloppe (frontière de la nébuleuse, etc.) dans le sens du rayon visuel V_r est petite devant la vitesse de la lumière. En négligeant les termes d'ordre V_r/c, on peut admettre que le volume de l'enveloppe est constant et la loi de conservation de l'énergie rend clair que, comme nous l'avons déjà dit, en moyenne, pour l'ensemble des particules rayonnantes de l'enveloppe, $\mathcal{P} = \mathcal{R}$ (cf. (5.25)). Bien entendu, le calcul détaillé confirme cette conclusion [31]. Si on en tient compte pour les sources stationnaires au lieu des quantités $\tilde{p}_{\nu}^{(1)}$ et $\tilde{p}_{\nu}^{(2)}$ on peut employer les quantités suivantes:

$$p_{\nu}^{(1)} = \tilde{p}_{\nu}^{(1)} \sin^2 \chi = \frac{3}{4\pi^2 R^2} \frac{e^3 H}{mc^2 \xi} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2 \left(1 + \frac{\psi^2}{\xi^2}\right)^2 K_{2/3}^2 (g_{\nu}), \tag{5.26}$$

$$p_{\nu}^{(2)} = \tilde{p}_{\nu}^{(2)} \sin^2 \chi = \frac{3}{4\pi^2 R^2} \frac{e^3 H}{mc^2 \xi} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2 \left(\frac{\psi^2}{\xi^2}\right) \left(1 + \frac{\psi^2}{\xi^2}\right) K_{1/3}^2 (g_{\nu}), \tag{5.27}$$

où, comme auparavant,

$$g_{\nu} = \frac{\nu}{2\nu_c} \left(1 + \frac{\psi^2}{\xi^2}\right)^{3/2}, \quad \nu_c = \frac{3eH_{\perp}}{4\pi mc} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2. \tag{5.15a}$$

La distribution angulaire des flux de rayonnement $p_\nu^{(1)}$ et $p_\nu^{(2)}$ est matérialisée par la figure 5.4. Pour unité d'échelle suivant l'axe vertical on a choisi le coefficient $\{3e^3H/(4\pi^2R^2mc^2\xi)\}$ $(\nu/\nu_c)^2$ des expressions (5.26) et (5.27). Les courbes sont construites pour $\nu/\nu_c =$ $= 0{,}29$, ce qui correspond, comme nous le verrons plus loin, au maximum du spectre fréquentiel global (dans toutes les directions) du rayonnement de l'électron. La figure 5.4 montre que pour les petits ψ, l'apport principal au rayonnement est dû aux oscillations à champ électrique dirigé transversalement à la projection $\mathbf{H}_\perp$ sur le tableau, c.-à-d. que dans ce domaine $p_\nu^{(1)} \gg p_\nu^{(2)}$.

Ce qui vient d'être dit rend clair que pour les sources de rayonnement synchrotron qui se déplacent à une vitesse relativiste, il faut s'appuyer non pas sur les expressions (5.26), (5.27) mais sur les

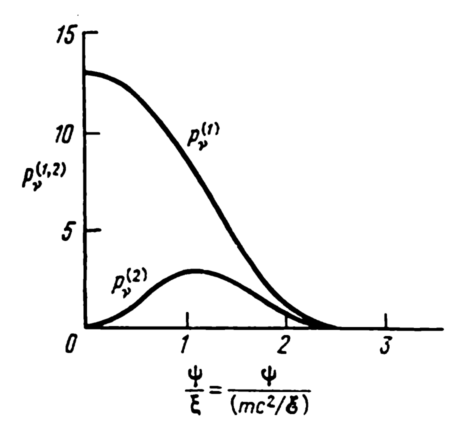


Fig. 5.4. Distribution angulaire du rayonnement synchrotron d'un électron isolé à deux directions de polarisation principales

$p_\nu^{(1)}$ est le flux de polarisation transversale par rapport à la projection du champ sur le tableau et $p_\nu^{(2)}$, le flux suivant cette projection pour $\nu/\nu_c = 0{,}29$. Pour unité d'échelle de l'axe vertical on a pris le coefficient $\frac{3e_1H}{4\pi^2R^2mc^2\,\xi}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2$ des expressions (5.26) et (5.27). L'angle $\psi = 0$ correspond à la direction de la vitesse instantanée de l'électron

formules (5.21)-(5.23). Dans ces conditions, si la source dans son intégralité se déplace à la vitesse V_r dans le sens du rayon visuel vers l'« observateur », l'intensité du rayonnement devient $(1 - V_r/c)^{-1}$ fois plus grande que dans le cas d'une source fixe de même fonction de distribution des électrons (cf. [31]). Ces dernières années on a établi que dans les conditions cosmiques les sources de rayonnement synchrotron peuvent avoir des vitesses relativistes. Ainsi, les explosions des noyaux galactiques qui engendrent les radiogalaxies, produisent des « radionuages » émetteurs qui se déplaçent parfois à des

vitesses comparables à celle de la lumière. Il se peut que d'autres objets, en premier lieu les quasars, possèdent également des enveloppes, des jets et des éjections qui se déplacent à des vitesses relativistes. Ainsi les sources de rayonnement synchrotron stationnaires ne sont certes pas seules à présenter de l'intérêt, il y a aussi les sources de rayonnement synchrotron non stationnaires (relativistes) et en général, de rayonnement de freinage magnétique [31, 41-43]. Toutefois, dans ce qui suit nous n'envisagerons que les sources stationnaires (plutôt quasi stationnaires) telles que dans le domaine (5.1) elles rendent applicables les formules (5.26), (5.27).

Avant d'aller plus loin, considérons les grandeurs qui caractérisent le rayonnement, puisque d'habitude cette question n'est pas traitée par les cours d'électrodynamique.

En plus de la dépendance fréquentielle, un flux de rayonnement arbitraire est caractérisé en général par quatre paramètres indépendants, par exemple, par la position du grand axe de l'ellipse de polarisation, les intensités dans deux directions principales et la direction de rotation du vecteur électrique. Il est pourtant plus commode d'utiliser dans ce but les paramètres de Stokes (cf., par exemple, [38, 44-47]). Pour le rayonnement d'une particule isolée, ces paramètres (I_e, Q_e, U_e et V_e) s'expriment par les densités du flux de rayonnement à deux directions principales de polarisation $p_\nu^{(1)}$ et $p_\nu^{(2)}$, ainsi que par tg β qui est le rapport entre le petit et le grand axes de l'ellipse des oscillations du vecteur électrique (cf. (5.17)) et par l'angle χ entre une direction arbitraire fixée dans le tableau et le grand axe de cette ellipse (c.-à-d. la direction perpendiculaire à la projection de **H** sur le tableau *). Voici les expressions correspondantes:

$$\left.\begin{aligned} I_e &= p_\nu^{(1)} + p_\nu^{(2)}, \\ Q_e &= (p_\nu^{(1)} - p_\nu^{(2)}) \cos 2\tilde{\chi}, \\ U_e &= (p_\nu^{(1)} - p_\nu^{(2)}) \sin 2\tilde{\chi}, \\ V_e &= (p_\nu^{(1)} - p_\nu^{(2)}) \operatorname{tg} 2\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (5.28)$$

La dimension des paramètres de Stokes (5.28) ainsi que de $p_\nu^{(1)}$ et $p_\nu^{(2)}$ est celle de la densité du flux d'énergie dans un intervalle unité de fréquences; l'indice e signifie que ces paramètres concernent un seul électron.

---

*) L'angle $\tilde{\chi}$ qui se lit dans le sens des aiguilles d'une montre est évidemment défini dans l'intervalle $0 \leqslant \tilde{\chi} < \pi$. Nous avons introduit ici la notation $\tilde{\chi}$ pour ne pas confondre l'angle $\tilde{\chi}$ avec l'angle χ entre **v** et **H**.

Les paramètres de Stokes présentent deux avantages importants: ce sont des quantités immédiatement mesurables et additives pour les flux de rayonnement indépendants (incohérents), c.-à-d. les flux aux phases aléatoires pour lesquelles on prend la moyenne [38]. Les paramètres de Stokes peuvent être déterminés expérimentalement par les méthodes ordinaires de l'étude du rayonnement polarisé [47], plus précisément en introduisant le déphasage ε entre l'une des projections du vecteur électrique des oscillations de l'onde (par exemple, sur la direction s_1 de la fig. 5.5) et l'autre, qui est la projection sur la direction perpendiculaire (s_2 de la figure 5.5). L'analyse ultérieure se ramène à établir la relation entre l'intensité du rayonnement résultant et la position de l'analyseur qui dégage la projection des oscillations sur une certaine direction arbitraire s (cf. fig. 5.5). Si dans le tableau l'angle entre les directions s_1 et s est noté δ, l'intensité du rayonnement, à la sortie de l'analyseur, sera la fonction suivante de ε et δ (cf., par exemple, [46]):

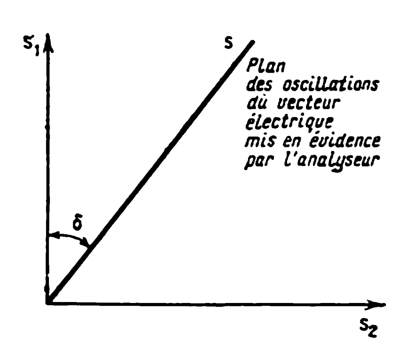


Fig. 5.5. Définition des paramètres de Stokes

Dans la direction s_2, on introduit un retard en phase supplémentaire ε par rapport aux oscillations dans la direction perpendiculaire s_1. L'angle δ détermine la position du plan de l'analyseur. Le flux de rayonnement mesuré est dirigé vers le lecteur

$$I_e(\varepsilon, \delta) = {}^1/_2 \{I_e + Q_e \cos 2\delta + (U_e \cos \varepsilon - V_e \sin \varepsilon) \sin 2\delta\}. \quad (5.29)$$

En choisissant convenablement le retard en phase ε et la position δ de l'analyseur on peut mesurer la valeur de tous les paramètres de Stokes.

Notons que le premier paramètre de Stokes I_e détermine la densité totale du flux de rayonnement (ou l'intensité, dans le cas des sources à répartition spatiale; cf. plus loin), alors que le degré de polarisation du rayonnement et l'angle χ s'expriment comme

$$\Pi = \frac{\sqrt{Q_e^2 + U_e^2 + V_e^2}}{I_e} \quad (5.30)$$

et

$$\operatorname{tg} 2\tilde{\chi} = \frac{U_e}{Q_e}. \quad (5.31)$$

Des deux valeurs de l'angle $\tilde{\chi}$ ($0 \leqslant \tilde{\chi} < \pi$) définies par l'équation (5.31) on choisit celle qui appartient au premier quadrant, si

$U_e > 0$, et au deuxième, si $U_e < 0$. Par définition, l'angle $\tilde{\chi}$ caractérise la direction dans le tableau dans laquelle l'intensité de la composante polarisée est maximale; cet angle se lit dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de la direction retenue (dans le cas considéré, de la direction s_1). En l'absence de polarisation elliptique et circulaire, $V_e = 0$ et

$$\Pi = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Examinons maintenant le rayonnement d'un système de particules. Soient $N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\tau})\, d\mathscr{E}\, dV\, d\Omega_\tau$ le nombre de particules dans l'élément de volume $dV = R^2\, dR\, d\Omega$, dont les énergies sont délimitées par l'intervalle $\mathscr{E}$, $\mathscr{E} + d\mathscr{E}$, et les vitesses, par l'ouverture de l'angle solide $d\Omega$ au voisinage de la direction $\boldsymbol{\tau}$. Le rayonnement des électrons isolés étant incohérent et les paramètres de Stokes dans notre cas étant additifs, l'intensité du rayonnement du système dans la direction $\mathbf{k}$ de l'observation *) est

$$I_\nu \equiv I(\nu, \mathbf{k}) = \int I_e(\nu, \mathscr{E}, \mathbf{R}, \chi, \psi)\, N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\tau})\, d\mathscr{E}\, d\Omega_\tau R^2\, dR. \qquad (5.32)$$

Ici $I_e(\nu, \mathscr{E}, \mathbf{R}, \chi, \psi)$ est défini par la première des expressions (5.28), et l'intégration sur dR se fait suivant le rayon visuel dans la direction $\mathbf{k}$. D'une façon analogue on exprime les autres paramètres de Stokes.

Soulignons qu'à la différence des paramètres de Stokes du rayonnement d'un électron isolé (5.28), dont la dimension est celle de la densité spectrale d'un flux d'énergie du rayonnement, l'expression (5.32) détermine l'intensité du rayonnement, c.-à-d. le flux d'énergie passant à travers l'unité de surface perpendiculaire à la direction de l'observation, rapporté à l'unité d'angle solide et l'unité d'intervalles de fréquence. En radioastronomie, l'intensité du rayonnement se mesure en unité $W \cdot m^{-2} \cdot Hz^{-1} \cdot \text{stérad}^{-1} = 10^{-3}$ erg $cm^{-2}s^{-1} \cdot Hz^{-1}sr^{-1}$. Comme unité de flux on utilise souvent l'« unité de flux » = 1 jansky $= 10^{-26}\, W \cdot m^{-2} \cdot Hz^{-1} = 10^{-23}\, erg \cdot cm^{-2}s^{-1}Hz^{-1}$.

Si les dimensions angulaires de la source (du système émetteur d'électrons) sont petites, la valeur mesurée par expérience (de même que dans le cas d'une particule isolée) est alors la densité spectrale du flux de rayonnement

$$\Phi_\nu = \int I_\nu\, d\Omega = \int I_e(\nu, \mathscr{E}, \mathbf{R}, \chi, \psi)\, N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\tau})\, d\mathscr{E}\, d\Omega_\tau\, dV, \qquad (5.33)$$

où $dV = R^2 dR\, d\Omega$, et l'intégration porte sur le volume tout entier de la source.

*) Dans ce qui suit, on entend par direction d'observation (direction du rayon visuel) la direction du vecteur d'onde $\mathbf{k}$, c.-à-d. celle d'où vient le rayonnement observé.

Pour (5.32), (5.33) et pour les expressions analogues relatives aux autres paramètres de Stokes appliqués au rayonnement synchrotron, on peut, pour une distribution arbitraire des électrons $N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\tau})$ intégrer sous la formé générale sur $d\Omega_\tau$. En effet, l'expression sous le signe d'intégration n'est pratiquement différente de zéro que dans une petite marge des angles $\Delta\psi \sim mc^2/\mathscr{E}$: c'est pourquoi pour intégrer sur $d\Omega_\tau$ ce n'est que la contribution d'un secteur annulaire étroit $\Delta\Omega_\tau = 2\pi \sin \alpha \Delta\psi$ où $\alpha = \chi - \psi \approx \chi$ est l'angle entre la direction d'observation $\mathbf{k}$ et le champ magnétique $\mathbf{H}$ *), qui est importante. La distribution des électrons suivant les directions ne change pratiquement pas dans les limites du petit angle solide $\Delta\Omega_\tau$ et on peut poser $N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\tau}) \approx N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \mathbf{k})$, où $\mathbf{k}$ est la direction du rayonnement (dans le sens de la source vers l'observateur), suivant le rayon visuel), alors que l'intégration sur ψ peut être extrapolée au domaine tout entier de $-\infty$ à ∞. Alors, compte tenu des relations [48, 49].

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p_\nu^{(1)}\, d\psi &= \frac{\sqrt{3}\, e^3 H}{2\pi mc^2 R^2}\frac{\nu}{2\nu_c}\left[\int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta + K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\right], \\ \int_{-\infty}^{+\infty} p_\nu^{(2)}\, d\psi &= \frac{\sqrt{3}\, e^3 H}{2\pi mc^2 R^2}\frac{\nu}{2\nu_c}\left[\int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta - K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\right], \end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

on tire de (5.28) et (5.32)

$$I_\nu = I(\nu, \mathbf{k}) = \\ = \frac{\sqrt{3}\, e^3}{mc^2}\int d\mathscr{E}\, d\mathbf{R} N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \mathbf{k})\, H \sin\chi \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta. \tag{5.35}$$

Dans le cas général, l'intensité du champ $\mathbf{H}$, l'angle $\alpha \approx \chi$ entre $\mathbf{H}$ et $\mathbf{k}$, ainsi que la densité (concentration) des particules $N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \mathbf{k})$ dépendent ici de $\mathbf{R}$.

Les autres paramètres de Stokes peuvent être exprimés d'une façon analogue ; par exemple

$$Q(\nu, \mathbf{k}) = \\ = \frac{\sqrt{3}\, e^3}{mc^2}\int d\mathscr{E}\, d\mathbf{R} N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \mathbf{k})\, H \sin\chi \cos 2\tilde{\chi}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \tag{5.36}$$

Le paramètre de Stokes $U(\nu, \mathbf{k})$ ne se distingue de $Q(\nu, \mathbf{k})$ que par le $\cos 2\tilde{\chi}$ remplacé dans l'expression sous le signe d'intégration de (5.36) par $\sin 2\chi$. Quant au paramètre $V(\nu, \mathbf{k})$ caractéristique de

*) Dans ce qui suit nous ne distinguons pas les angles α et χ ; ce qui est, évidemment admissible, puisqu'une particule ultra-relativiste ne rayonne pratiquement que dans la direction du mouvement.

la polarisation elliptique du rayonnement, dans l'approximation ultra-relativiste envisagée il s'avère nul. En effet, on voit aisément de (5.17) et (5.28) que

$$V_e \sim 2\frac{\psi}{\xi}\left(1+\frac{\psi^2}{\xi^2}\right)^{3/2} K_{1/3}(g_\nu) K_{2/3}(g_\nu).$$

Cette fonction étant impaire, son intégrale sur tous les ψ s'annule, et par conséquent, $V(\nu, \mathbf{k}) = 0$. Ainsi le rayonnement d'un système d'électrons s'avère linéairement polarisé. Ce résultat est vrai aux termes d'ordre $mc^2/\mathscr{E}$ près, et on le comprend sans peine si on se rappelle que le signe de ψ détermine la direction de la rotation du vecteur électrique dans l'onde émise par un électron isolé. Puisque la puissance du rayonnement (cf. (5.21) et (5.22) ou (5.26) et (5.27)) ne dépend pas du signe de ψ, alors que la distribution des particules suivant les directions du mouvement dans la limite de très petits angles $\psi \lesssim mc^2/\mathscr{E}$ est pratiquement constante, l'apport au rayonnement dans la direction donnée des particules de ψ positif et négatif est le même, et la polarisation est linéaire.

Dans le cas ultra-relativiste une polarisation elliptique sensible ne pourrait apparaître que pour une distribution nettement anisotrope des vitesses des électrons. A cet effet il faudrait que la distribution varie sensiblement dans les limites d'un très petit angle $\psi \sim mc^2/\mathscr{E}$ et de plus, justement dans la direction de l'observation. Si encore on tient compte des fluctuations éventuelles de la direction du champ magnétique, il devient clair que sa réalisation impose des conditions très spéciales (sous ce rapport, les pulsars présentent un intérêt particulier).

Donnons maintenant les expressions de l'intensité et de la polarisation pour certains cas concrets, importantes notamment pour des applications astronomiques.

Si l'énergie de tous les électrons est la même (spectre monoénergétique) et le champ magnétique homogène, d'après (5.35) l'intensité du rayonnement s'écrit

$$I_1(\mathbf{k}) = \frac{\sqrt{3}\,e^3}{mc^2} N_e(\mathbf{k}) H \sin\chi \frac{\nu}{\nu_c} \int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta \equiv N_e(\mathbf{k})\, p(\nu), \qquad (5.37)$$

où $N_e(\mathbf{k}) = \int N_e(\mathbf{R}, \mathbf{k})\, dR$ est le nombre d'électrons dans l'angle solide unité le long du rayon visuel, et dont les vitesses sont dirigées vers l'observateur.

(5.30) et (5.36) montrent que dans ce cas le degré de polarisation est

$$\Pi = \frac{K_{2/3}(\nu/\nu_c)}{\int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta} = \begin{cases} 1/2 & \text{pour} \quad \nu \ll \nu_c, \\ 1 - 2/3\,(\nu_c/\nu) & \text{pour} \quad \nu \gg \nu_c \end{cases} \qquad (5.38)$$

Puisqu'en approximation considérée l'intégration sur la distribution angulaire des électrons est équivalente à l'intégration de la puissance rayonnée par un électron isolé suivant toutes les directions, l'expression (5.37) ne se distingue de la distribution spectrale de la puissance rayonnée totale (dans toutes les directions) d'un électron isolé que par le facteur $N_e(\mathbf{k})$:

$$p(\nu)=\sqrt{3}\frac{e^3H\sin\chi}{mc^2}\frac{\nu}{\nu_c}\int\limits_{\nu/\nu_c}^{\infty}K_{5/3}(\eta)\,d\eta=\sqrt{3}\frac{e^3H_\perp}{mc^2}F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right). \quad (5.39)$$

Le graphique de la fonction $F(x)=x\int\limits_x^\infty K_{5/3}(\eta)\,d\eta$, qui matérialise la distribution spectrale de la puissance rayonnée est représenté sur la figure 5.6, et sa valeur, ainsi que celles de la fonction $F_p(x)=xK_{2/3}(x)$ sont données dans l'annexe 4 en fin de [39] (d'après (5.38), la polarisation $\Pi=F_p(x)/F(x)$). Notons que le maximum du spectre du rayonnement synchrotron d'un électron isolé correspond à la fréquence

$$\nu_m\approx 0{,}29\nu_c=0{,}07\frac{eH_\perp}{mc}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2=1{,}2\cdot 10^6H_\perp\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2=$$
$$=1{,}8\cdot 10^{18}H_\perp(\mathscr{E}\,(\mathrm{erg}))^2=4{,}6\cdot 10^{-6}H_\perp(\mathscr{E}\,(\mathrm{eV}))^2. \quad (5.40a)$$

Ici la fréquence est exprimée en hertz.

Pour la fréquence maximale (5.40 a), la densité spectrale de la puissance rayonnée totale d'un électron isolé est égale à

$$p_m=p(\nu_m=0{,}29\nu_c)\approx 1{,}6\frac{e^3H_\perp}{mc^2}=2{,}16\cdot 10^{-22}H_\perp\ \mathrm{erg\cdot s^{-1}\cdot Hz^{-1}}. \quad (5.40\text{B})$$

Si on ne parle pas du facteur numérique, c.-à-d. si l'estimation ne porte que sur l'ordre de grandeur, cette dernière relation s'obtient aisément de la façon suivante. Des considérations qualitatives et la figure 5.6 montrent clairement que la largeur du spectre du rayonnement de l'électron $\Delta\nu\sim\nu_c\sim\theta_c\sim(eH_\perp/mc)(\mathscr{E}/mc^2)^2$. On peut poser que la puissance totale du rayonnement synchrotron compte tenu des remarques ci-dessus, est égale aux pertes (5.24). Il est évident que la densité spectrale de la puissance du rayonnement

$$\overline{p(\nu)}\sim\frac{\mathscr{P}(\mathscr{E})}{\Delta\nu}\sim\frac{\mathscr{P}(\mathscr{E})}{\nu_c}\sim\frac{e^3H_\perp}{mc^2},$$

ce qui s'accorde avec (5.8); cette estimation est donc reprise ici pour plus de commodité.

Le spectre énergétique des électrons dans le sens du rayon visuel peut souvent être approximé dans un intervalle limité des énergies par la fonction puissance de la forme

$$N_e(\mathscr{E}, \mathbf{k})\, d\mathscr{E} = K_e(\mathbf{k})\, \mathscr{E}^{-\gamma}\, d\mathscr{E}, \quad \mathscr{E}_1 \leqslant \mathscr{E} \leqslant \mathscr{E}_2 \qquad (5.41)$$

Ici $N_e(\mathscr{E}, \mathbf{k})$ est le nombre d'électrons suivant le rayon visuel, qui se déplacent vers l'observateur, rapporté à l'angle solide unité et à l'intervalle d'énergie unité.

Pour les électrons responsables du rayonnement radio cosmique une telle approximation est généralement admissible dans une marge assez grande d'énergies; de plus, on peut souvent admettre

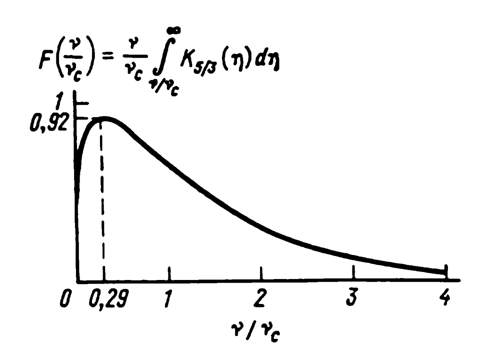


Fig. 5.6. Distribution spectrale de la puissance du rayonnement total (dans toutes les directions) émis par une particule chargée se déplaçant dans un champ magnétique (cf. (5.39))

que les limites $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ du spectre (5.41) soient telles que dans la marge des fréquences qui nous intéressent, le rayonnement des électrons d'énergies $\mathscr{E} < \mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E} > \mathscr{E}_2$ soit négligeable. Sous cette hypothèse, la fonction (5.41) peut être utilisée pour les intégrales (5.35) et (5.36) sur l'intervalle d'énergie tout entier, et c'est pourquoi (avec $\gamma > 1/3$) on peut appliquer les relations

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathscr{E}^{-\gamma} \frac{\nu}{\nu_c} K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) d\mathscr{E} = \\
&\qquad = {}^1/_4\Gamma\left(\frac{3\gamma-1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3\gamma+7}{12}\right)\left[\frac{3eH\sin\chi}{2\pi m^3c^5\nu}\right]^{1/2(\gamma-1)}, \\
&\int_0^\infty \mathscr{E}^{-\gamma}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\int_{\nu/\nu_c}^\infty K_{5/3}(\eta)\, d\eta\right) d\mathscr{E} = \\
&= 1/4\,\frac{\gamma+7/3}{\gamma+1}\Gamma\left(\frac{3\gamma-1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3\gamma+7}{12}\right)\left[\frac{3eH\sin\chi}{2\pi m^3c^5\nu}\right]^{1/2(\gamma-1)},
\end{aligned}\right\} \qquad (5.42)$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction eulérienne gamma. Alors, (cf. (5.35)), on obtient l'expression suivante de l'intensité du rayonnement d'un système d'électrons de spectre énergétique (5.41) dans un champ magnétique homogène **H**:

$$I_0(\mathbf{k}) = \frac{\sqrt{3}}{\gamma+1}\Gamma\left(\frac{3\gamma-1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3\gamma+19}{12}\right)\frac{e^3}{mc^2}\left(\frac{3e}{2\pi m^3c^5}\right)^{1/2(\gamma-1)}\times$$
$$\times K_e(\mathbf{k})(H\sin\chi)^{1/2(\gamma+1)}\nu^{-1/2(\gamma-1)}, \quad (5.43)$$

où $K_e(\mathbf{k})$ est le coefficient de (5.41).

Admettons que la distribution des électrons soit uniforme et isotrope, c.-à-d.

$$N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi}N_e(\mathscr{E}),$$

où

$$N_e(\mathscr{E})\,d\mathscr{E} = K_e\mathscr{E}^{-\gamma}\,d\mathscr{E} \quad (5.44)$$

est le nombre d'électrons par unité de volume se déplaçant dans des directions arbitraires et dont les énergies s'échelonnent de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E} + d\mathscr{E}$. Il vient

$$K_e(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi}K_eL, \quad (5.45)$$

où K_e est le coefficient de (5.44), et L, l'étendue du domaine radiant suivant le rayon visuel. Constatons que dans le cas général $K_e(\mathbf{k})$ dépend de l'angle χ entre la direction du champ magnétique et le rayon visuel.

Dans le cas d'un champ homogène la polarisation du rayonnement dépend seulement de l'exposant γ du spectre (5.41) et, comme on peut le déduire de (5.30) et (5.42), elle vaut

$$\Pi_0 = \frac{\gamma+1}{\gamma+7/3}, \quad (5.46)$$

ce qui fait 75 % avec $\gamma = 3$ et 69 % avec $\gamma = 2$.

Dans le cas du rayonnement synchrotron des électrons cosmiques, les formules (5.43) et (5.46) sont en général inapplicables du fait que le rayonnement observé s'accumule à partir d'une vaste région de l'espace, où le champ magnétique de diverses parties est orienté de façon différente. On peut admettre que dans le sens du rayon visuel, les directions du champ magnétique sont en moyenne chaotiques. C'est le cas où le rayonnement n'est pas polarisé et où l'intensité s'obtient aisément en prenant la moyenne de (5.43) dans toutes les directions du champ magnétique. Puisque

$$1/2\int_0^{\pi}(\sin\chi)^{1/2(\gamma+1)}\sin\chi\,d\chi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(1/4(\gamma+5))}{\Gamma(1/4(\gamma+7))}, \quad (5.47)$$

le calcul de cette moyenne conduit à l'expression suivante de l'intensité du rayonnement dans le cas d'une distribution uniforme et isotrope des électrons de spectre énergétique (5.44) dans un champ magnétique chaotique

$$I_\nu \equiv I = a(\gamma)\,\frac{e^3}{mc^2}\left(\frac{3e}{4\pi m^3c^5}\right)^{1/2(\gamma-1)} H^{1/2(\gamma+1)} LK_e \nu^{-1/2(\gamma-1)} =$$

$$= 1{,}35\cdot 10^{-22} a(\gamma)\, LK_e H^{1/2(\gamma+1)} \left(\frac{6{,}26\cdot 10^{18}}{\nu}\right)^{1/2(\gamma-1)} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2\cdot\text{sr}\cdot\text{s}\cdot\text{Hz}}. \tag{5.48}$$

Ici K_e est le coefficient de (5.44) associé à l'unité de volume; par $H^{1/2(\gamma+1)}$ il faut entendre la moyenne de cette quantité dans le domaine radiant; $a(\gamma)$ est le coefficient dépendant de l'exposant γ du spectre énergétique

$$a(\gamma) = \frac{2^{1/2(\gamma-1)}\sqrt{3}\,\Gamma((3\gamma-1)/12)\,\Gamma((3\gamma+19)/12)\,\Gamma((\gamma+5)/4)}{8\sqrt{\pi}\,(\gamma+1)\,\Gamma((\gamma+7)/4)}. \tag{5.49}$$

Les valeurs du coefficient $a(\gamma)$, ainsi que les valeurs d'autres quantités données dans ce qui suit sont consignées sur le tableau 5.1.

Tableau 5.1

γ	1	1,5	2	2,5	3	4	5
$a(\gamma)$	0,283	0,147	0,103	0,0852	0,0742	0,0725	0,0922
$a'(\gamma)$	0,31	0,22	0,15	0,11	0,074	0,036	0,018
$y_1(\gamma)$	0,80	1,3	1,8	2,2	2,7	3,4	4,0
$y_2(\gamma)$	0,00045	0,011	0,032	0,10	0,18	0,38	0,65

Comme le montrent les expressions (5.43) et (5.48), au spectre puissance énergétique des particules émettrices d'exposant γ correspond le spectre puissance fréquentiel du rayonnement

$$I_\nu \sim \nu^{-\alpha}, \quad \alpha = 1/2(\gamma-1). \tag{5.50}$$

Vu le grand rôle de la formule (5.50) déduisons-la également par une méthode approchée bien simple. Plus précisément, négligeons la largeur du spectre du rayonnement d'un électron, en admettant que le rayonnement tout entier soit émis à la fréquence $\nu = \nu_m$, celle du maximum du spectre (cf. (5.40)). Alors, l'énergie d'un électron s'exprime à l'aide de la fréquence ν; de plus, $\mathcal{E}^2 = \left(\frac{\nu}{0{,}29}\right)\left(\frac{4\pi m^3c^5}{eH_\perp}\right)$. Ensuite, la puissance totale du rayonne-

ment d'un électron ultra-relativiste est donnée par l'expression connue (cf. (5.24))

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \mathscr{P} = 2/3c\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 H_\perp^2 \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2.$$

Sous les hypothèses avancées relatives au spectre électronique (5.44), l'intensité du rayonnement accumulé sur le parcours L est

$$I_\nu d\nu = \frac{L}{4\pi}\mathscr{P}K_e\mathscr{E}^{-\gamma}d\mathscr{E}| =$$

$$= a'(\gamma)\frac{e^3}{mc^2}\left(\frac{3e}{4\pi m^3c^5}\right)^{1/2(\gamma-1)} H^{1/2(\gamma+1)} LK_e\nu^{-1/2(\gamma-1)}d\nu, \quad (5.51)$$

où $a'(\gamma) = 0{,}31\,(0{,}24)^{1/2(\gamma-1)}$ et où on a tenu compte qu'en moyenne pour un champ chaotique $H_\perp^2 = 2/3H^2$. La formule (5.51) ne se distingue de (5.48) que par le facteur $a'(\gamma)$ qui a remplacé $a(\gamma)$; pour les valeurs $1 < \gamma < 4$ ces facteurs ne diffèrent pas plus que du simple au double (cf. tableau 5.1).

Outre l'intensité I_ν, on utilise souvent le pouvoir émissif ε_ν, énergie émise par unité de temps par unité de volume dans un angle solide unité. On voit aisément que pour un rayonnement isotrope (en moyenne) accumulé sur le parcours L,

$$\varepsilon_\nu = I_\nu/L. \quad (5.52)$$

Parfois on utilise également le pouvoir émissif d'une unité de volume dans toutes les directions du rayonnement. Pour un rayonnement isotrope il vaut $4\pi\varepsilon_\nu$. Dans le cas du rayonnement synchrotron des électrons de spectre puissance l'intensité I_ν qui figure ici, est définie par l'expression (5.48). Il est évident que pour les électrons monoénergétiques

$$\varepsilon_\nu = \frac{p(\nu)}{4\pi}N_e, \quad (5.53)$$

où $p(\nu)$ est la puissance rayonnée totale (cf. (5.39)) et N_e, la concentration des électrons émetteurs (cf. également (5.37) à $N_e(\mathbf{k}) = N_eL/4\pi$).

Le pouvoir émissif maximal, c.-à-d. le rayonnement de fréquence ν_m (cf. (5.40)), s'écrit

$$\varepsilon_{\nu,m} = \frac{p_m}{4\pi}N_e \approx 0{,}13\frac{e^3H_\perp}{mc^2}N_e =$$

$$= 1{,}7\cdot10^{-23}H_\perp N_e\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3\cdot\text{sr}\cdot\text{s}\cdot\text{Hz}}. \quad (5.54)$$

L'intensité maximale fournie par les électrons monoénergétiques à distribution isotrope est égale à

$$I_{\nu, m} = \int \varepsilon_{\nu, m}\, dR = 1{,}7 \cdot 10^{-23} H_\perp \int N_e(\mathbf{R})\, dR \, \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{sr} \cdot \text{Hz}} =$$
$$= 1{,}7 \cdot 10^{-26} H_\perp \int N_e(\mathbf{R})\, dR \, \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{sr} \cdot \text{Hz}}. \qquad (5.55)$$

Dans les cas où les formules (5.54) et (5.55) s'emploient pour évaluer la concentration N_e suivant les valeurs mesurées de I_ν, un tel calcul fournit de par son sens même la valeur minimale de N_e.

Nous avons supposé ci-dessus que pour une gamme d'énergies suffisamment grande le spectre énergétique des électrons est un spectre puissance (cf. (5.41) et (5.44)). Donnons maintenant une estimation quantitative de cette gamme. Si les conditions

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}_1 &\leqslant mc^2 \left[\frac{4\pi mc\nu}{3eHy_1(\gamma)}\right]^{1/2} \approx 2{,}5 \cdot 10^2 \left[\frac{\nu}{y_1(\gamma)H}\right]^{1/2} \text{eV}, \\ \mathscr{E}_2 &\geqslant mc^2 \left[\frac{4\pi mc\nu}{3eHy_2(\gamma)}\right]^{1/2} \approx 2{,}5 \cdot 10^2 \left[\frac{\nu}{y_2(\gamma)H}\right]^{1/2} \text{eV}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.56)$$

sont remplies, pour la fréquence ν donnée, l'erreur due au remplacement dans (5.35) et (5.36) des limites d'intégration par 0 et ∞ respectivement ne dépasse pas 10 % pour chacune des limites.

Les valeurs des facteurs $y_1(\gamma)$ et $y_2(\gamma)$ pour des γ différents sont consignées sur le tableau 5.1. On voit que la marge des énergies dont l'apport est le plus gros dans le rayonnement de fréquence donnée dépend essentiellement de l'exposant γ. Pour $\gamma \geqslant 1{,}5$ ($\alpha \geqslant 0{,}25$) plus de 80 % de rayonnement de fréquence donnée est fourni par les électrons d'énergies qui ne diffèrent pas plus que du simple au décuple. Pour $\gamma < 1{,}5$ cette marge d'énergies croît rapidement et pour $\gamma \to 1/3$ ($\alpha \to -1/3$), elle s'étend à l'infini. Il en est ainsi parce que dans le domaine des fréquences ν inférieures à ν_m, l'intensité du rayonnement d'une particule isolée $p_\nu \equiv p(\nu, \mathscr{E}) \sim$ $\sim (\nu/\nu_c)^{1/3} \sim \nu^{1/3} \mathscr{E}^{-2/3}$, et pour le spectre (5.41) l'intensité globale $I_\nu \sim \int p(\nu, \mathscr{E})\, N(\mathscr{E})\, d\mathscr{E} \sim \int d\mathscr{E}/\mathscr{E}^{\gamma+2/3}$ n'est pas limitée si le spectre énergétique des particules d'exposant $\gamma \leqslant 1/3$ s'étend à des énergies aussi grandes que l'on veut.

La valeur $\alpha = -1/3$ est évidemment une valeur minimale pour le rayonnement synchrotron dans le vide, puisque même le spectre du rayonnement d'une particule isolée ne contient pas de plages à croissance plus rapide de l'intensité avec la fréquence.

L'application de la théorie à l'astrophysique impose souvent l'évaluation de la marge d'énergies des électrons ($\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$) qui rayonnent le spectre puissance (5.50) dans l'intervalle des fréquences ν_1, ν_2. Si cette marge est suffisamment grande ($\nu_2/\nu_1 \gg y_1(\gamma)/y_2(\gamma)$), les résultats susmentionnés permettent de conclure que le spectre

puissance énergétique des électrons doit s'échelonner au moins suivant les énergies $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E} < \mathcal{E}_2$, où

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= mc^2\left[\frac{4\pi mc\nu_1}{3eHy_1(\gamma)}\right]^{1/2} \approx 2{,}5\cdot 10^2\left[\frac{\nu_1}{y_1(\gamma)H}\right]^{1/2}\text{eV},\\ \mathcal{E}_2 &= mc^2\left[\frac{4\pi mc\nu_2}{3eHy_2(\gamma)}\right]^{1/2} \approx 2{,}5\cdot 10^2\left[\frac{\nu_2}{y_2(\gamma)H}\right]^{1/2}\text{eV}. \end{aligned}\right\} \quad (5.57)$$

Mais si l'intervalle des fréquences ou α sont petits (pratiquement $\alpha < 0{,}25$, c.-à-d. $\gamma < 1{,}5$), l'évaluation de la gamme des énergies des électrons ne peut être que grossière, puisqu'on doit admettre que le rayonnement tout entier d'un électron d'énergie $\mathcal{E}$ se produit à la fréquence $\nu_m = 0{,}29\nu_c$ compte tenu de la liaison $H_\perp = \sqrt{\frac{2}{3}}\,H$. De plus, dans (5.57) il faut poser $y_1(\gamma) = y_2(\gamma) = 0{,}24$.

Nous avons donné précédemment les expressions de l'intensité du rayonnement synchrotron pour deux cas limites envisagés généralement, pour celui d'un champ homogène et celui d'un champ complètement chaotique. Le premier de ces cas est caractérisé par la polarisation maximale au possible, dans le deuxième, le rayonnement n'est pas polarisé du tout. Le choix de l'expression à employer est guidé en premier lieu par la mesure de la polarisation. Pourtant, dans ceux des cas connus où la polarisation du rayonnement synchrotron cosmique est observée, elle s'avère en général bien inférieure à celle d'un champ homogène (cf. (5.46)). Ceci peut signifier avant tout que dans la région émettrice le champ magnétique n'est pas strictement homogène. Pour un tel cas « intermédiaire », le calcul du degré de polarisation des deux modèles de champ magnétique est décrit dans [50] (le résultat est donné également dans [38, 39]).

Dans la plupart des cas, les observations radioastronomiques se ramènent à la mesure de l'intensité I. Cependant, un rôle de plus en plus grand est joué par les mesures de la polarisation et nous sommes sûrs que la tendance générale consiste à mesurer tous les paramètres de Stokes tant pour le rayonnement radio que pour le rayonnement des autres gammes de fréquences. Néanmoins, l'intensité I reste la caractéristique principale du rayonnement cosmique. Dans le cas du rayonnement synchrotron radiocosmique dont le spectre et certaines autres caractéristiques (par exemple, l'intensité très élevée) permettent de le distinguer du rayonnement radiothermique, les mesures d'intensité servent pour évaluer la concentration et l'énergie des électrons relativistes (composante électronique des rayons cosmiques) loin de la Terre.

Les dimensions angulaires des nébuleuses galactiques et extragalactiques, sources discrètes de rayonnement radio non thermique, sont en règle générale petites et dans les cas courants on mesure non pas l'intensité I_ν mais la densité spectrale du flux de rayonnement Φ_ν (cf. (5.33)). Cette grandeur est définie comme un flux

d'énergie du rayonnement dans un intervalle de fréquence unité qui frappe suivant une normale une aire unité

$$\Phi_\nu = \int I_\nu \, d\Omega, \tag{5.58}$$

où l'intégration se fait sur l'angle solide tout entier qui correspond à la source. Si la dimension linéaire L de la source est petite par rapport à sa distance R, et si la valeur absolue de l'intensité du champ magnétique et la concentration des électrons relativistes peuvent être considérées approximativement comme constantes suivant le volume de la source, alors (5.48) et (5.58) entraînent

$$\Phi_\nu = a(\gamma) \frac{e^3}{mc^2} \left(\frac{3e}{4\pi m^3 c^5}\right)^{1/2(\gamma-1)} \frac{K_V H^{1/2(\gamma+1)}}{R^2} \nu^{-1/2(\gamma-1)} =$$
$$= 1{,}35 \cdot 10^{-22} a(\gamma) \frac{K_V H^{1/2(\gamma+1)}}{R^2} \left(\frac{6{,}26 \cdot 10^{18}}{\nu}\right)^{1/2(\gamma-1)} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Hz}}, \tag{5.59}$$

où $K_V = K_e V$ est le coefficient du spectre énergétique des électrons rapporté au volume total de la source $V = \pi L^3/6$. On suppose ici que le spectre énergétique des électrons est de la forme

$$N(\mathscr{E})\, d\mathscr{E} = K_V \mathscr{E}^{-\gamma} \, d\mathscr{E} \tag{5.60}$$

et sa marge des énergies est

$$2{,}5 \cdot 10^2 \left(\frac{\nu_1}{H y_1(\gamma)}\right)^{1/2} \leqslant \mathscr{E}\,(\text{eV}) \leqslant 2{,}5 \cdot 10^2 \left(\frac{\nu_2}{H y_2(\gamma)}\right)^{1/2} \tag{5.61}$$

(cf. (5.57)), où ν_1 et ν_2 sont les fréquences associées aux limites de la plage des ondes radio considérée dans laquelle l'exposant spectral $\alpha = 1/2\,(\gamma - 1)$ est constant.

En exprimant K_V par la densité spectrale du flux de rayonnement Φ_ν, observée à une certaine fréquence on obtient

$$K_V = K_e V = \frac{7{,}4 \cdot 10^{21} R^2}{a(\gamma) H} \Phi_\nu \left(\frac{\nu}{6{,}26 \cdot 10^{18} H}\right)^{1/2(\gamma-1)}. \tag{5.62}$$

On peut en déduire le nombre total des électrons relativistes de la marge des énergies indiquées

$$N_e = \int_{\mathscr{E}_1}^{\mathscr{E}_2} K_V \mathscr{E}^{-\gamma} \, d\mathscr{E} =$$
$$= \frac{7{,}4 \cdot 10^{21} R^2 \Phi_\nu}{(\gamma - 1)\, a(\gamma) H} \left[\frac{y_1(\gamma)\,\nu}{\nu_1}\right]^{1/2(\gamma-1)} \left\{1 - \left(\frac{y_2(\gamma)\,\nu_1}{y_1(\gamma)\,\nu_2}\right)^{1/2(\gamma-1)}\right\}. \tag{5.63}$$

Cette formule est, certes, approximative, puisque pour passer de $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ à ν_1, ν_2 on a utilisé les inégalités (5.61) qui déterminent chacune des limites seulement à 10 % près. Etant donné que dans les cas courants $\nu_1 \ll \nu_2$ et $y_2(\gamma) < y_1(\gamma)$, le nombre d'électrons

pratiquement défini seulement par la limite inférieure de l'intervalle fréquentiel est égal à

$$N_c(>\mathscr{E}_1)=\frac{7,4\cdot 10^{21}R^2\Phi_\nu}{(\gamma-1)\,a(\gamma)\,H}\left[\frac{y_1(\gamma)\,\nu}{\nu_1}\right]^{1/2(\gamma-1)}. \tag{5.64}$$

Les valeurs des facteurs $a(\gamma)$ et $y_1(\gamma)$ sont données dans le tableau 5.1.

D'une façon analogue, l'énergie totale des électrons d'une source responsables du rayonnement dans l'intervalle des fréquences observées $\nu_1 \leqslant \nu \leqslant \nu_2$ peut être mise sous la forme

$$W_e=\int\limits_{\mathscr{E}_1}^{\mathscr{E}_2} K_\gamma \mathscr{E}^{-\gamma+1}\,d\mathscr{E}=A(\gamma,\ \nu)\frac{R^2\Phi_\nu}{H^{3/2}}, \tag{5.65}$$

où

$$A(\gamma,\ \nu)=\begin{cases}\dfrac{2,96\cdot 10^{12}}{(\gamma-2)\,a(\gamma)}\nu^{1/2}\left[\dfrac{y_1(\gamma)\,\nu}{\nu_1}\right]^{1/2(\gamma-2)}\times\\ \qquad\times\left\{1-\left[\dfrac{y_2(\gamma)\,\nu_1}{y_1(\gamma)\,\nu_2}\right]^{1/2(\gamma-2)}\right\},\quad \gamma>2,\\ 1,44\cdot 10^{13}\nu^{1/2}\ln\left[\dfrac{y_1(\gamma)\,\nu_2}{y_2(\gamma)\,\nu_1}\right],\quad \gamma=2,\\ \dfrac{2,96\cdot 10^{12}}{(2-\gamma)\,a(\gamma)}\nu^{1/2}\left[\dfrac{y_2(\gamma)\,\nu}{\nu_2}\right]^{1/2(\gamma-2)}\times\\ \times\left\{1-\left[\dfrac{y_2(\gamma)\,\nu_1}{y_1(\gamma)\,\nu_2}\right]^{1/2(2-\gamma)}\right\},\quad 1/3<\gamma<2.\end{cases} \tag{5.66}$$

Avec $\gamma < 1,5$ ($\alpha < 0,25$), la formule donnée pour $A(\gamma,\ \nu)$ ne peut s'employer en fait que pour des estimations grossières; de plus, nous sommes légitimés de poser $y_2(\gamma) = y_1(\gamma) = 0,24$; ceci répond à l'hypothèse qu'un électron d'énergie $\mathscr{E}$ émet seulement à la fréquence $\nu = \nu_m = 0,29\nu_c$ (cf. 5.40a)).

Si l'on connaît la distance à la source R et le flux de rayonnement d'une certaine fréquence Φ_ν, en connaissant l'intensité du champ magnétique H on peut déterminer d'après l'expression (5.65) l'énergie totale des électrons relativistes de la source. Malheureusement, pour l'instant il n'existe pas de méthodes bien sûres pour évaluer l'intensité du champ magnétique des sources (toutefois, nous en reparlerons plus loin) et c'est pourquoi le calcul de W_e impose certaines hypothèses supplémentaires.

On adopte généralement comme hypothèse principale que dans la source l'énergie du champ magnétique W_H et l'énergie des particules relativistes (rayons cosmiques) $W_{\text{r.c.}}$ sont de même ordre de grandeur, ou tout simplement en première approximation, sont égales entre elles. En fait, pour la puissance donnée du rayonne-

ment synchrotron *), cette hypothèse correspond à l'énergie totale minimale d'un système champ-particules. Par ailleurs, un champ magnétique à densité d'énergie sensiblement inférieure à celle des particules relativistes ne pourrait retenir ces particules dans le volume limité de la source et leur écoulement amènerait le système de par lui-même à un état voisin d'un quasi-équilibre énergétique entre le champ et les particules relativistes. Assurément, on suppose ici que dans les conditions qui nous intéressent, le système peut en général se trouver en un état quasi stationnaire, S'il s'agit par exemple, d'éjection d'un nuage de particules relativistes par l'explosion du noyau d'une galaxie, il se peut qu'apparaisse un état de déséquilibre marqué tel que dans la période qui nous intéresse l'énergie des rayons cosmiques du nuage soit sensiblement supérieure à l'énergie du champ magnétique. Toutefois, probablement, la durée de la phase de déséquilibre importante lorsque les particules quittent le nuage, est relativement peu grande. Quoi qu'il en soit, dans de nombreux cas, on est autorisé d'admettre que

$$W_H = \varkappa_H W_{\text{r.c.}}, \quad \varkappa_H \sim 1, \tag{5.67}$$

où $\varkappa_H$ est un coefficient numérique; $W_H = (H^2/8\pi)V$, l'énergie totale du champ magnétique, et $W_{\text{r.c.}}$, l'énergie totale des particules relativistes (rayons cosmiques et électrons) dans la nébuleuse émettrice des ondes radio.

Les données d'observation sur les ondes radio permettent de juger seulement de la quantité et de l'énergie des électrons de la source; c'est pourquoi pour déterminer l'énergie totale $W_{\text{r.c.}}$ de toutes les particules relativistes, il faut établir la relation entre cette grandeur et l'énergie W_e des électrons relativistes. Il n'existe pas actuellement de méthodes quelque peu sûres pour apprécier la part de W_e dans l'énergie totale $W_{\text{r.c.}}$ (cf., pourtant, plus loin); on admet donc comme seconde hypothèse importante que dans la source l'énergie de tous les rayons cosmiques est tout simplement proportionnelle à l'énergie des électrons relativistes

$$W_{\text{r.c.}} = \varkappa_e W_e, \tag{5.68}$$

où $\varkappa_e$ est un coefficient numérique.

Nous examinerons encore au chapitre 15 l'astrophysique des rayons cosmiques, ou comme on le dit plus souvent, le problème de l'origine des rayons cosmiques. Mais dès à présent il est commode de dire que pour les rayons cosmiques de la Galaxie $\varkappa_e \sim 10^2$

*) L'énergie totale des particules et du champ magnétique de la source, en tant que fonction de l'intensité du champ, la puissance du rayonnement étant donnée, vaut $W = W_H + W_{\text{r.c.}} = C_1H^2 + C_2H^{-3/2}$, où C_1 et C_2 sont des coefficients indépendants de H (cf. (5.65) et plus loin (5.68)). En déterminant le minimum de cette expression par rapport à H, trouvons que l'énergie totale est minimale sous la condition $W_H = 3/4\ W_{\text{r.c.}}$.

($\varkappa_e \sim 10^2$ au voisinage de la Terre et probablement dans la plus grande partie de la Galaxie, mais non nécessairement partout; ainsi, il se peut très bien que dans le voisinage du centre galactique, $\varkappa_e \gg 10^2$; cf. [51]). Si les rayons cosmiques sont générés par le Soleil, $\varkappa_e \gg 1$. Des considérations théoriques font également conclure que $\varkappa_e \gg 1$. Ainsi, dans les ondes de choc relativistes les particules accélérées par l'éjection acquièrent toutes la même vitesse; par conséquent, leur énergie est proportionnelle à la masse. Par la suite, l'énergie des électrons peut tendre à égaler celle des protons et des noyaux. Mais d'autre part, les électrons subissent des pertes d'énergie par effets synchrotron et Compton, pratiquement inexistantes dans le cas des particules lourdes. Dans l'accélération statistique (accélération de Fermi) l'énergie des électrons est m/M fois plus petite que l'énergie des particules de masse M. Enfin, si les électrons et les protons sont accélérés dans un champ électrique (et en particulier, lorsque le champ magnétique « gelé » est perturbé), ils acquièrent en général la même impulsion. Cependant, dans ce cas là aussi les pertes supplémentaires font finalement que l'énergie moyenne des électrons est en général inférieure à celle des particules lourdes. Ainsi, dans les conditions cosmiques, il semble que l'observation de l'inégalité

$$\varkappa_e \gg 1 \tag{5.69}$$

soit une norme, bien que cela ne soit pas de rigueur.

Si l'on connaît le spectre de la source, ses dimensions angulaires et sa distance, on peut d'après le flux observé du rayonnement radio déterminer sous des hypothèses définies sur les valeurs de $\varkappa_H$ et $\varkappa_e$ tant l'intensité du champ magnétique que l'énergie totale des rayons cosmiques et des électrons de la source. Comme il s'ensuit de (5.65), (5.67) et (5.68),

$$W_H \equiv \frac{H^2}{8\pi} V = \varkappa_H \varkappa_e A(\gamma, \nu) \frac{R^2 \Phi_\nu}{H^{3/2}}, \tag{5.70}$$

d'où

$$H = \left[48 \varkappa_H \varkappa_e A(\gamma, \nu) \frac{\Phi_\nu}{R \varphi^3} \right]^{2/7}, \tag{5.71}$$

où $A(\gamma, \nu)$ est défini par les expressions (5.66); $V = 1/6\pi L^3$ est le volume; $\varphi = L/R$, la dimension angulaire de la source. Alors, l'énergie totale des rayons cosmiques de la source vaut

$$W_{\text{r.c.}} = \varkappa_e W_e = \varkappa_H^{-1} W_H = 0{,}19 \varkappa_H^{-3/7} [\varkappa_e A(\gamma, \nu) \Phi_\nu R^2]^{4/7} (R\varphi)^{9/7}. \tag{5.72}$$

C'est à l'aide des formules indiquées et sous l'hypothèse que $\varkappa_H \sim 1$ et $\varkappa_e \sim 10^2$ qu'on a obtenu les estimations de $W_{\text{r.c.}}$, W_e et

W_H de la Galaxie, des sources galactiques, du rayonnement radio non thermique (en premier lieu, dans les enveloppes des supernovae) et d'autres galaxies normales, radiogalaxies et quasars. L'importance de tous ces résultats est difficile à surestimer (cf. notamment, [38, 39, 52] et chapitres 15 et 17). Par ailleurs, pour rendre possible le développement de l'astrophysique des rayons cosmiques, il est très important de trouver le moyen de calculer indépendamment $W_{r.c.}$, W_e et W_H, ou dans certains cas, ne serait-ce que l'une de ces grandeurs sans introduire des hypothèses sur la valeur d'une autre (ou, ce qui revient presque au même, sans donner les coefficients $\varkappa_H$ et $\varkappa_e$). En principe ceci est possible. Ainsi la composante proton-noyau des rayons cosmiques des sources éloignées peut être déterminée par la méthode de l'astronomie des rayons gamma, et notamment, par l'intensité des rayons gamma formés par désintégration des mésons π^0 qui à leur tour sont produits dans la source par les collisions entre les rayons cosmiques (protons et noyaux) et les noyaux du gaz interstellaire. On peut espérer que dans un proche avenir une telle méthode sera fructueuse [51] (pour plus de détails, cf. chapitre 17). En principe, il est également possible de déterminer simultanément W_e et W_H (ou H), par exemple, en combinant les mesures dans les gammes des rayons radio et X. Plus précisément il s'agit du cas (parfaitement possible) lorsque le rayonnement radio d'un objet (par exemple, d'une radiogalaxie) est un rayonnement synchrotron, alors que les rayons X qu'elle émet sont dus à la diffusion Compton inverse des électrons relativistes dans un champ connu de rayonnement optique, infrarouge ou radio. Alors, si c'est les mêmes électrons relativistes, qui sont responsables des rayonnements radio et X (autrement dit, dans le cas du choix convenable des marges de fréquences), la valeur du flux des rayons X (si la distance à la source, ses dimensions et la densité d'énergie du rayonnement diffuseur d'électrons, disons, du rayonnement infrarouge, sont connus) permet de définir les caractéristiques des électrons relativistes de la source (cf. chapitre 16). Ensuite, les données sur le flux et le spectre du rayonnement synchrotron peuvent également permettre de trouver le champ H de la source. Malheureusement, ce procédé n'a pu jusqu'à présent être appliqué à aucune source, le développement de l'astronomie des rayons X étant insuffisant et les difficultés liées à la démonstration de la nature comptonienne des rayons X trop grandes. Pourtant, on peut espérer que le succès nous attend dans cette voie aussi.

A titre de conclusion faisons encore quelques remarques sur les limites d'application de la théorie exposée du rayonnement synchrotron, ainsi que sur le rayonnement Compton synchrotron.

Dans ce qui précède nous avons supposé que notre examen porte seulement sur les électrons ultra-relativistes, l'angle χ entre $\mathbf{k}$ (ou $\mathbf{v}$, ce qui dans notre cas revient au même) et $\mathbf{H} \equiv \mathbf{H}_0$ étant assez grand

(condition (5.1)) et que la théorie classique du rayonnement peut être appliquée, c.-à-d. nous avons admis que la condition *)

$$H \ll \frac{m^2c^3}{e\hbar} \cdot \frac{mc^2}{\mathscr{E}} = 4{,}4 \cdot 10^{13} \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \qquad (4.30)$$

soit observée.

Dans plusieurs cas nous avons adopté également que la force de réaction est petite devant la force de Lorentz, c.-à-d. utilisé la condition

$$\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \ll \sqrt{\frac{m^2c^4}{e^3H\sin^2\chi}} \sim \frac{10^8}{\sqrt{H\sin^2\chi}}\,. \qquad (4.44)$$

Si cette dernière condition n'est pas respectée, l'électron se déplace non pas suivant une circonférence, mais suivant une courbe nettement spiralée de rayon décroissant (cf., par exemple, [33]). Ceci ne s'observe pourtant qu'à la distance entre les impulsions successives (cf. fig. 5.1 ; il en est de même pour le mouvement hélicoïdal). Quant à la forme de chaque impulsion, la condition (4.44) étant perturbée et (4.30) observée, elle ne change pas. Il en est ainsi évidemment parce que l'électron émet dans la direction donnée seulement pendant le temps $\Delta t' \sim mc/eH_\perp$. Pendant ce temps, les pertes sont petites sous la condition.

$$\mathscr{R}\,\Delta t' \sim \frac{e^4H_\perp^2}{m^2c^3}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2\frac{mc}{eH_\perp} \ll \mathscr{E},$$

ce qui conduit à l'inégalité

$$H_\perp = H\sin\chi \ll \frac{m^2c^4}{e^3}\,\frac{mc^2}{\mathscr{E}}, \qquad (4.27a)$$

qui, au fond, coïncide avec la condition (4.27) obtenue sans qu'on fasse distinction entre les champs H et $H_\perp$; comme nous l'avons dit dans la note ci-dessous, on peut en dire autant de la condition (4.30). Si cette dernière est respectée, il en résulte que l'inégalité (4.27a) dont le second membre est $1/\alpha = \hbar c/e^2 \approx 137$ fois plus grand, est respectée à l'avance elle aussi. Ainsi, même si la condition (4.44) est violée, alors que (4.30) est observée, la forme du spectre continu du rayonnement synchrotron (c.-à-d. pour le cas où la moyenne est prise suivant les harmoniques) ne change pas.

*) La condition (4.30) qui prévoit le remplacement de H par $H_\perp = H\sin\chi$ nécessaire dans le cas général, est équivalente à l'inégalité $\hbar\omega_m \ll \mathscr{E}$, où $\omega_m \sim (eH_\perp/mc)(\mathscr{E}/mc^2)^2$ est la pulsation associée au maximum du spectre du rayonnement synchrotron. Il est donc clair que pour la « queue » du rayonnement synchrotron, c.-à-d. dans le domaine des pulsations $\omega \gg \omega_m$ la condition (4.30) doit être remplacée par une condition plus serrée.

Dans ce qui précède nous avons encore complètement négligé l'influence éventuelle du milieu (plasma) dans lequel se déplacent les électrons rayonnants. Dans certains cas son action est très importante et peut complètement modifier la situation (cf. chapitre 6).

En examinant le rayonnement d'un ensemble des électrons relativistes nous avons admis qu'ils émettent tout à fait indépendamment l'un de l'autre et se trouvent dans le champ magnétique donné H. Or, lorsque la concentration des particules rayonnantes est grande, premièrement, elles peuvent modifier le champ extérieur (dans le cas d'un champ magnétique il s'agit de l'effet diamagnétique et de l'induction mutuelle ; cf. section 6 de [31].) Deuxièmement, et ceci d'habitude importe bien plus, pour une concentration des particules émettrices suffisamment grande, il faut tenir compte de la réabsorption, c.-à-d. dans le cas d'un mécanisme synchrotron, de l'absorption du rayonnement par les électrons relativistes eux-mêmes. On parlera de cet effet au chapitre 9.

Ainsi, la théorie exposée du rayonnement synchrotron ne peut être appliquée que si l'on observe toute une série de conditions, ce qui ne dévalorise nullement la théorie puisque ces conditions sont souvent remplies. Mais dans le cas discuté, tout comme en physique en général, il est très important de tenir compte des restrictions et des conditions d'application. De nombreuses erreurs qui se sont glissées dans la littérature (et celles qui n'ont pas « été rendues publiques », sont assurément bien plus nombreuses!) proviennent précisément du fait que les limites dans lesquelles telles ou telles formules et expressions peuvent être utilisées ont été négligées. Il est tout aussi important qu'en rejetant une ou plusieurs restrictions, on peut souvent révéler des possibilités intéressantes, découvrir de nouveaux mécanismes et effets.

Parmi les conditions qui justifient la théorie du rayonnement synchrotron, il y a l'hypothèse que son champ magnétique est homogène et constant. Nous n'avons pas repris ci-dessus cette condition puisqu'au fond c'est une condition de départ qui peut être considérée comme une définition : nous avons appelé rayonnement synchrotron le rayonnement des particules (charges) ultra-relativistes qui se déplacent dans un espace homogène et dans un champ magnétique **H** constant dans le temps. Pourtant, une question se pose naturellement, à savoir, si le rayonnement a lieu dans un champ **H** (**r**, *t*) ou bien dans un champ électromagnétique **E** (**r**, *t*), **H** (**r**, *t*).

Des considérations générales ont rendu déjà évident et nous l'avons souligné encore au début du chapitre 4, que de nombreux traits caractéristiques du rayonnement des particules relativistes ne sont pas liés au type du champ électromagnétique extérieur où se déplace la particule. En plus du mouvement dans un champ constant **H** et, par conséquent, du rayonnement de freinage magnétique, un intérêt particulièrement grand présente le rayonnement

d'une charge qui se déplace dans le champ d'une onde électromagnétique avec une pulsation $\omega_0 = 2\pi\nu_0$. Le rayonnement aux pulsations ω ainsi produit s'appelle d'habitude rayonnement diffus, du fait que dans ce cas on peut parler de la diffusion de l'onde de pulsation ω_0 sur une particule (charge) en mouvement. Aux hautes énergies, lorsque les pulsations ω ou ω_0 sont comparables au quotient de l'énergie au repos mc^2 d'une particule par $\hbar$, on dit généralement qu'on est en présence d'une diffusion Compton ou d'une diffusion Compton inverse *). Ce processus sera étudié au chapitre 16. Pour le moment, mentionnons le cas particulier intéressant qui, dans le cadre des applications astrophysiques, n'a attiré l'attention que ces dernières années, et notamment, après la découverte des pulsars. Il s'agit du mouvement et du rayonnement (diffusion) des particules dans le champ d'une onde électromagnétique de très basse pulsation, par exemple, d'une onde de pulsation $\Omega \equiv \omega_0$ émise par un pulsar ou une étoile à neutrons magnétique en rotation (pour les pulsars connus $\Omega \leqslant 200$ s^{-1} et dans la plupart des cas $\Omega = 2\pi/T_0 \sim$ $\sim 1 - 10$ s^{-1}; cf. [16, 53]). L'aspect particulier de ce cas peut être compris au moins partiellement, en considérant le mouvement d'une charge dans un champ magnétique variable $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos \Omega t$ (on sait que dans des conditions déterminées, le champ électrique induit peut être petit devant le champ magnétique). Il est alors clair qu'une particule se déplace pratiquement comme dans un champ constant tant que

$$\frac{\omega_H^*}{\Omega} = \frac{eH_0}{mc}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)\frac{1}{\Omega} \gg 1. \tag{5.73}$$

Quant à son rayonnement, il sera le même que dans un champ constant sous la condition

$$f = \frac{eH_{0,\perp}}{mc\Omega} \gg 1. \tag{5.74}$$

Il suffit de noter que sous cette condition, la durée caractéristique du rayonnement émis dans la direction de l'observateur $\Delta t' \sim$ $\sim mc/eH_{0,\perp}$ est petite devant la période d'onde $T_0 = 2\pi/\Omega$.

Dans la zone d'onde d'une source (disons, d'un pulsar), le champ électrique de l'onde $E = H$, et même sous les conditions (5.73) ou (5.74), le rayonnement et le mouvement diffèrent de ceux qui ont

*) Le plus souvent on appelle diffusion Compton la diffusion d'un photon sur une particule au repos. Quant à la diffusion Compton inverse, c'est la diffusion d'un photon mou sur une particule animée d'un mouvement rapide, c.-à-d. sur une particule de haute énergie. Il est parfaitement évident que dans les deux cas il s'agit au fond, du même processus qui se produit dans le système de référence donné sous les « conditions initiales » différentes, ou du même processus de diffusion qui se produit dans des systèmes différents, se déplaçant l'un par rapport à l'autre à une vitesse arbitraire $v < c$.

lieu dans un champ purement magnétique. De toute façon, sous la condition (5.74) et même pour $f \gg 1$, le rayonnement s'apparente pour beaucoup au rayonnement synchrotron; on lui donne parfois le nom de « rayonnement synchrotron Compton » (cf. [54-56]). Le rayonnement synchrotron Compton diffère surtout du rayonnement synchrotron par sa polarisation circulaire dont le degré est en général d'ordre $1/f$ (le degré de la polarisation circulaire dépend du caractère de la polarisation de l'onde basse fréquence; pour plus de détails, cf. [54-56]); par contre, la polarisation circulaire du rayonnement synchrotron, est définie en général par le paramètre $\xi = mc^2/\mathcal{E}$ (cf. plus haut; il s'agit du rayonnement de l'ensemble des particules). Certainement, le rayonnement synchrotron Compton mérite une analyse détaillée, mais nous allons nous borner aux remarques déjà faites et aux références.

CHAPITRE 6

ELECTRODYNAMIQUE DU MILIEU CONTINU

Formalisme hamiltonien. Photons dans un milieu. Rayonnement de l'oscillateur dans des milieux isotrope et anisotrope. Rayonnement Tchérenkov. Effet Doppler. Oscillateur dans un milieu. Traits caractéristiques du rayonnement des particules qui se déplacent dans un milieu. Rayonnement synchrotron dans le plasma

Si une source, une charge, par exemple, se déplace non pas dans le vide mais dans un milieu, l'allure du rayonnement peut changer du tout au tout. Il suffit de dire que pour le mouvement donné de la charge, elle peut en général tout en rayonnant dans le vide, ne rien émettre dans un milieu, et inversement, en l'absence du rayonnement dans le vide, émettre dans un milieu (dans ce dernier cas il s'agit en premier lieu du rayonnement d'une charge animée d'un mouvement uniforme. Pour exposer la théorie du rayonnement dans un milieu (en tenant compte de l'influence de ce dernier) le plus logique est de se baser sur l'électrodynamique générale des milieux continus ou, suivant une autre terminologie, sur l'électrodynamique macroscopique. Mais dans le cadre de notre cours il semble plus naturel d'aborder la théorie du rayonnement dans un milieu tout de suite après la théorie du rayonnement dans le vide. Pour ce qui est des principes de l'électrodynamique des milieux continus, bien qu'on suppose qu'ils soient connus du lecteur, nous allons rappeler les formules principales. Enfin, ce qui nous intéresse surtout ici, ce sont certaines questions de principe et le fond physique de la question. C'est pourquoi nous ne nous poserons pas pour tâche d'obtenir la généralisation maximale, et dans les cas courants, négligerons en particulier la dispersion spatiale en admettant souvent que le milieu est isotrope et transparent, etc. Quant aux questions plus générales de l'électrodynamique des milieux continus, nous en discuterons encore dans les chapitres 10, 12 (cf. également [57]).

Les équations du champ dans un milieu peuvent s'écrire sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},\\ \operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi\rho,\\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},\\ \operatorname{div}\mathbf{H} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

Ces équations diffèrent de (1.1) par le champ électrique **E** remplacé dans les deux premières équations par l'induction électrique $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$. On admet que le milieu n'est pas magnétique (aussi, l'induction magnétique $\mathbf{B} = \mathbf{H}$; si l'on tient compte de la dispersion spatiale, on peut également faire de même pour un milieu magnétique; cf. [57] et chapitre 10). De plus, comme partout dans ce livre nous étudions seulement le milieu au repos (dans le système du laboratoire utilisé la vitesse du milieu est identiquement nulle). Enfin, si dans (1.1) la densité du courant se notait $\rho\mathbf{v}$, dans (6.1) on a introduit la densité du courant **j**. Les deux premières équations de (6.1) amènent la relation (loi de conservation de la charge)

$$\operatorname{div}\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \qquad (6.2)$$

On sait que le système (6.1) n'est suffisamment défini que si on exprime **D** par **E** (ou en principe, par **E** et **H**). Dans un milieu isotrope sans dispersion spatiale et fréquentielle

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},\ t) = \varepsilon(\mathbf{r},\ t)\,\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t). \qquad (6.3)$$

Si le milieu est homogène dans l'espace et constant dans le temps, $\varepsilon = \text{const}$. Pour les fréquences optiques et plus basses la dispersion spatiale est généralement faible et nous n'allons pas en tenir compte ici. Quant à la dispersion fréquentielle, elle est en général plus ou moins importante. Ce qui signifie que pour un milieu isotrope

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},\ t) = \int_{-\infty}^{t} \hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\ t,\ t')\,\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t')\,dt', \qquad (6.4)$$

où l'intégration sur t traduit la prescription imposée par le principe de causalité; si les propriétés du milieu ne changent pas avec le temps, le noyau $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\ t,\ t') = \hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\ t - t')$. Alors, en introduisant les composantes de Fourier pour **E**,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r},\ \omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)\exp(i\omega t)\,dt, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r},\ t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r},\ \omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega \end{aligned}\right\} \qquad (6.5)$$

et d'une façon analogue pour **D**, on obtient

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},\ \omega) = \varepsilon(\mathbf{r},\ \omega)\,\mathbf{E}(\mathbf{r},\ \omega),\quad \varepsilon(\mathbf{r},\ \omega) = \int_{0}^{\infty} \hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\ \tau)\exp(i\omega\tau)\,d\tau. \qquad (6.6)$$

Dans un milieu homogène $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\omega)$. Dans un milieu anisotrope (sans dispersion spatiale et dans le cas où les propriétés du milieu sont indépendantes du temps

$$D_i(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \omega) E_j(\mathbf{r}, \omega), \tag{6.7}$$

où ε_{ij} est le tenseur de second ordre; comme toujours on suppose que la sommation se fait suivant les indices deux fois répétés.

En utilisant les relations (6.6) ou (6.7) il faut naturellement dans (6.1) passer également à la représentation de Fourier. Mais ceci n'est pas toujours commode puisque, par exemple, dans le formalisme hamiltonien utilisé dans ce qui suit, figurent explicitement les dérivées par rapport au temps. En même temps il s'avère qu'en appliquant le formalisme hamiltonien, on peut en général, d'abord négliger tout à fait la dispersion fréquentielle (c.-à-d. la relation entre ε_{ij} ou ε et ω) et puis, dans le résultat final, remplacer l'indice de réfraction n (dans le cas isotrope, $n = \sqrt{\varepsilon}$) par $n(\omega)$ et par là-même tenir complètement compte de la dispersion fréquentielle [58-60]. Nous allons encore en parler, mais plus loin dans ce chapitre nous admettrons que dans les équations du champ, $\varepsilon = \text{const}$ (ou $\varepsilon_{ij} = \text{const}$), ce qui ne concerne directement que le milieu homogène sans dispersion. Par ailleurs, nous adoptons que la quantité ε est réelle et positive (absence d'absorption et de réflexion interne totale; cf. également plus loin).

En introduisant de la façon habituelle les potentiels

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{6.8}$$

on déduit de (6.1) pour un milieu isotrope

$$\left.\begin{aligned} \Delta\mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A}\right) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \\ \Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho. \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

Si on utilise la jauge

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \tag{6.10}$$

il vient

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \Delta\varphi - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho. \tag{6.11}$$

Avec la jauge $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, on obtient

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \Delta\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \tag{6.12}$$

et

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{tr} + \mathbf{E}_l, \quad \operatorname{div}\mathbf{E}_{tr} = 0, \quad \mathbf{E}_{tr} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{E}_l = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{6.13}$$

Le formalisme hamiltonien de l'électrodynamique des milieux continus se déduit tout à fait de façon analogue à celui du vide (cf. chapitre 1). Plus précisément, on utilise les expressions (6.12), (6.13) et les développements (on pose que $\varepsilon \neq 0$)

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A} = \sum_{\lambda,\, i=1,\,2} q_{\lambda i}\mathbf{A}_{\lambda i}, \quad \mathbf{A}_{\lambda 1} = \sqrt{8\pi}\,\frac{c}{n}\,\mathbf{e}_\lambda \cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}) \\ &\mathbf{A}_{\lambda 2} = \sqrt{8\pi}\,\frac{c}{n}\,\mathbf{e}_\lambda \sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}), \quad \mathbf{e}_\lambda\mathbf{k}_\lambda = 0, \quad \mathbf{e}_\lambda = 1, \quad n = \sqrt{\varepsilon}, \\ &\int \mathbf{A}_{\lambda i}\mathbf{A}_{\mu j}\,dV = \frac{4\pi c^2}{\varepsilon}\,\delta_{\lambda\mu}\delta_{ij}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.14)$$

ou

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A} = \sum_\lambda (q_\lambda \mathbf{A}_\lambda + q_\lambda^* \mathbf{A}_\lambda^*), \quad \mathbf{A}_\lambda = \sqrt{4\pi}\,\frac{c}{n}\,\mathbf{e}_\lambda \exp(i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}), \\ &\mathbf{e}_\lambda\mathbf{k}_\lambda = 0, \quad n = \sqrt{\varepsilon}, \quad \int \mathbf{A}_\lambda \mathbf{A}_\mu^*\,dV = 4\pi\frac{c^2}{\varepsilon}\,\delta_{\lambda\mu}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.15)$$

Bien entendu, les deux développements sont équivalents; dans tel ou tel cas il est plus commode d'employer l'un ou l'autre. Certaines réserves du chapitre 1, celles, par exemple, relatives à l'existence de deux vecteurs de polarisation $\mathbf{e}_\lambda$, concernent également les développements (6.14) et (6.15).

On voit aisément que l'énergie du champ transversal

$$\mathscr{H}_{tr} = \int \frac{\varepsilon E_{tr}^2 + H^2}{8\pi}\,dV = 1/2 \sum_{\lambda,\, i} (p_{\lambda i}^2 + \omega_\lambda^2 q_{\lambda i}^2) = $$
$$= \sum_\lambda (p_\lambda p_\lambda^* + \omega_\lambda^2 q_\lambda q_\lambda^*), \qquad (6.16)$$

où

$$p_{\lambda i} = \dot{q}_{\lambda i}, \quad p_\lambda = \dot{q}_\lambda, \quad \omega_\lambda^2 = \frac{c^2}{\varepsilon}\,k_\lambda^2 \equiv \frac{c^2}{n^2}\,k_\lambda^2. \qquad (6.17)$$

Ensuite, les équations du mouvement pour $q_{\lambda i}$ ou q_λ se déduisent de (6.12) de la même façon que pour le vide et sont de la forme

$$\ddot{q}_{\lambda i} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda i} = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}\mathbf{A}_{\lambda i}\,dV, \qquad (6.18)$$

$$\ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}\mathbf{A}_\lambda^*\,dV. \qquad (6.19)$$

Le cas le plus général envisagé ci-dessous, correspond à la particule de charge e, de moment électrique $\mathbf{p}(t)$ et de moment magnétique $\boldsymbol{\mu}(t)$. De plus, si on peut poser que la particule est ponctuelle,

ce qui est admissible pour le calcul de l'énergie rayonnée, et en général, du champ radiant, alors

$$\mathbf{j} = \rho_e \mathbf{v} + c \operatorname{rot} \mathfrak{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + c \operatorname{rot}\{\mu\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\} + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\{\mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\}, \qquad (6.20)$$

où $\mathbf{r}_i(t)$ est le rayon vecteur de la charge et $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_i(t)$. Pour une charge (en l'absence des moments, c.-à-d. en admettant dans (6.20) que $\mathbf{p} = 0$ et $\mu = 0$), on obtient de (6.18), (6.19)

$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} &= \sqrt{8\pi}\,\frac{e}{n}(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{v}) \cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}_i), \\ \ddot{q}_{\lambda 2} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 2} &= \sqrt{8\pi}\,\frac{e}{n}(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{v}) \sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}_i). \end{aligned}\right\} \qquad (6.21)$$

$$\ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda = \sqrt{4\pi}\,\frac{e}{n}(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{v}) \exp - (i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}_i). \qquad (6.22)$$

Par rapport au vide, ce qui importe ici ce n'est pas tant l'apparition dans les seconds membres du facteur supplémentaire $1/n$, que la modification de la relation entre ω_λ et k_λ, c.-à-d. l'apparition du facteur $\varepsilon^{-1} = n^{-2}$ dans la relation $\omega_\lambda^2 = (c^2/n^2)\, k_\lambda^2$ (cf. (6.17)). Le sens d'un tel remplacement est évident : dans un milieu de permittivité réelle $\varepsilon > 0$ les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de phase

$$v_{\text{ph}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n}. \qquad (6.23)$$

Ce résultat est certainement connu du lecteur, mais rappelons quand même que les équations homogènes (6.11) ou (6.12), c.-à-d. les équations sans charges et courants, le rendent immédiat. Ainsi, par exemple, dans ce cas (6.22) est l'équation des oscillations libres d'un oscillateur

$$\ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda = 0, \quad \omega_\lambda = \frac{c}{n} k_\lambda, \quad q_\lambda = c_1 \exp(i\omega_\lambda t) + c_2 \exp(-i\omega_\lambda t); \qquad (6.24)$$

il est donc évident qu'en l'absence de charges et de courants (6.15) est un développement par rapport aux ondes planes du type $\exp[\pm i(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r} - \frac{c}{n} k_\lambda t)]$ c.-à-d. aux ondes qui se propagent à la vitesse de phase (6.23).

Pour un champ radiant libre dans un milieu la fonction de Hamilton est de la forme (6.16) et la quantification se fait de la même manière que dans le vide (ceci se rapporte également, entre autres, au champ transversal dans un milieu en présence de courants et de charges : la quantification correspond au remplacement de $p_{\lambda i}$ et

$q_{\lambda t}$ par les opérateurs vérifiant les relations commutatives (1.45). Il en résulte que le développement d'un champ libre dans un milieu par rapport aux ondes du type exp $(\pm i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})$ (cf. (6.15)) conduit à la notion de « photons dans le milieu » d'énergie E_λ et d'impulsion $\mathbf{p}_\lambda$

$$E_\lambda = \hbar\omega_\lambda, \quad \mathbf{p}_\lambda = \hbar\mathbf{k}_\lambda, \quad p_\lambda = \frac{\hbar\omega_\lambda n}{c} \tag{6.25}$$

Pour l'énergie, cette conclusion est évidente (cf. 1.43), (1.49) et (6.16)). Dans le cas de l'impulsion, il faudrait trouver la valeur propre de l'opérateur d'impulsion du champ électromagnétique, mais l'expression correspondante s'écrivait pendant longtemps sous des formes différentes, la forme correcte faisant objet de discussion (il s'agit des tenseurs énergie-impulsion de Minkowski et d'Abraham). Actuellement, cette question est élucidée et nous l'examinerons au chapitre 12. Heureusement, sa résolution (qui impose, pourtant, une étude spéciale) est inutile pour résoudre les problèmes posés généralement par la théorie quantique du rayonnement dans un milieu [61-63]. C'est qu'en calculant les éléments matriciels du passage qui déterminent la probabilité de tels ou tels processus de radiation, l'opérateur du potentiel vectoriel fait évidemment intervenir, les facteurs de la forme q_λ exp $(i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})$; ces facteurs figurent de pair avec les facteurs associés aux fonctions d'onde de la particule, c.-à-d. pour les particules libres aux facteurs $\exp(i\mathbf{pr}/\hbar)$. Il est donc clair que suivant les lois de conservation de l'impulsion, l'apport du rayonnement dans un milieu aussi bien que dans le vide vaut $\hbar\mathbf{k}_\lambda$. Comme nous l'avons vu, dans un milieu, $\hbar k_\lambda = \hbar\omega_\lambda n/c$, ce qui conduit précisément à (6.25). Ainsi, d'une façon tout à fait indépendante de la question de la forme du tenseur énergie-impulsion dans un milieu, il est clair que l'énergie des « photons dans un milieu » qui figurent au fond pour les mêmes raisons que les photons dans le vide, est $\hbar\omega$, et leur impulsion $\hbar\omega n/c$ (pour plus de détails, cf. [151]; il s'agissait ci-dessus d'un milieu isotrope, mais la généralisation au cas d'un milieu anisotrope est également évidente: $n = n_l$ est alors l'indice de réfraction d'une onde « normale » correspondante; cf. plus loin). L'utilisation des idées quantiques ou, plus précisément, du langage quantique, s'avère assez commode pour résoudre toute une série de questions de la théorie du rayonnement dans un milieu. Nous y reviendrons au chapitre 7.

Pour le moment, appliquons le formalisme hamiltonien (c.-à-d. au fond, le développement suivant les ondes planes) pour résoudre plusieurs problèmes de la théorie du rayonnement dans un milieu.

Commençons par le rayonnement de l'oscillateur étudié déjà pour le cas du vide au premier chapitre. En posant dans (6.21)

$$\mathbf{r}_l \equiv \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 \sin\omega_0 t, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}_0 \cos\omega_0 t = \mathbf{a}_0\omega_0 \cos\omega_0 t,$$

$$a_0 \ll \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{n\omega_0},$$

où $\lambda = 2\pi c/n\omega_0$ est la longueur d'onde du rayonnement émis par l'oscillateur, on obtient l'équation (cf. (1.80))

$$\ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} = \sqrt{8\pi}\,\frac{e}{n}\,(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}_0)\cos\omega_0 t. \qquad (6.26)$$

Tous les calculs ultérieurs se font de façon parfaitement analogue au cas du vide, mais le nombre d'états est maintenant

$$\frac{k^2 dk\, d\Omega}{(2\pi)^3} = \frac{n^3\omega^2\, d\omega\, d\Omega}{(2\pi c)^3} \qquad (6.27)$$

et finalement *)

$$\frac{d\mathcal{H}_{tr}}{dt} = \frac{\mathcal{H}_{tr}}{t} \equiv \frac{dW_s}{dt} = \frac{e^2 a_0^2 \omega_0^4 n}{8\pi c^3}\sin^2\theta\, d\Omega. \qquad (6.28)$$

La seule différence entre (6.28) et la formule (1.85) relative au vide est l'apparition du facteur n ((6.27) compte par rapport au cas du vide le facteur supplémentaire n^3, mais comme on le voit de (6.26), l'expression de q_λ^2 contiendra un facteur supplémentaire $1/n^2$). Pour tenir compte de la dispersion fréquentielle il faut poser $n = n(\omega_0)$. Cette conclusion peut être justifiée d'abord quelque peu par le biais, et notamment, en comparant les résultats obtenus par l'application du formalisme hamiltonien et d'autres méthodes. Puis, si $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, les équations du champ peuvent s'écrire sous leur forme antérieure, disons sous la forme (6.11) ou (6.12), mais en adoptant que ε est un opérateur $\hat{\varepsilon}$ tel que $\hat{\varepsilon}\exp(-i\omega t) = \hat{\varepsilon}(\omega)\exp(-i\omega t)$. Ensuite, dans les équations (6.18), (6.19) figure avant l'intégration le vecteur d'onde $\mathbf{k}_\lambda$ et on peut admettre que $n = n(k_\lambda)$, $\omega_\lambda = ck_\lambda/n(k_\lambda)$. Pour le champ radiant seulement, la pulsation $\omega = \omega_\lambda = ck/n$, c.-à-d. ω et k sont liés par la relation de dispersion usuelle. Quant au rayonnement, nous n'y passons que tout à la fin en calculant l'énergie $\mathcal{H}_{tr}$ pour les grands t (cf. chapitre premier et (6.28)). C'est donc pourquoi, comme on peut l'établir (cf. § 25 de [45] et [58-60]), la dispersion fréquentielle ne doit être mise en ligne de compte que dans les expressions finales. Par ailleurs, certainement, le fait que le formalisme hamiltonien ne tient pas automatiquement compte de la dispersion est son côté faible. Dans un certain sens on peut en dire autant du calcul non pas de l'énergie mais des champs eux-mêmes : il est parfois plus compliqué de le faire à l'aide du formalisme hamiltonien que par d'autres méthodes (cf. [59] qui tient compte également de l'absorp-

*) Comme nous l'avons déjà souligné au premier chapitre, la sommation des développements (6.14), (6.15) se fait suivant la demi-sphère des directions $\mathbf{k}_\lambda$. Donc, pour passer à l'intégration sur les angles, il faut introduire le facteur supplémentaire 1/2 (si, comme d'habitude, dans les coordonnées sphériques, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, ce qui correspond à la sphère des directions toute entière; bien entendu au premier chapitre on a déjà tenu compte de cette circonstance).

tion). Ceci n'est pourtant vrai, en général, que pour un milieu isotrope, où les « autres méthodes » sont en effet bien connues. Pour ce qui est du milieu anisotrope, le formalisme hamiltonien ne le cède probablement en rien aux autres méthodes, au moins en ce qui concerne sa généralisation et sa simplicité.

On en reparlera encore, mais d'abord examinons la question du rayonnement dans un milieu isotrope d'un doublet électrique et magnétique oscillant. Dans le premier cas, le problème coïncide avec celui qui vient d'être examiné, mais nous voulons profiter ici de l'expression (6.20). Si on admet que dans cette dernière la charge de la particule est nulle et que la particule est au repos avec $\mathbf{r}_l = 0$, après avoir effectué le remplacement dans (6.18) on obtient l'équation ($\dot{\mathbf{p}} \equiv d\mathbf{p}/dt$)

$$\ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} = \frac{\sqrt{8\pi}}{n} (\mathbf{e}_\lambda \dot{\mathbf{p}}), \tag{6.29}$$

$$\ddot{q}_{\lambda 2} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 2} = \frac{\sqrt{8\pi}\, c}{n} \mathbf{e}_\lambda [\boldsymbol{\mu} \mathbf{k}_\lambda]. \tag{6.30}$$

Si on pose $\mathbf{p} = e\mathbf{r} = e\mathbf{a}_0 \sin \omega_0 t$, alors comme il fallait s'attendre, l'équation (6.29) se confond avec (6.26). Pour $n = 1$, l'équation (6.30) coïncide avec (2.19). Posons $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \sin \omega_0 t$ et trouvons d'une façon parfaitement analogue au cas de l'oscillateur, la puissance rayonnée*)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}_{tr}}{dt} &\equiv \frac{dW_s}{dt} = \frac{\mu_0^2 \omega_0^4 n^3}{8\pi c^3} \sin^2\theta \, d\Omega, \\ \frac{dW}{dt} &= \int \frac{dW_s}{dt} d\Omega = \frac{\mu_0^2 \omega_0^4 n^3}{3c^3}. \end{aligned}\right\} \tag{6.31}$$

Pour le vide ces expressions s'obtiennent tout de suite à partir des formules bien connues du rayonnement dipolaire (électrique et magnétique) (cf. §§ 67, 71 de [6], ainsi que (2.23)). Pour un milieu isotrope le calcul peut, certes, se faire aussi de la façon habituelle.

Le résultat (6.31) est donné en particulier pour insister sur l'apparition du facteur n^3 alors que dans le cas d'un doublet électrique on a le facteur n. L'influence de ces facteurs peut être énorme. Par exemple, pour certaines ondes normales (d'indice l) et pulsations ω, l'indice de réfraction $n_l(\omega)$ d'un plasma plongé dans un champ magnétique (cette dernière circonstance définit l'anisotropie, ce qui importe peu ici) peut atteindre $n \sim 10^2$ à 10^3, et formellement, des valeurs encore plus grandes (pour plus de détails, cf. [64] et chapitre 11). Pour un pulsar, si on envisage son rayonnement dipolaire magnétique dans le milieu, compte tenu de la circonstance indiquée et de l'apparition dans (6.31) du facteur n^3, l'estimation

*) Il est évident que $\mathbf{e}_{\lambda 1} [\boldsymbol{\mu} \mathbf{k}_\lambda] = -\boldsymbol{\mu} [\mathbf{e}_{\lambda 1} \mathbf{k}_\lambda] = -[\boldsymbol{\mu} \mathbf{e}_{\lambda 2}] \mathbf{k}_\lambda$, où $\mathbf{e}_{\lambda 1,2}$ sont les vecteurs de polarisation ($\mathbf{e}_{\lambda 1}\mathbf{e}_{\lambda 2} = 0$, $\mathbf{e}_{\lambda 1,2}\mathbf{k}_\lambda = 0$; cf. chapitre 1).

de l'influence du milieu change sensiblement les choses (cf. [16]; il ne faut pas oublier que l'approximation linéaire discutée qui consiste à utiliser la relation linéaire (6.4), (6.6) entre **D** et **E** au voisinage des pulsars, est en général inutilisable, mais c'est là une toute autre question). Un autre exemple tout aussi frappant de l'influence du milieu est le rayonnement d'un doublet dans un plasma isotrope, lorsque $n(\omega) = \sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}$; $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m$ (N est la concentration des électrons dans un plasma non relativiste considéré). Il est évident que dans ce cas, $n < 1$ et à la pulsation de l'oscillateur $\omega_0 \sim \omega_p$, l'indice n peut être proche de zéro; dans ce dernier cas, la puissance du rayonnement (6.28) et (6.31) diminue brusquement. Qui plus est, à la pulsation de l'oscillateur $\omega_0 < \omega_p$ la permittivité d'un plasma isotrope $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ est négative. Cela signifie que les ondes de pulsation $\omega_0 < \omega_p$ ne peuvent pas se propager: elles s'évanouissent dans l'espace suivant la loi $E = E_0 \exp(-\frac{\omega}{c}\sqrt{|\varepsilon|}z)$ (pour plus de détails, cf. [64] et chapitre 11). Naturellement, dans ces conditions la source ne rayonne pas.

Examinons maintenant la question du rayonnement dans un milieu anisotrope, en admettant pour simplifier que le tenseur ε_{ij} est réel et réduit aux axes principaux fixés. Alors ($x \to 1$, $y \to 2$, $z \to 3$),

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1, \quad D_2 = \varepsilon_2 E_2, \quad D_3 = \varepsilon_3 E_3; \tag{6.32}$$

on utilisera aussi la notation $\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E}$, où $\hat{\varepsilon}$ est l'opérateur dont le sens est rendu clair par (6.32) ou par la relation plus générale (6.7).

Après l'introduction des potentiels (6.8), les équations du champ d'un milieu anisotrope se mettent sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varepsilon}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varepsilon}\operatorname{grad}\varphi &= -\frac{4\pi}{c}j, \\ \operatorname{div}\left(\hat{\varepsilon}\operatorname{grad}\varphi + \frac{\hat{\varepsilon}}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) &= -4\pi\rho. \end{aligned}\right\} \tag{6.33}$$

(6.33) montre clairement que ni la jauge de la forme (6.10), c.-à-d. la jauge $\operatorname{div}\mathbf{A} + (1/c)(\partial\hat{\varepsilon}\varphi/\partial t) = 0$, ni la jauge $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ n'apportent aucune simplification, et c'est pourquoi les méthodes soigneusement élaborées d'intégration de l'équation de d'Alembert (équation d'ondes) sont inapplicables. Il faut aussi ajouter qu'en présence du milieu la forme relativiste covariante de l'écriture est bien moins importante (lorsqu'on veut la conserver, on est amené dans le cas du vide à utiliser à une échelle particulièrement large la jauge de Lorentz $\partial A^i/\partial x^i = 0$; cf. (1.7a)). C'est que dans la grande majorité des cas on admet que le milieu est au repos (et il l'est réellement) dans le système du laboratoire. Alors, le système de référence associé au milieu est dans le sens physique explicitement dégagé et c'est dans un tel système qu'il est naturel de travailler.

Nous emploierons la jauge $\hat{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A}=0$, où pour le cas (6.32) et en négligeant la dispersion, nous poserons

$$\operatorname{div}\mathbf{C}=0,\quad \mathbf{C}=\hat{\varepsilon}\mathbf{A},\quad C_1=\varepsilon_1A_1,\quad C_2=\varepsilon_2A_2,\quad C_3=\varepsilon_3A_3. \tag{6.34}$$

Alors, les équations (6.33) se mettent sous la forme

$$\Delta\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{C}}{\partial t^2}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}-\frac{1}{c}\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi= =-\frac{4\pi}{c}\sum_i e_i\mathbf{v}_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t)), \tag{6.35}$$

$$\operatorname{div}(\hat{\varepsilon}\operatorname{grad}\varphi)=-4\pi\sum_i e_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t)), \tag{6.36}$$

où, pour fixer les idées, on envisage les charges ponctuelles e_i (le rayon vecteur de la charge $\mathbf{r}_i(t)=\{x_i,\ y_i,\ z_i\}$, de plus $\dot{\mathbf{r}}_i=\mathbf{v}_i$).

L'équation (6.36) est de la même forme que celle de l'électrostatique, et sa solution s'écrit

$$\varphi=\sum_i\frac{e_i}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\sqrt{(x-x_i)^2/\varepsilon_1+(y-y_i)^2/\varepsilon_2+(z-z_i)^2/\varepsilon_3}} \tag{6.37}$$

On montre également sans peine que dans l'espace tout entier l'énergie du champ (sous la condition que le champ lui-même diminue convenablement à l'infini) vaut

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{H}&=\frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{ED}+H^2)\,dV=\mathscr{H}_{tr}+\mathscr{H}_l,\\ \mathscr{H}_{tr}&=\frac{1}{8\pi}\int\left\{\frac{\hat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+(\operatorname{rot}\mathbf{A})^2\right\}dV,\\ \mathscr{H}_l&=\frac{1}{8\pi}\int(\hat{\varepsilon}\operatorname{grad}\varphi)\operatorname{grad}\varphi\,dV.\end{aligned}\right\} \tag{6.38}$$

Ici

$$\mathscr{H}_l=\frac{1}{8\pi}\int\left(\varepsilon_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\varepsilon_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\varepsilon_3\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)dV= =1/2\sum_{ij}\frac{e_ie_j}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\sqrt{(x_i-x_j)^2/\varepsilon_1+(y_i-y_j)^2/\varepsilon_2+(z_i-z_j)^2/\varepsilon_3}} \tag{6.39}$$

est la somme des énergies de l'interaction coulombienne instantanée des charges (on ne tient pas compte de leur énergie propre). L'énergie $\mathscr{H}_{tr}$ est un analogue de l'énergie du champ transversal et on peut également l'écrire sous la forme

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{H}_{tr}&=-\frac{1}{8\pi c}\int\mathbf{D}_{tr}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\,dV+\frac{1}{8\pi}\int(\operatorname{rot}\mathbf{A})^2\,dV,\\ \mathbf{D}_{tr}&=-\frac{\hat{\varepsilon}}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\equiv-\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial t},\quad\operatorname{div}\mathbf{D}_{tr}=0.\end{aligned}\right\} \tag{6.40}$$

Effectuons maintenant le développement en séries:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{\lambda, l} [q_{\lambda l}(t)\,\mathbf{A}_{\lambda l}(\mathbf{r}) + q^*_{\lambda l}(t)\,\mathbf{A}^*_{\lambda l}(\mathbf{r})], \\ \mathbf{C} = \hat{\varepsilon}\mathbf{A} &= \sum_{\lambda, l} [q_{\lambda l}(t)\,\mathbf{C}_{\lambda l}(\mathbf{r}) + q^*_{\lambda l}(t)\,\mathbf{C}^*_{\lambda l}(\mathbf{r})], \\ \mathbf{A}_{\lambda l} &= \sqrt{4\pi}\, c\mathbf{a}_{\lambda l} \exp(i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}), \\ \mathbf{C}_{\lambda l} &= \sqrt{4\pi}\, c\mathbf{b}_{\lambda l} \exp(i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}), \end{aligned}\right\} \qquad (6.41)$$

où l'indice $l = 1,2$ correspond aux deux polarisations possibles des ondes normales dans un milieu anisotrope sans dispersion spatiale (dans les conditions (6.32) cette polarisation est linéaire). En vertu de la première relation (6.34) on a $(\mathbf{b}_{\lambda l}\,\mathbf{k}_\lambda) = 0$ et on peut poser $(\mathbf{b}_{\lambda 1}\mathbf{b}_{\lambda 2}) = 0$; c'est pourquoi on tire de (6.34) et (6.41)

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{k}_\lambda \hat{\varepsilon}\mathbf{a}_{\lambda l} \equiv k_{\lambda 1}\varepsilon_1 a_{\lambda l,1} + k_{\lambda 2}\varepsilon_2 a_{\lambda l,2} + k_{\lambda 3}\varepsilon_3 a_{\lambda l,3} = 0, \\ \hat{\varepsilon}\mathbf{a}_{\lambda 1}\hat{\varepsilon}\mathbf{a}_{\lambda 2} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (6.42)$$

En outre, imposons à $\mathbf{a}_{\lambda l}$ deux conditions encore (la sommation suivant l'indice $l = 1, 2$ répété deux fois ne se fait pas)

$$\hat{\varepsilon}\mathbf{a}_{\lambda l}\mathbf{a}_{\lambda l} = 1, \quad \hat{\varepsilon}\mathbf{a}_{\lambda 1}\mathbf{a}_{\lambda 2} = 0. \qquad (6.43)$$

La première de ces conditions est celle de normalisation; quant à la deuxième, elle correspond au choix de la polarisation associée aux ondes normales; il est clair de (6.42) et (6.43) que les vecteurs $\mathbf{k}_\lambda$, $\mathbf{a}_{\lambda l}$ et $\mathbf{b}_{\lambda l}$ sont coplanaires (pour $l = 1$ et $l = 2$ respectivement).

Portons maintenant (6.41) dans (6.35); alors, après la multiplication par $\mathbf{A}^*_{\mu l}$, en tenant compte des relations (6.42), (6.43) et de la condition de normalisation

$$\int \mathbf{A}_{\lambda l}\mathbf{A}^*_{\mu m}\, dV = 4\pi c^2 (\mathbf{a}_{\lambda l}\mathbf{a}_{\mu m})\,\delta_{\lambda\mu} \qquad (6.44)$$

on obtient (pour plus de détails, cf. [58])

$$\ddot{q}_{\lambda l} + \omega^2_{\lambda l} q_{\lambda l} = \sqrt{4\pi} \sum_i e_i (\mathbf{v}_i \mathbf{a}_{\lambda l}) \exp(-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}_i), \qquad (6.45)$$

$$\omega^2_{\lambda l} = \frac{k^2_\lambda c^2}{n^2_{\lambda l}} = [\mathbf{k}_\lambda \mathbf{a}_{\lambda l}]^2 c^2 = \{k^2_\lambda a^2_{\lambda l} - (\mathbf{k}_\lambda \mathbf{a}_{\lambda l})^2\}\, c^2. \qquad (6.46)$$

Ainsi l'équation obtenue des oscillateurs du champ (6.45) est de la même forme que celle du vide, ne différant que par l'expression (6.46) des pulsations $\omega_{\lambda l}$ et par les relations (6.42) et (6.43) des vecteurs de polarisation $\mathbf{a}_{\lambda l}$.

Nous avons déjà dit qu'il s'agit du développement suivant les ondes normales et les relations données pour $\omega_{\lambda l}$ et $\mathbf{a}_{\lambda l}$ sont préci-

sément les équations qui déterminent la relation entre ω et $\mathbf{k}$ et la polarisation des ondes normales. Plus précisément, en l'absence de charges, quand on examine les équations homogènes du champ, (6.45) rend évident que $\omega^2 = \omega_{\lambda l}^2$ et alors (6.46) est l'équation de dispersion (équation de Fresnel) qui associe $\omega_l = kc/n_l$ à $\mathbf{k}$ dans les ondes normales (évidemment, $n_l = ck/\omega_l$ est l'indice de réfraction; pour plus de détails, cf. [57] et chapitre 10).

On montre aisément (cf. (6.40), (6.41), (6.44), etc.) que pour les variables $q_{\lambda l}$

$$\mathcal{H}_{tr} = \sum_{\lambda, l} (p_{\lambda l} p_{\lambda l}^* + \omega_{\lambda l}^2 q_{\lambda l} q_{\lambda l}^*), \quad p_{\lambda l} = \dot{q}_{\lambda l}. \tag{6.47}$$

Les calculs ultérieurs pour résoudre les problèmes relatifs au rayonnement des charges se fait de la même façon que pour le vide ou pour un milieu isotrope. Par exemple, dans le cas d'une approximation dipolaire, pour un oscillateur au lieu de (6.26) on obtient

$$\ddot{q}_{\lambda l} + \omega_{\lambda l}^2 q_{\lambda l} = \sqrt{4\pi}\, e\, (\mathbf{a}_{\lambda l} \mathbf{v}_0) \cos \omega_0 t. \tag{6.48}$$

Le calcul ultérieur se fait comme pour un milieu isotrope, mais

$$\frac{k^2\, dk\, d\Omega}{(2\pi)^3} = \frac{n_l^3 \omega^2\, d\omega\, d\Omega}{(2\pi c)^3}. \tag{6.49}$$

On obtient finalement

$$\frac{d\mathcal{H}_{tr,\, l}}{dt} \equiv \frac{dW_{s,\, l}}{dt} = \frac{e^2 \omega_0^4\, (\mathbf{a}_l \mathbf{a}_0)^2\, n_l^3}{8\pi c^3}\, d\Omega, \quad l = 1, 2, \tag{6.50}$$

où, comme partout dans ce qui précède, $n_l = n_l(\omega, \theta, \varphi)$, c.-à-d. dépend non seulement de la pulsation, mais encore de la direction, en fait, de l'orientation du vecteur d'onde $\mathbf{k}$ par rapport aux axes de symétrie du milieu (dans le cas (6.32) pour les ε_1, ε_2 et ε_3 différents, ce sont les axes x, y, z). De la direction et de la pulsation, sans parler déjà de la forme de l'onde (indice $l = 1, 2$), dépendent également les vecteurs de polarisation $\mathbf{a}_l = \mathbf{a}_l(\omega, \theta, \varphi)$. Dans un milieu isotrope, $\mathbf{a}_{\lambda l} = \mathbf{e}_{\lambda l}/\sqrt{\varepsilon} = \mathbf{e}_{\lambda l}/n$ et l'un des vecteurs $\mathbf{e}_{\lambda l}$ peut être considéré comme orthogonal à $\mathbf{a}_0$; alors, (6.50) se transforme en (6.28). Le résultat (6.50) est très naturel; l'oscillateur « pompe » le rayonnement dans chacune des ondes normales, l'intensité du pompage étant proportionnelle à $(\mathbf{a}_{\lambda l}\mathbf{a}_0)^2$, c.-à-d. au carré de la projection de l'amplitude de $\mathbf{a}_0$ sur le vecteur de polarisation (vecteur électrique) de l'onde correspondante.

Constatons que pour un champ de rayonnement libre dans un milieu anisotrope, l'énergie du champ transversal (dans le cas donné elle coïncide avec l'énergie totale du système) se ramène sans peine de la forme (6.47) à la forme canonique (cf. le passage de (1.54) à (1.58), et c'est pourquoi elle est quantifiée suivant le mode standard.

Il s'ensuit qu'on peut introduire la notion de « photons dans un milieu anisotrope » tels que

$$E = \hbar\omega, \quad \mathbf{p}_l = \hbar\mathbf{k}_l, \quad p_l = \frac{\hbar\omega n_l(\omega, \theta, \varphi)}{c}, \tag{6.51}$$

où θ et φ sont les angles caractéristiques de l'orientation du vecteur $\mathbf{k}_l$ par rapport aux axes de symétrie du milieu (pour la pulsation donnée ω l'équation de dispersion détermine les valeurs de

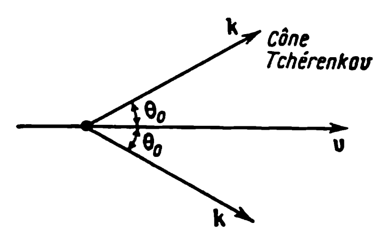


Fig. 6.1. Cône Tchérenkov

$k_l = (\omega/c)\, n_l(\omega, \theta, \varphi)$ pour les ondes normales qui peuvent se propager dans le milieu suivant la direction donnée; si l'on ne tient pas compte de la dispersion spatiale et des oscillations strictement longitudinales, il existe deux de telles ondes, c.-à-d. $l = 1, 2$). Ce résultat généralise (6.25) et a déjà été mentionné.

Une particularité caractéristique très importante de l'électrodynamique dans un milieu est qu'elle explique le rayonnement d'une charge animée d'un mouvement uniforme. Il convient de mentionner ici deux phénomènes: l'effet Tchérenkov (cf. [26-28, 61, 65-68]) et le rayonnement de transition (cf. [69-73]) *). Le rayonnement de transition est traité au chapitre 7, alors que ci-dessous nous allons envisager l'effet Tchérenkov qui apparaît dans un milieu homogène sous la condition

$$v > v_{\text{ph}} = \frac{c}{n(\omega)}, \tag{6.52}$$

c.-à-d. si la vitesse de la particule v = const est plus grande que la vitesse de phase des ondes dans le milieu $v_{\text{ph}} = c/n(\omega)$. Par ailleurs, les pulsations ω sont rayonnées sous un angle θ_0 à la vitesse $\mathbf{v}$, de plus (fig. 6.1)

$$\cos\theta_0 = \frac{v_{\text{ph}}}{v} = \frac{c}{vn(\omega)}. \tag{6.53}$$

Bien entendu la condition (6.52) se déduit de (6.53) puisque $\cos\theta_0 \leqslant 1$ (la valeur de $\cos\theta_0 = 1$ correspond au seuil du rayonnement lorsque dans les conditions réelles l'intensité du rayonnement est

*) Les ouvrages consacrés à l'effet Tchérenkov et au rayonnement de transition sont très nombreux (cf. les aperçus [28, 65-68, 70, 72] qui contiennent également des résultats originaux et des bibliographies).

nulle [68]). Le résultat (6.53) est si on peut dire, d'un caractère cinématique (condition d'interférence; pour plus de détails, cf., par exemple, [65, 74]) et se rapporte aux ondes de type quelconque. Dans ce sens, la condition (6.53) est appliquée depuis longtemps au son (front de Mach). Pour les ondes électromagnétiques se propageant dans un milieu anisotrope, il est évident que par $v_{ph} = c/n\,(\omega)$ il faut entendre la vitesse de phase associée à l'onde normale correspondante; alors, $n = n_l\,(\omega, \theta_0, \theta, \varphi)$, où θ_0 est l'angle entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{v}$, et les angles θ et φ déterminent l'orientation du vecteur $\mathbf{k}$ par rapport aux axes de symétrie du milieu (dans le cas d'un milieu en mouvement isotrope dans le système au repos, le rôle de l'axe de symétrie incombe à la vitesse du milieu $\mathbf{u}$). Dans ce qui suit, bornons-nous pour simplifier au cas du milieu isotrope.

La condition (6.53) de l'effet Tchérenkov peut être définie non seulement à partir des considérations interférentielles ou bien par calcul du champ radiant (la condition qui détermine le rayonnement apparaît alors automatiquement dans les formules) *), mais encore à partir des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion (cf. chapitre 7) ou comme une condition de la résonance [7]. Cette dernière apparaît lorsqu'on résout le problème de l'effet Tchérenkov à l'aide du formalisme hamiltonien, ce que nous allons examiner maintenant. Prenons comme équations de départ la forme (6.21) en y portant pour une charge en mouvement uniforme le rayon vecteur $\mathbf{r}_l = \mathbf{v}t$, $\mathbf{v} = \text{const}$. Alors, on obtient

$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} &= \sqrt{8\pi}\,\frac{e}{n}\,(\mathbf{v}\mathbf{e}_\lambda)\cos(\mathbf{k}_\lambda\mathbf{v})\,t, \\ \ddot{q}_{\lambda 2} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 2} &= \sqrt{8\pi}\,\frac{e}{n}\,(\mathbf{v}\mathbf{e}_\lambda)\sin(\mathbf{k}_\lambda\mathbf{v})\,t. \end{aligned}\right\} \tag{6.54}$$

La condition de la résonance, et donc, l'existence de la solution qui croît avec le temps pour l'énergie $\mathscr{H}_{tr}$, est de la forme

$$\omega_\lambda \equiv \frac{c}{n}\,k_\lambda = \mathbf{k}_\lambda\mathbf{v} = k_\lambda v\cos\theta_0, \tag{6.55}$$

ce qui coïncide avec (6.53).

*) Au fond, pour obtenir la condition (6.53) aucun besoin n'est d'aller plus loin que l'expression initiale des potentiels de Liénard-Wiechert (4.13), généralisés au cas de la présence d'un milieu en remplaçant c par $v_{ph} = c/n$ (le remplacement doit se faire seulement là, il est vrai, où c joue le rôle de la vitesse d'ondes et non celui du coefficient affecté à la densité de courant au second membre, disons des équations (1.8) ou (6.11)). Il résulte d'un tel remplacement, par exemple, que $A = \dfrac{e\mathbf{v}}{cR\,(1 - (vn/c)\cos\theta')}$, et il est clair que dans la zone d'onde, où $\theta' = \theta$, le potentiel acquiert la singularité précisément avec l'angle $\theta = \theta_0$, de plus, $\cos\theta_0 = c/nv$. (Ne pas confondre l'angle θ entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{v}$ avec l'angle θ qui détermine avec l'angle φ l'orientation du vecteur $\mathbf{k}$ par rapport aux axes de symétrie du milieu et qui, en fait, n'est pas utilisé dans le calcul!)

La solution des équations (6.54) aux conditions initiales $q_{\lambda 1,2} = \dot{q}_{\lambda 1,2} = 0$ est la suivante *):

$$\left.\begin{aligned} q_{\lambda 1} &= \frac{\sqrt{8\pi}\, e\, (\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v})}{n\omega_\lambda^2 (1-(v^2/c^2)\, n^2 \cos^2\theta_\lambda)} \times \\ &\qquad \times \left\{ \cos\left(\frac{nv\omega_\lambda t}{c}\cos\theta_\lambda\right) - \cos(\omega_\lambda t)\right\}, \\ q_{\lambda 2} &= \frac{\sqrt{8\pi}\, e\, (\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v})}{n\omega_\lambda^2 (1-(v^2/c^2)\, n^2 \cos^2\theta_\lambda)} \times \\ &\qquad \times \left\{ \sin\left(\frac{nv\omega_\lambda t}{c}\cos\theta_\lambda\right) - \frac{nv}{c}\cos\theta_\lambda \sin\omega_\lambda t\right\}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.56)$$

où θ_λ est l'angle entre $\mathbf{k}_\lambda$ et $\mathbf{v}$.

En portant (6.56) dans (6.16) et en passant de la sommation à l'intégration (cf. (6.27)), on obtient

$$\mathscr{H}_{tr} = \frac{8\pi e^2 v^2}{(2\pi c)^3} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\omega_{max}} \left\{ \frac{n \sin^2\theta\, (1+(v^2/c^2)\, n^2\cos^2\theta)\, [1-\cos(1-(v/c)\, n\cos\theta)\, \omega t]}{(1+(v/c)\, n\cos\theta)^2\, (1-(v/c)\, n\cos\theta)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{n \sin^2\theta \sin(\omega t) \sin((v/c)\, n\cos\theta\omega t)}{(1+(v/c)\, n\cos\theta)^2} \right\} \sin\theta\, d\omega. \qquad (6.57)$$

Ici on a tenu compte que $(\mathbf{v}\mathbf{e}_{\lambda 1})^2 + (\mathbf{v}\mathbf{e}_{\lambda 2})^2 = v^2 \sin^2\theta_\lambda \equiv v^2\sin^2\theta$, ou ce qui revient au même, que le vecteur de polarisation $\mathbf{e}_{\lambda 1}$ peut être pris dans le plan déterminé par les vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{k}_\lambda$. Il est évident que le rayonnement est polarisé dans ce plan (c.-à-d. le vecteur électrique de l'onde appartient à ce plan). Le deuxième terme de (6.57) ne donne pas de solutions croissantes dans le temps, alors que pour de grands t le premier a un caractère de fonction delta (cf. (1.84)). C'est pourquoi l'intégration sur θ avec application de la formule (1.84) conduit aisément à la formule de Tamm-Franck [26] de la puissance du rayonnement Tchérenkov (on a réalisé également l'intégration triviale sur φ)

$$\frac{d\mathscr{H}_{tr}}{dt} \equiv \frac{dW}{dt} = \frac{e^2 v}{c^2} \int \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)}\right) \omega\, d\omega = \frac{e^2 v}{c^2} \int \sin^2\theta_0 \omega\, d\omega \qquad (6.58)$$

(l'intégration porte ici sur le domaine $vn(\omega)/c \gg 1$).

S'il s'agit du rayonnement sur le parcours L, alors évidemment dans (6.58) v (voie couverte par unité de temps) doit être remplacée par L.

---

*) Il va de soi que pour obtenir un effet Tchérenkov à grands t le caractère des conditions initiales ne joue pas, les conditions initiales retenues ne sont que plus simples que les autres.

Dans (6.58) la dispersion est appréciée en adoptant dans (6.57) que $n = n(\omega)$; ce procédé a été justifié précédemment. Le calcul est très simple, même dans un milieu isotrope, et dans ce sens il peut supporter la concurrence des autres procédés [26, 27]. Pour ce qui est du milieu anisotrope, il nous semble que le formalisme hamiltonien est le plus simple (développement suivant les ondes normales). Il faut avoir en vue que le rôle de l'indice de réfraction $n(\omega)$ revient dans le cas concerné aux indices $n_l(\omega, \theta, \varphi)$ et en intégrant sur les angles les expressions de la forme (6.57) il faut tenir compte de cette circonstance ([75] ne l'a pas fait, ce qui a conduit à une erreur; pour les expressions correctes de la puissance du rayonnement Tchérenkov dans les cristaux, cf. [65]).

Une autre illustration très importante du rôle du milieu dans la théorie du rayonnement est fournie par l'effet Doppler produit par une source animée d'une vitesse **v** dans un milieu à indice de réfraction $n(\omega)$. Donnons tout de suite le résultat qui est une généralisation des formules (4.5) et (4.11):

$$\omega(\theta) = \frac{\omega_{00}\sqrt{1 - v^2/c^2}}{|1 - (v/c)\, n(\omega) \cos\theta|} = \frac{\omega_0}{|1 - (v/c)\, n(\omega) \cos\theta|}, \tag{6.59}$$

où ω_{00} est la pulsation dans le système de référence « propre » de la source (dans ce système la vitesse du centre de gravité de la source $v = 0$); ω_0, la pulsation de la source dans le système du laboratoire (par exemple, la pulsation du champ électrique extérieur dans un oscillateur) et comme d'habitude dans cet ouvrage, θ est l'angle entre **v** et **k**.

Pour aboutir à (6.59) on procède en premier lieu selon la règle générale du passage de la théorie du rayonnement dans le vide à la théorie du rayonnement dans un milieu, en effectuant dans (4.5) et (4.11) le remplacement suivant:

$$c \to v_{\text{ph}} = \frac{c}{n(\omega)}. \tag{6.60}$$

Bien entendu, dans un milieu anisotrope, le rôle de $n(\omega)$ est rempli par $n_l(\omega, \theta, \varphi)$. Quand même, le remplacement (6.60) ne peut se faire tout à fait automatiquement: il suffit de dire que dans le cas (4.5) il doit porter sur le dénominateur et non sur le numérateur; le numérateur de (6.59) comporte toujours $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. On le comprend bien d'ailleurs, puisque dans (6.59) le passage de ω_{00} à ω_0 est associé à la variation relativiste de la marche du temps, alors que la valeur du dénominateur est déterminée par le déplacement de la source, et on l'obtient d'une façon parfaitement conséquente de l'expression du champ radiant. Quelle que soit la méthode appliquée (cf., par exemple, (6.22)), dans les expressions des potentiels (et, donc, des champs) apparaissent des facteurs de phase de la forme $\exp[i(\mathbf{kr} - \mathbf{kr}_l - \omega_0 t)]$; pour une source dans une approximation dipolaire, $\mathbf{r}_l = \mathbf{v}t$ et donc on voit apparaître la pulsation $\omega =$

$= \omega_0 + \mathbf{kv} = \omega_0 + v\,(\omega/c)\, n\,(\omega) \cos\theta$, d'où nous sommes amenés à (6.59). Une autre déduction de cette formule, fondée sur l'utilisation des lois de conservation, est donnée au chapitre 7.

Notons la particularité importante de la formule (6.59): son dénominateur comprend un module [76b], ce qui est important pour un mouvement à vitesse « superlumineuse » $v > v_{\text{ph}} = c/n$ (cf. condition (6.52)). Le fait que dans (6.59) avec

$$\frac{v}{c} n\,(\omega) \cos\theta > 1 \tag{6.61}$$

il faut prendre le dénominateur en valeur absolue est déjà rendu clair par la nécessité d'obtenir une valeur positive de la pulsation ω. Le domaine des angles qui satisfont à la condition (6.61) s'appelle domaine de l'effet Doppler anomal ou « superlumineux ». Bien entendu, ce domaine existe seulement aux vitesses superlumineuses (6.52). Mais si

$$\frac{v}{c} n\,(\omega) \cos\theta < 1, \tag{6.62}$$

nous avons alors un effet Doppler normal (ordinaire). Les domaines de l'effet Doppler normal et anomal sont séparés par le cône Tchérenkov (fig. 6.2). En fait, dans un milieu l'effet Doppler est assez

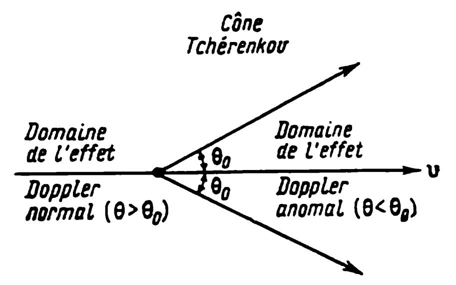


Fig. 6.2. Domaines de l'effet Doppler normal et anomal

compliqué [76b] puisqu'il faut tenir compte de la dispersion ou de la dépendance de n par rapport à ω. Bornons-nous ici à cette remarque que si on néglige la dispersion, sur le cône Tchérenkov, lorsque $(v/c)\, n \cos\theta = 1$ (cf. (6.53)), la pulsation ω $(\theta = \theta_0)$ devient infinie. En réalité, pour $\omega \to \infty$, l'indice de réfraction $n\,(\omega) \to 1$, et en toute rigueur, sur le cône Tchérenkov il n'y a en général aucun rayonnement (nous admettons que $v < c$ et n'examinons pas ici l'effet Tchérenkov). Quant à la tendance de la fréquence à augmenter quand l'angle θ s'approche de $\theta_0 = \arccos\,(c/n\,(\omega)\, v)$, elle se conserve, évidemment, même si l'on tient compte de la dispersion.

Le rôle du cône Tchérenkov pour le rayonnement dans un milieu devient encore plus clair si on examine non seulement les variations de la pulsation mais encore la distribution de l'intensité. Faisons-le sur l'exemple de l'oscillateur dans un milieu [20], c.-à-d. générali-

sons ce qui a été dit au chapitre 4 sur l'oscillateur au cas d'une charge qui se déplace dans un milieu transparent à indice de réfraction n (ω). Admettons que le mouvement de la charge soit analogue à celui dans le vide du fait que les pertes subies par les particules à énergie suffisamment haute (en premier lieu, les pertes par ionisation) peuvent être tenues comme faibles (sans parler déjà d'une fente ou d'un canal qu'il est possible de pratiquer dans un milieu (cf. [29] et chapitre 7)). C'est pourquoi pour tenir compte du milieu il suffit de remplacer simplement c par c/n (cf. (6.60)) dans la formule (4.14). Il en résulte qu'au lieu de (4.15) on obtient

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU_s}{d\Omega} &= \frac{e^2\omega_0^4 a_0^2 L \{(1-(v/c)\,n\cos\theta)^2-(1-(v^2/c^2)\,n^2)\sin^2\theta\cos^2\varphi\}\,n}{8\pi c^3 v\,|1-(v/c)\,n\cos\theta|^5}, \\ a_0^2 &= \frac{e^2E_0^2}{m^2\omega_0^4}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2, \quad \omega(\theta)=\frac{\omega_0}{|1-(v/c)\,n(\omega)\cos\theta|}. \end{aligned}\right\} \tag{6.63}$$

Il devient donc clair que la puissance du rayonnement est maximale au voisinage du cône Tchérenkov (nous admettons ici que $n > 1$ et que la condition Tchérenkov (6.53) puisse s'observer dans une marge de pulsations suffisamment large). Supposons, par exemple, que

$$\left.\begin{aligned} &n(\omega)=n=\text{const}, \quad &\omega\leqslant\omega_m, \\ &n(\omega)=1, &\omega>\omega_m. \end{aligned}\right\} \tag{6.64}$$

Dans ce qui suit, au lieu de la condition $n\,(\omega > \omega_m) = 1$ on peut supposer avec le même résultat qu'en vertu d'une forte absorption, pour $\omega > \omega_m$ le rayonnement n'existe pas. Dans le cas (6.64) et $v/c \to 1$ dans (6.63), on peut considérer que le terme principal c'est le second terme, celui qui est proportionnel à $(1 - (v^2/c^2)\,n^2 \approx$ $\approx (1 - n^2)$. En intégrant ensuite sur $d\Omega$ on obtient (rappelons que $\sin^2\theta_0 = 1 - \frac{c^2}{n^2(\omega)v^2}$)

$$\begin{aligned} U(n>1) &= \int\frac{dU_s}{d\Omega}\,d\Omega = \frac{e^2\omega_0^4 a_0^2 L\,(n^2-1)\sin^2\theta_0}{16c^4}\left(\frac{\omega_m}{\omega_0}\right)^4 = \\ &= \frac{(n^2-1)^2}{16n^2}\left(\frac{e}{mc^2}\right)^2\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2\left(\frac{\omega_m}{\omega_0}\right)^4 E_0^2 L. \end{aligned} \tag{6.65}$$

La comparaison de cette expression avec l'expression (4.16) relative au vide montre la grande différence qu'il y a dans les conditions discutées entre les expressions correspondantes

$$\frac{U(n>1)}{U(n=1)} = \frac{3(n^2-1)^2}{16n^2}\left(\frac{\omega_m}{\omega_0}\right)^4\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^4. \tag{6.66}$$

A propos, dans le cas (6.64) l'énergie du rayonnement Tchérenkov sur le parcours L vaut (cf. (6.58)) *)

$$U = \frac{dW}{dt}\frac{L}{v} = \frac{e^2 (1 - c^2/v^2 n^2)\,\omega_m^2 L}{2c^2}. \tag{6.67}$$

L'expression (6.63) ou l'expression plus générale qui se déduit de (4.14) en remplaçant (6.60) traduit assez bien les particularités caractéristiques des particules qui se déplacent dans un milieu donné. Si $n > 1$, alors, *grosso modo* l'angle Tchérenkov $\theta_0 = \arccos(c/vn)$ joue le rôle de l'angle $\theta = 0$, dans le voisinage duquel (dans l'intervalle des angles $\theta \sim mc^2/\mathscr{E}$) se concentre le rayonnement des particules ultra-relativistes dans le vide (fig. 6.3). Près du cône Tchérenkov les pulsations aussi bien que les intensités des ondes émises sont maximales. Il faut seulement retenir le rôle de la dispersion qui fait que les cônes Tchérenkov sont nombreux (en effet, $\theta_0(\omega) = \arccos(c/vn(\omega))$. Dans un milieu opaque **) le rayonnement n'existe pas quels que soient la nature de la source et son mouvement (il s'agit, certes, des fréquences pour lesquelles le milieu est opaque). Enfin, il faut se pencher spécialement sur le cas, où

$$0 < n(\omega) < 1, \tag{6.68}$$

qui est très important puisque dans un plasma isotrope non relativiste

$$\varepsilon(\omega) = n^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}} = 5{,}64 \cdot 10^4 \sqrt{N}, \tag{6.69}$$

où on néglige l'absorption (les collisions) et où N est la concentration électronique.

Dans les conditions cosmiques, le domaine où la formule (6.69) est applicable est très grand (cf. [64, 31, 38] et chapitre 11), et c'est pourquoi l'influence du milieu sur le rayonnement doit être évaluée bien souvent en appliquant précisément l'expression (6.69) qui détermine justement l'observation des conditions (6.68) dans le domaine de transparence.

---

*) Il faut avoir en vue que pour une particule chargée (dans ce cas, évidemment, la particule se déplaçant dans un oscillateur, on observe simultanément aussi bien le rayonnement Tchérenkov que le rayonnement décrit par les formules de la forme (6.63), (6.65)) le rayonnement d'« oscillateur » est « alimenté » dans une grande mesure par le rayonnement Tchérenkov dans le sens que l'intensification du rayonnement (6.63), (6.65) s'accompagne de l'affaiblissement de la puissance du rayonnement Tchérenkov (cf. [76a], ainsi que [29b]). Cette circonstance rend difficile le dégagement du rayonnement d'oscillateur sur le fond du rayonnement Tchérenkov (dans [29b] cela n'a pas été pris en considération, ce qui a conduit à une estimation incorrecte de la possibilité de concevoir un « compteur à scintillations dans un milieu » pour la mesure de l'énergie des particules relativistes.

**) Un milieu opaque peut être non absorbant, par exemple, dans le cas de la permittivité réelle $\varepsilon(\omega) = \tilde{n}^2(\omega) < 0$ ($\tilde{n}$ est l'indice de réfraction complexe; cf. chapitres 10, 11).

Dans le domaine (6.68) même une particule ultra-relativiste peut rayonner comme une particule non relativiste. Ceci est rendu formellement clair par les expressions (6.59) et (6.63) de la pulsation et de l'intensité, tandis qu'au fond ceci se déduit immédiatement du fait que pour le rayonnement dans un milieu le rôle déterminant revient au quotient de la vitesse de la source v par la vitesse de phase de la lumière $v_{ph} = c/n$. C'est pourquoi, si on ne parle pas de sources de rayonnement quelque peu exotiques qui se déplacent à des vitesses $v > c$ (cf. chapitre 8), avec $n < 1$ on a toujours $v < v_{ph}$, et si la différence $v_{ph} - v$ est assez grande on voit disparaître tous les traits inhérents des sources qui se déplacent dans le vide à des vitesses relativistes. Ainsi, dans un milieu à $n < 1$, la pulsation maximale vaut (cf. (6.59); admettons pour simplifier que $n(\omega) = \text{const}$ ou en tous cas, que la dispersion n'est pas importante):

$$\omega(0) = \frac{\omega_0}{1-(v/c)\,n} \approx \frac{\omega_0}{1-n}, \tag{6.70}$$

où, évidemment, la dernière expression concerne le cas $v \to c$; dans ces conditions, si $(1 - n) \ll 1$, le rayonnement se concentre dans le domaine des angles $\theta \sim \sqrt{1-n}$ (cf. fig. 6.3).

Cherchons les conditions sous lesquelles le milieu à $n < 1$ n'influe pas sur le rayonnement des particules relativistes. A cet effet il suffit d'écrire plus en détail le dénominateur de la formule (6.59) de l'effet Doppler pour $v/c \to 1$, $\theta \to 0$.

$$1 - \frac{v}{c} n \cos\theta = 1 - \frac{v}{c}\cos\theta + (1-n)\frac{v}{c}\cos\theta \approx$$
$$\approx 1 - \frac{v}{c} + (1-n) \approx {}^1/_2\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 + (1-n).$$

Ceci rend clair que le rôle du milieu est peu important si

$$2\{1 - n(\omega)\}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 \ll 1. \tag{6.71}$$

Il est aisé de voir [31, 38] que dans le cas du rayonnement synchrotron dans le milieu, la formule (5.39), par exemple, est remplacée par la formule

$$\left.\begin{aligned} p(\nu) &= \sqrt{3}\,\frac{e^3 H \sin\chi}{mc^2}\left[1-(1-n^2)\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2\right]^{-1/2} \times \\ &\qquad\qquad \times \frac{\nu}{\nu_{c,n}} \int\limits_{\nu/\nu_{c,n}}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\,d\eta, \\ \nu_{c,n} &= \nu_c\left[1+(1-n^2)\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2\right]^{-3/2}, \\ \nu_c &= \frac{3eH\sin\chi}{4\pi mc}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{6.72}$$

L'approximation utilisée ici (rendue claire par l'exposé du chapitre 5) n'est applicable que pour $(1 - n) \ll 1$, quand on peut poser $1 - n^2 = 2(1 - n)$. C'est pourquoi évidemment la condition définissant la faible action du milieu résultant de (6.72) se

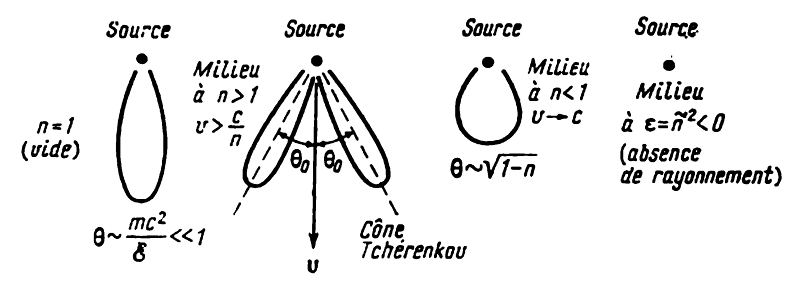


Fig. 6.3. Schématisation des diagrammes polaires des sources dans le vide et dans le milieu

confond exactement avec (6.71). Appliquons cette dernière condition au plasma, quand

$$1 - n^2 = 2(1 - n) = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}. \qquad (6.73)$$

Le rôle du milieu (plasma) est alors peu important sous la condition

$$\omega^2 = (2\pi\nu)^2 \gg \omega_p^2 \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 = \frac{16\pi^2 ecN}{3H_\perp} \nu_c \qquad (6.74)$$

ou, pour la partie essentielle du rayonnement synchrotron (fréquence $\nu \sim \nu_c$), sous la condition

$$\nu \sim \nu_c \gg \frac{4ecN}{3H_\perp} \approx 20 \frac{N}{H_\perp}. \qquad (6.75)$$

Dans le milieu interstellaire où $N \approx 1$ et $H_\perp \sim 10^{-6}$ à 10^{-5} Oe, la condition (6.75) est respectée dans la majeure partie de la gamme utilisée dans la radioastronomie. Dans des objets plus denses (certaines galaxies, enveloppes des supernovae, etc.), la condition (6.75) est plus serrée. Il faut toujours tenir compte que pour des ondes suffisamment longues cette condition peut être violée au cas où le rôle d'autres facteurs, de la réabsorption, par exemple, ne serait pas encore plus grand (cf. chapitre 9).

CHAPITRE 7

EFFET TCHÉRENKOV ET EFFET DOPPLER. RAYONNEMENT DE TRANSITION

Effet Vavilov-Tchérenkov et effet Doppler du point de vue quantique. Réaction de rayonnement dans un milieu. Rayonnement Tchérenkov et absorption des ondes dans un plasma isotrope et magnétoplasma. Rayonnement Tchérenkov des doublets. Rayonnement dans des canaux et des fentes. Applications du théorème de réciprocité. Rayonnement de transition *).

L'analyse de différentes questions relatives au rayonnement, à l'absorption et à l'amplification des ondes électromagnétiques dans le mouvement des charges ou des « systèmes » différents (atomes, paquets, antennes) dans un milieu, fait appel aux idées quantiques élémentaires qui dans ce cas s'avèrent très fructueuses. Il importe que ceci est également vrai pour des problèmes qui au fond sont classiques, et par conséquent, dans le cadre de l'approximation envisagée, les formules définitives ne dépendent pas de la constante de Planck $\hbar$.

En utilisant les idées quantiques, la notion de départ est celle des quanta ou des photons dans un milieu, dont l'énergie est $\hbar\omega$ et l'impulsion

$$\hbar\mathbf{k} = \frac{\hbar\omega n_l(\omega, \mathbf{s})}{c}\mathbf{s},$$

où $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$ est le vecteur d'onde, et $n_l(\omega, \mathbf{s})$, l'indice de réfraction d'une onde normale du type donné l, qui se propage dans le milieu considéré (dans le cas général, anisotrope et gyrotrope). Le schéma de la quantification du champ électromagnétique dans le milieu a été décrit sous sa forme générale au chapitre 6 (pour plus de détails, cf. [61-63]). Bien entendu, une telle approche n'est correcte que dans le domaine où la théorie phénoménologique est applicable. Il faut également avoir en vue qu'en introduisant la notion de l'impulsion du photon dans le milieu il s'agit de l'impulsion totale qui inclut tant l'impulsion du champ que l'impulsion communiquée au milieu par le rayonnement de l'onde (cf. plus loin ; pour plus de détails et de précision, cf. chapitre 12).

Du point de vue quantique, la cinématique du rayonnement, c.-à-d. les conditions imposées aux fréquences et à la direction du rayonnement, est régie par les lois de conservation de l'énergie

*) Dans ce chapitre nous nous inspirons de l'article [68] à l'exception de la partie consacrée au rayonnement de transition.

et de l'impulsion (ceci se rapporte également aux conditions d'absorption). Si, par exemple, avant le rayonnement, le « système » (électron, atome, antenne) avait une énergie E_0, après le rayonnement son énergie est E_1, et les impulsions correspondantes sont $\mathbf{p}_0$ et $\mathbf{p}_1$, alors le rayonnement du photon doit vérifier les lois de conservation

$$E_0 - E_1 = \hbar\omega, \tag{7.1}$$

$$\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1 = \hbar\mathbf{k} = \frac{\hbar\omega n}{c}\frac{\mathbf{k}}{k} \equiv \frac{\hbar\omega n}{c}\mathbf{s}, \tag{7.2}$$

où pour simplifier on admet que le milieu est isotrope, et de ce fait on omet l'indice l de n.

Pour un « système » qui se déplace uniformément dans le vide (c.-à-d. pour $n = 1$) il est impossible de rayonner sans changer son état interne (par exemple, un électron animé d'un mouvement uniforme dans le vide ne peut pas rayonner; cf. chapitre 1). Ce fait bien connu se déduit notamment des équations (7.1), (7.2), puisqu'avec $n = 1$, pour une particule privée de degrés de liberté interne, elles n'ont pour solution que $\omega = 0$. Mais si $n \neq 1$, alors, en portant dans (7.1), (7.2) les expressions $E_{0,1} \equiv \mathcal{E}_{0,1} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_{0,1}^2}$; $\mathbf{p}_{0,1} = m\mathbf{v}_{0,1}/\sqrt{1 - v_{0,1}^2/c^2}$, on obtient comme condition du rayonnement l'état interne constant [61]

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_0 &= \frac{c}{n(\omega)v_0}\left(1 + \frac{\hbar\omega(n^2-1)}{2mc^2}\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}\right), \\ \hbar\omega &= \frac{2(mc/n)(v_0\cos\theta_0 - c/n)}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}\,(1-1/n^2)}, \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

où θ_0 est l'angle entre $\mathbf{v}_0$ et $\mathbf{k}$.

Avec $\hbar\omega/mc^2 \ll 1$, cette condition devient condition classique du rayonnement (6.53), ce qui n'est que naturel (si $\hbar\omega/mc^2 \ll 1$, le « recul » résultant de l'émission d'un quantum est assez petit) *). (7.3) rend clair, certes, que le rayonnement n'est possible (c.-à-d. $\cos\theta_0 < 1$ et $\omega > 0$) que si la vitesse du mouvement est supérieure à celle de la lumière, c.-à-d., si l'inégalité $v_0 n/c > 1$ est observée (cf. (6.52)).

Lorsque le résultat ne contient pas $\hbar$, le calcul quantique n'a qu'une valeur méthodique, mais il arrive souvent qu'il est plus commode. Au fond, tout se ramène à l'utilisation des lois de conservation dont la portée est plus large dans ce sens qu'on peut les appliquer même sans faire appel aux idées quantiques. Plus précisément, prenons note que la théorie classique du champ électromagné-

*) (7.3) rend clair que si l'on veut obtenir une meilleure précision, la condition classique doit s'écrire un peu autrement:

$$(\hbar\omega(n^2-1)/2mc^2)\sqrt{1-v_0^2/c^2} \ll 1.$$

tique dans un milieu conduit à la liaison suivante entre l'énergie $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{em}$ et l'impulsion totale du rayonnement et du milieu G: $\mathbf{G} = (\mathcal{H}n/c)\mathbf{s}$ *).

Ensuite, la variation de l'énergie et de l'impulsion étant assez petite, pour le mouvement libre d'une charge on a $\Delta\mathcal{E} = \mathbf{v}\Delta\mathbf{p}$, étant donné que

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\mathbf{p}} = \frac{d}{d\mathbf{p}}\left(\sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}\right) = \frac{c^2\mathbf{p}}{\mathcal{E}} = \mathbf{v}. \tag{7.4}$$

Puisque nous avons supposé que la variation $\Delta\mathcal{E}$ est petite, il ne faut faire aucune différence entre v_0 et v_1 et la vitesse de la source $v_0 \approx v_1$ se note v.

(7.4) et les lois de conservation (7.1), (7.2) permettent d'obtenir en remplaçant $\hbar\omega$ par $\mathcal{H}$

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{H} = \mathbf{v}\Delta\mathbf{p} = \frac{\mathcal{H}n}{c}\,\mathbf{s}\mathbf{v}$$

ou $\cos\theta_0 = c/nv$, ce qui est la condition Tchérenkov (6.53). Pourtant, il est plus simple d'introduire tout de suite des quanta $\hbar\omega$, ce qui n'est que très naturel non seulement dans le cas quantique, mais aussi dans le cas classique. C'est donc la façon dont nous procéderons.

Si ce n'est pas une particule « sans structure » qui se déplace mais un « système » dont l'énergie interne peut changer, on a

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{(m+m_0)^2c^4 + c^2p_0^2}, \quad \mathcal{E}_1 = \sqrt{(m+m_1)^2c^4 + c^2p_1^2},$$

où $(m + m_0)\,c^2 = mc^2 + w_0$ est l'énergie totale à l'état inférieur et $(m + m_1)\,c^2 = mc^2 + w_1$, l'énergie totale à l'état supérieur. Il est évident que $w_1 - w_0 = \hbar\omega_i > 0$ est la différence des énergies des deux niveaux considérés du système (d'atome, etc.).

En appliquant maintenant les lois de conservation (7.1), (7.2) pour $\hbar\omega/mc^2 \ll 1$, on obtient exactement la relation Doppler (6.59) avec $\omega_{00} \equiv \omega_i$. Mais si on ne néglige pas les termes d'ordre $\hbar\omega/mc^2$, on aboutit de même que dans le cas du rayonnement Tchérenkov (cf. (7.3)) à une expression un peu plus compliquée [77]. Toutefois, on peut pratiquement se borner à la formule de l'effet Doppler dans sa forme usuelle (6.59). Par ailleurs, le calcul quantique révèle également une circonstance importante qui échappe complètement si la formule (6.59) se déduit par la méthode classique. C'est que dans le domaine de l'effet Doppler normal, c.-à-d. lorsque (cf. (6.62))

$$\frac{v}{c}\,n(\omega)\cos\theta < 1, \tag{7.5}$$

*) Comme nous allons le montrer au chapitre 12, l'impulsion du champ est $G_{em} = \mathcal{H}/nc$, alors que l'impulsion de la force transmise par le rayonnement au diélectrique, $G^{(c)} = (n^2 - 1)\,G_{em} = \mathcal{H}\,(n^2 - 1)/nc$. D'où l'impulsion totale transmise par la source $G = G_{em} + G^{(c)} = \mathcal{H}n/c$.

au rayonnement correspond la transition du système du niveau supérieur d'énergie w_1 au niveau inférieur à énergie w_0 (le sens de cette transition est déterminé par le fait que l'énergie du quantum émis doit être positive, c.-à-d. formellement par la prescription $\omega > 0$). Mais si le quantum est émis à l'intérieur du cône Tchérenkov, c.-à-d. si on est en présence de l'effet Doppler anomal et (cf. (6.61))

$$\frac{v}{c_1} n(\omega) \cos \theta > 1, \tag{7.6}$$

l'émission du quantum s'accompagne de la transition du système du niveau inférieur w_0 au niveau supérieur w_1. L'énergie du quantum, ainsi que l'énergie nécessaire pour exciter le système radiant est fournie dans ces conditions par l'énergie cinétique de la translation du système.

Cet exemple montre qu'à la différence de la théorie classique la théorie quantique, en déterminant les conditions du rayonnement elles-mêmes, définit en même temps le sens du processus (transition au niveau supérieur ou inférieur). Cette circonstance précisément ainsi que la possibilité d'une évaluation bien simple du rayonnement induit (cf. plus loin), rendent les calculs quantiques très précieux pour définir les conditions du rayonnement, de l'amplification (instabilité) des ondes dans les faisceaux, etc.

Si le système ne possède que deux niveaux discrets 0 et 1, pour $(v/c)\, n < 1$ (mouvement infralumineux), l'état stationnaire de la source indique qu'elle se trouve au niveau inférieur 0 (on suppose que le système se déplace, disons, dans un canal dans un milieu et ne subit aucune excitation de la part d'autres sources). Autrement dit, si le niveau excité est 1, dans quelque temps le système se désexcitera en passant au niveau 0. Mais si $(v/c)\, n > 1$ (mouvement superlumineux), alors dans les conditions stationnaires il existe également une probabilité non nulle pour que le système se trouve au niveau 1 en émettant tout le temps des ondes Doppler tant normales qu'anomales. La population des niveaux 0 et 1 ainsi que l'intensité rayonnée des ondes normales et anomales se déterminent, évidemment, par le rapport des probabilités totales de l'émission de ces ondes. Pour un système à niveaux multiples [78], l'émission des ondes Doppler anomales avec la transition du système au niveau supérieur rend possible l'amplification des « ondes transversales », et par exemple, l'ionisation de l'atome.

Plus précisément, deux cas peuvent se présenter ici [79]. Dans le premier, l'énergie moyenne des ondes transversales du système diminue avec le déplacement. Cela signifie que le centre de gravité du paquet d'ondes composé de fonctions d'onde aux énergies différentes mais voisines (il s'agit, par exemple, des énergies d'un mouvement d'oscillation transversal d'un électron qui se déplace le long d'un champ magnétique) baisse dans l'échelle des énergies. Dans ce

cas la différence entre les mouvements infralumineux et superlumineux est définie par la différence entre la vitesse de variation de l'énergie moyenne, ainsi que par l'allure de l'étalement du paquet. Ainsi, pour une vitesse infralumineuse, les niveaux d'énergie supérieure à celle du spectre initial du paquet ne seront jamais occupés. Quant à la vitesse superlumineuse, malgré la diminution de l'énergie moyenne, il existe une probabilité finie de trouver un système (on suppose, certes, qu'il s'agit d'un ensemble des systèmes) à un niveau aussi haut que l'on veut, pouvant être atteint en observant les conditions (7.6).

Dans le deuxième des cas mentionnés, le système est instable déjà « en moyenne », c.-à-d. son énergie moyenne (il s'agit de l'énergie des oscillations, c.-à-d. de l'énergie d'excitation) croît dans le temps, et de plus, le caractère de l'étalement du paquet change.

Pour établir quel est le cas envisagé, il faut calculer les probabilités des transitions. Pour un système classique, le calcul quantique est en général privé sous ce rapport des avantages quels qu'ils soient, et il est naturel de faire appel à la théorie du rayonnement classique que nous examinerons plus loin.

Pour le moment notons que les raisonnements quantiques dans le genre de ceux qui précèdent sont tout aussi utiles pour l'étude des problèmes déjà mentionnés sur l'absorption et l'amplification des ondes dans les faisceaux (les flux) des particules (dans le cas de l'amplification des ondes, au fond, le faisceau devient instable). Dans cette voie il est facile d'obtenir le critère d'instabilité d'un faisceau de particules qui se déplacent dans un plasma isotrope (cf. plus loin). Ensuite il est clair que le mouvement superlumineux des flux des « systèmes » à deux niveaux ou à niveaux multiples doit s'accompagner en général non pas de l'absorption (réabsorption) mais de l'amplification (absorption négative) des ondes Doppler anomales [80]. Ceci est dû au fait que l'absorption d'un quantum dans le domaine des ondes Doppler anomales (c.-à-d. volant sous un angle $\theta < \theta_0$ à la vitesse du système) fait passer le système non pas d'un niveau inférieur à un niveau supérieur (comme c'est le cas de l'effet normal), mais d'un niveau supérieur à un niveau inférieur *). Quant à la transition du système d'un niveau inférieur à un niveau supérieur, elle correspond maintenant au rayonnement induit qui dans le domaine de l'effet normal correspond à la transition du système du niveau supérieur au niveau inférieur. C'est pourquoi si tous les systèmes (atomes, électrons dans le champ magnétique) d'un faisceau superlumineux se trouvent, par exemple, au niveau inférieur, les ondes Doppler normales émises par l'un des systèmes seront absor-

*) L'absorption est le processus inverse à l'émission et c'est pourquoi ce qui vient d'être dit résulte directement des calculs faits pour l'émission. Les termes « supérieur » et « inférieur » s'appliquent ici à l'échelle des énergies d'excitation des niveaux du système émetteur.

bées dans ce faisceau, alors que les ondes anomales seront amplifiées : sur leur parcours ces systèmes feront passer les autres systèmes au niveau supérieur avec rayonnement induit, c.-à-d. avec émission encore d'un quantum Doppler anomal.

Au chapitre 9 nous décrirons plus en détail l'utilisation des coefficients d'Einstein pour le calcul des probabilités de l'émission et de l'absorption spontanées. Mais il est commode de les utiliser dès à présent pour concrétiser quelque peu ce qui vient d'être dit.

Si les niveaux supérieur 1 et inférieur 0 sont saturés pour le faisceau le coefficient d'absorption des ondes Doppler normales vaut (cf. [45, 64, 80, 81] et chapitre 9)

$$\mu_n = -\frac{dI_\omega}{I_\omega\, dz} = A_1^0 \frac{8\pi^3 c^2 N_1 (N_0/N_1 - 1)}{\omega^2 n^2},$$

$$I_\omega = I_\omega(0)\, e^{-\mu z}, \quad \omega = 2\pi\nu, \tag{7.7}$$

où A_1^0 (θ) est la probabilité de transition spontanée $1 \leftrightarrow 0$ rapportée à l'unité d'angle solide, avec émission d'un quantum sous un angle θ à la vitesse ; N_1 et N_0 sont les concentrations de particules du faisceau aux niveaux 1 et 0 respectivement ; n, l'indice de réfraction du milieu pour la fréquence angulaire considérée ω, l'onde se propageant sous un angle θ (pour simplifier, adoptons que le moment dipolaire de la transition $1 \leftrightarrow 0$ de toutes les particules est parallèle à la vitesse). Pour que l'amplification des ondes Doppler normales ait lieu, le nombre de particules du niveau supérieur 1 doit être plus grand que celui du niveau inférieur 0 (dans ce cas $N_0/N_1 < 1$ et $\mu_n < 0$). Une telle distribution n'est pas le fait de l'équilibre thermique et, en général, sa réalisation présente certaines difficultés. Il en est autrement dans le cas des ondes Doppler anomales, lorsque l'émission des ondes (des photons dans le milieu) s'accompagne de la transition $0 \to 1$, et l'absorption, de la transition $1 \to 0$. Dans ce cas

$$\mu_{an} = A_1^0 \frac{8\pi^3 c^2 N_0 (N_1/N_0 - 1)}{\omega^2 n^2} \tag{7.8}$$

et $\mu_{an} < 0$ pour $N_1/N_0 < 1$. Ceci rend également clair qu'en présence de l'effet Doppler anomal (c.-à-d. si $(v/c)\, n > 1$), l'absorption du faisceau des particules du seul niveau inférieur 0 est négative et les ondes émises par les particules isolées sont amplifiées. Il se peut que lorsqu'on utilise les faisceaux des particules se déplaçant dans une fente diélectrique ou dans un système décélérant, cette circonstance favorise sensiblement la production et l'amplification des ondes radio très courtes [29].

Nous avons déjà dit que le rôle d'un système (particule) émetteur d'ondes Doppler anomales peut revenir aux électrons oscillant sous l'effet d'un champ surposé ou se déplaçant suivant une trajectoire hélicoïdale le long du champ magnétique parallèle à l'axe du faisceau.

A de faibles amplitudes, ces électrons (sans parler du rayonnement Tchérenkov) rayonnent à la manière des oscillateurs correspondants qui se déplacent à la vitesse v égale à $v_{\parallel}$, projection de la vitesse de l'électron sur l'axe du faisceau.

Dans un faisceau d'électrons les vitesses transversales $v_{\perp}$ se répartissent généralement de façon que la fonction de distribution $f(v_{\perp})$ décroît avec l'augmentation de $v_{\perp}$ (il en est ainsi, par exemple, pour la distribution $f(v_{\perp}) = \text{const} \exp\{-(mv_{\perp}^2)/2\varkappa T\}$). Dans ces conditions, les ondes Doppler normales s'amortissent sous l'effet de la réabsorption dans le faisceau; quant aux ondes Doppler anomales, elles sont, par contre, amplifiées. L'amplification des ondes dans un faisceau électronique signifie que l'amplitude des oscillations croît et que le faisceau devient instable. Ceci s'accompagne en général du groupement des électrons et d'un rayonnement cohérent. La condition quantique de l'instabilité du faisceau (condition $(v_{\parallel}/c)\, n\,(\omega) > 1$) coïncide avec la condition qui s'obtient en résolvant le problème classique de la stabilité d'un faisceau d'électrons dans un champ magnétique [80]. Cette instabilité des flux électroniques possible en particulier dans un magnétoplasma présente de l'intérêt pour la théorie du rayonnement radio sporadique du Soleil [45, 82].

Dans le langage classique, la condition de l'effet Tchérenkov (6.53) est d'un caractère interférentiel, elle est donc universelle pour tous les types d'ondes (certes, si on remplace la vitesse de phase de la lumière $c/n\,(\omega)$ par la vitesse de phase v_{ph} des ondes considérées, par exemple, des ondes sonores, capillaires, etc.). Ceci se rapporte également aux résultats exposés, obtenus à partir des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion envisagées aussi bien à la lumière de la théorie quantique que classique. De plus, l'approche quantique (l'introduction des quanta) est sensiblement plus simple non seulement pour la lumière mais aussi pour les ondes de plasma (longitudinales) *) et le son. Dans ce dernier cas l'énergie d'un quantum du son (phonon) vaut $E = \hbar\omega$, et son impulsion $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = (E/u)\mathbf{s}$, où u est la vitesse du son (pour le son, la dispersion est généralement négligeable, et on peut ne pas faire de différence entre les vitesses de phase et de groupe). Bien entendu, de même que pour l'électrodynamique, dans le domaine de l'effet Doppler anomal, la source acoustique animée du mouvement supersonique passe « en haut » (c.-à-d. elle s'excite) étant ainsi en quelque sorte « amplifiée » [83].

Examinons maintenant le trait très intéressant dû à la noncoïncidence des directions des vitesses d'ondes de phase et de groupe,

*) Les quanta des ondes de plasma sont souvent appelés plasmons. Si on entend par photons les quanta d'un champ électromagnétique arbitraire dans le milieu (en toute rigueur, il s'agit du champ libre, c.-à-d. du champ en l'absence de charges et de courants), les plasmons sont alors un cas particulier des photons dans le milieu.

qui peut se manifester dans un milieu anisotrope ou lorsqu'on tient compte de la dispersion spatiale (cf. [57]). Si la projection $d\omega/d\mathbf{k}$ de la vitesse de groupe sur la direction perpendiculaire à la vitesse de la particule (c.-à-d. la quantité $d\omega/dk_r$, où k_r est la projection de $\mathbf{k}$ perpendiculaire à v) est négative, il semble que l'énergie ne quitte pas la source mais y est absorbée. Dans de telles conditions, il faut pourtant utiliser non pas les potentiels retardés mais les potentiels devancés [84, 85]. Si l'on adopte que le vecteur $\mathbf{k}$ est toujours dirigé dans le sens de la vitesse de phase, alors pour $d\omega/dk_r < 0$ ce vecteur dans les ondes Tchérenkov et Doppler sera dirigé vers la trajectoire

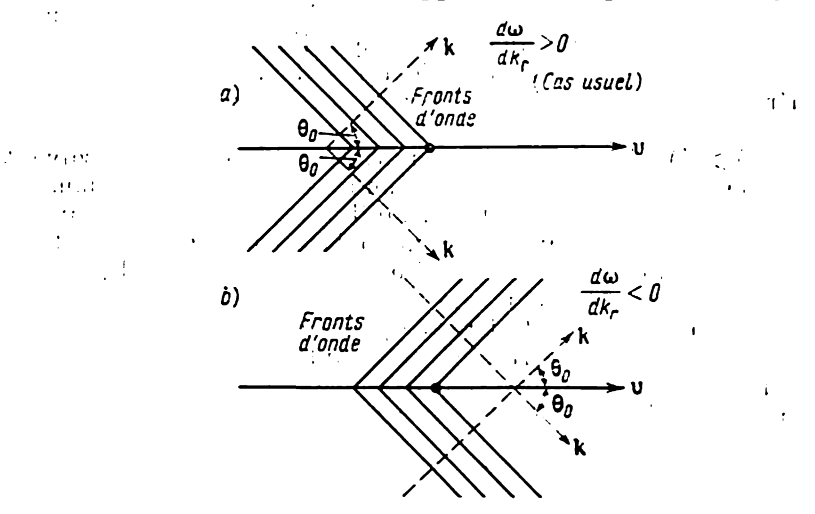


Fig. 7.1. Rayonnement Tchérenkov pour $d\omega/dk_r > 0$ et $d\omega/dk_r < 0$.
k_r — projection du vecteur d'onde perpendiculaire à la vitesse v de la particule

de la particule, et l'énergie, comme il se doit, s'écartera de la trajectoire. Dans le rayonnement Tchérenkov, la différence entre les cas $d\omega/dk_r > 0$ et $d\omega/dk_r < 0$ est matérialisée par la figure 7.1. Avec $d\omega/dk_r < 0$, l'angle θ_0 est déterminé toujours par la condition Tchérenkov (6.53), ce qui résulte, pour le choix de la direction $\mathbf{k}$ envisagée, des considérations interférentielles ainsi que des lois de conservation (7.1), (7.2). Ceci se déduit du fait que nous utilisons les ondes planes du type exp $[i\,(\mathbf{kr} - \omega t)]$ telles que l'impulsion du quantum correspondant dans le milieu soit égale à $(\hbar\omega n/c)\,(\mathbf{k}/k)$; quand on utilise ces ondes il n'y a aucune différence entre les directions $\mathbf{k}$ de la figure 7.1*a* et 7.1*b*, puisque en termes des ondes planes, la position du front d'onde dans les deux cas est la même (il s'agit des fronts de vecteur $\mathbf{k}$ qui repose sur le cône Tchérenkov). Pour $d\omega/dk_r < 0$, la formule (6.59) de l'effet Doppler reste également vraie. Or, la différence physique entre les cas considérés est, certes,

très importante, elle est due à ce que la direction de la vitesse de groupe n'est pas la même. Ainsi, dans le cas habituel d'un milieu isotrope (cf. fig. 7.1*a*), la vitesse de groupe est parallèle à **k**. Pour ce qui est du cas représenté sur la figure 7.1*b*, la vitesse de groupe $d\omega/d\mathbf{k}$ est antiparallèle à **k**, et donc le vecteur $d\omega/d\mathbf{k}$ est dirigé sous un angle obtus $\theta_1 = \pi - \theta_0$ par rapport à la vitesse de la particule. Dans ces conditions, lorsque une particule traverse une plaque d'épaisseur finie, le rayonnement Tchérenkov est émis par la surface arrière de la plaque, étant également réfractée d'une façon insolite sur cette surface (ceci est rendu clair par [84]).

Pour les électrons qui se déplacent à la vitesse superlumineuse dans un plasma ou dans un milieu ralentisseur en présence d'un champ magnétique, ainsi que dans des cas analogues des électrons animés d'un mouvement oscillatoire (grands nombres quantiques associés au mouvement transversal), il n'y a que le domaine classique qui présente généralement de l'intérêt. Dans ces conditions, le problème de l'émission des ondes et de l'amortissement ou de l'amplification des oscillations transversales des électrons peut et doit même se résoudre par des calculs classiques. La question se ramène au fond au calcul de la force de réaction du rayonnement due au mouvement de la charge dans le milieu.

Examinons ce problème du point de vue plus général.

Puisque la présence d'un milieu peut changer radicalement l'allure de l'émission des ondes électromagnétiques par une particule en mouvement (cf. chapitre 6), il est clair que la réaction de rayonnement dans le milieu change également et parfois ce changement est très important. Ainsi, un oscillateur à pulsation ω dans un plasma isotrope à indice de réfraction $n = \sqrt{1 - 4\pi e^2 N/m\omega^2}$ en général n'émet pas pour $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m > \omega^2$, lorsque $\varepsilon = \tilde{n}^2 < 0$; pour une approximation non relativiste un électron dont la giration dans le champ magnétique $\mathbf{H}_0$ a lieu à la fréquence angulaire $\omega_H = eH_0/mc$ (cf. [64, 86]), ne rayonne pas dans un magnétoplasma. Dans ces deux cas la force de réaction s'annule certes, alors que dans le vide elle vaut $\mathbf{f} = (2e^2/3c^3)\dddot{\mathbf{r}}$. D'autre part si, le mouvement dans le milieu étant uniforme, la vitesse pour certaines fréquences est $v > c/n\ (\omega)$ une force de réaction Tchérenkov $\mathbf{f}_{\mathrm{Tch}}$ apparaît dont le travail par unité de temps s'écrit $\mathbf{f}_{\mathrm{Tch}}\mathbf{v} = -dW/dt$. Aussi est-il clair que d'après (6.58)

$$\mathbf{f}_{\mathrm{Tch}} = -\frac{e^2\mathbf{v}}{c^2 v} \int\limits_{c/n(\omega)\leq v} \left[1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)}\right] \omega\, d\omega. \tag{7.9}$$

Ce qui vient d'être dit pose déjà le problème de calcul de la réaction de rayonnement dans un mouvement arbitraire de la charge dans un milieu quelconque. Autrefois ce problème n'attirait pas beaucoup d'attention. Il en est ainsi probablement du fait que pour le mouve-

ment dans un milieu, la force de réaction est ordinairement bien plus faible que la force de freinage due aux pertes par ionisation. Ainsi les pertes par effet Tchérenkov qu'on peut considérer comme pertes par radiation, même dans un milieu transparent mais dense constituent seulement une faible part de pertes totales. La situation ne change pas en général si le déplacement de la charge n'est pas uniforme. Il existe pourtant des cas intéressants, importants pour la pratique, lorsque les forces de réaction produites par le mouvement dans le milieu sont quand même notables (mouvement dans un magnétoplasma, mouvement dans des canaux, des fentes, au voisinage de la surface du milieu) et il faut en tenir compte.

Donnons ici le schéma des calculs de la force de réaction dans un milieu [79] sans craindre comme convenu les répétitions.

Pour une charge ponctuelle de densité $\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$, $\int \delta\, d\mathbf{r} = 1$ les équations du champ et les équations du mouvement sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},\\ &\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}),\\ &\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = e\left\{\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]\right\} + e\int\left\{\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}(\mathbf{r})]\right\}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R})\,d\mathbf{r}. \tag{7.11}$$

Ici $\mathbf{R}(t)$ est le rayon vecteur de la charge ($\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{R}} \equiv d\mathbf{R}/dt$); $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$, les champs extérieurs; $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, les champs produits par la charge elle-même (pour simplifier on admet que le milieu est non magnétique).

Pour un milieu arbitraire la seule méthode efficace pour résoudre le problème est de décomposer les champs en ondes planes normales, c.-à-d. la méthode que nous avons appelée formalisme hamiltonien. Il en résulte donc

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{D}_\alpha(\omega) = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)\widetilde{E}_\beta(\omega), \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3,\\ &\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A},\\ &\widetilde{\mathbf{A}} = \sqrt{4\pi}\,c\sum_{\lambda,\, j=1,\,2}\frac{q_{\lambda j}(t)\,\mathbf{a}_{\lambda j}}{n_{\lambda j}}\exp(i\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}),\\ &n_{\lambda j}^2 = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)(\mathbf{a}_{\lambda j})_\beta(\mathbf{a}_{\lambda j}^*)_\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial \widetilde{A}_\alpha}{\partial k_\beta} + \text{q.c.} = 0, \tag{7.13}$$

où la condition (7.13) est retenue par commodité; q.c. est la quantité complexe conjuguée; la sommation se fait suivant les indices répétés deux fois; l'argument ω indique qu'on prend les composantes de Fourier; les champs réels valent $\mathbf{D} = \widetilde{\mathbf{D}} + \widetilde{\mathbf{D}}^* \equiv \widetilde{\mathbf{D}} + \text{q.c.}$, $\mathbf{E} = \widetilde{\mathbf{E}} + \widetilde{\mathbf{E}}^*$, etc. Dans les équations (7.12), (7.13) $n_{\lambda j}$ est l'indice de réfraction et $\mathbf{a}_{\lambda j}$, le vecteur de polarisation complexe associé à la j-ième onde normale.

Les équations des potentiels qui s'obtiennent de (7.10), (7.12) et (7.13) sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\widetilde{\mathbf{A}} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\widetilde{A}}{\partial t^2}\mathbf{e}_\alpha - \frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial t\,\partial x_\beta}\mathbf{e}_\alpha + \text{q.c.} = \\ &\qquad\qquad = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_e = -\frac{4\pi}{c}e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}), \\ &\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} + \text{q.c.} = -4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}), \end{aligned}\right\} \quad (7.14)$$

où $\mathbf{e}_\alpha$ est le vecteur unité de l'axe α et $\mathbf{j}_e = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$, la densité de courant qui correspond à la particule considérée; une certaine différence dans les notations adoptées et la définition de certaines grandeurs par rapport à celles employées au chapitre 6 s'explique par la commodité et la possibilité de recommander au lecteur les articles [79, 87], où les calculs qui font appel à ces notations sont plus détaillés.

En portant le développement (7.12) dans (7.14) on obtient pour les amplitudes du champ $q_{\lambda j}$ un système d'équations d'oscillation dont l'intégration est élémentaire. Les champs ainsi définis doivent être portés dans l'équation du mouvement (7.11) pour obtenir *)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \mathbf{F}_0 - \frac{e^2}{2\pi^2}\sum_{j=1,\,2}\int_0^t\int_0^{\mathbf{k}_{max}}\Big\{&\frac{\mathbf{a}_j(\mathbf{v}'\mathbf{a}_j^*)}{n_j^2}\cos\omega_j(t-t') - \\ -i\,[\mathbf{v}\,[\mathbf{k}\mathbf{a}_j]]\frac{(\mathbf{v}'\mathbf{a}_j^*)}{n_j^2\omega_j}\sin\omega_j(t-t')\Big\}&\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')]\,dt\,d\mathbf{k} + \\ &+ \text{q.c.} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{f}_{rad}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

où

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}(t'), \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}(t') \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_0 = e\left\{\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]\right\}.$$

*) Notons que le calcul se fait en admettant que la charge n'est pas ponctuelle mais possède un certain rayon r_0. Cependant, au lieu d'une introduction explicite du facteur forme il suffit en intégrant sur k d'introduire la limite supérieure $k_{max} \gg 2\pi/r_0$. De plus, la force de réaction qui nous intéresse, à la différence de la masse électromagnétique, ne dépend pas de r_0.

La méthode appliquée de calcul de la réaction de rayonnement est dans plusieurs cas commode même pour un milieu isotrope ou le vide. Dans le cas du vide on a pu s'en convaincre au chapitre 2. Par ailleurs, pour une particule en mouvement uniforme dans un milieu isotrope à indice de réfraction $n > c/v$ (7.15) conduit à la formule (7.9) de la force de freinage par effet Tchérenkov.

Le mouvement superlumineux d'un oscillateur a été examiné dans [79]. Dans un milieu isotrope, pour un oscillateur qui vibre parallèlement à la vitesse de translation $\mathbf{v}_0$, on a

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{R} = \{0,\ 0,\ v_0t + R_0 \sin \Omega t\}; \quad \mathbf{v} = \{0,\ 0,\ v_0 + v_\sim \cos \Omega t\},\\ &v_\sim = R_0\Omega, \quad \mathbf{a}_1 = \{1,\ 0,\ 0\}, \quad \mathbf{a}_2 = \{0,\ \cos\theta,\ -\sin\theta\},\\ &\mathbf{k} = \{0,\ k\sin\theta,\ k\cos\theta\}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.16)$$

dans ce qui suit il ne sera question que de l'approximation dipolaire, du cas où

$$kR_0 = \frac{\omega}{c} n(\omega) R_0 \ll 1. \qquad (7.17)$$

Dans ces conditions on tire de (7.15) l'expression suivante du travail appliqué par le champ de rayonnement à la particule

$$A = \int_0^T \mathbf{v}\mathbf{f}_{\mathrm{rad}}\,dt = v_0 \int_0^T f_{\mathrm{rad},z}\,dt + v_\sim \int_0^T \cos\Omega t f_{\mathrm{rad},z}\,dt = A_0 + A_\sim, \qquad (7.18)$$

$$A = -\frac{e^2R_0^2T}{4c^3\beta_0}\left\{\int\limits_{\beta_0 n(\omega)\cos\theta<1} \omega^3\left[1 - \frac{1}{\beta_0^2 n^2(\omega)}\left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]d\omega + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\beta_0 n\cos\theta>1} \omega^3\left[1 - \frac{1}{\beta_0^2 n^2(\omega)}\left(1 + \frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]d\omega\right\}, \qquad (7.19)$$

où

$$\omega = \frac{\Omega}{|1 - \beta_0 n(\omega)\cos\theta|}, \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c}. \qquad (7.20)$$

Si la relation de dispersion a l'allure d'un « palier », c.-à-d.

$$\left.\begin{aligned} &n(\omega) = n = \text{const} && \text{pour} \quad \omega \leqslant \omega_m,\\ &n(\omega) = 1 && \text{pour} \quad \varphi > \omega_m, \end{aligned}\right\} \qquad (7.21)$$

alors le résultat (7.19) peut se mettre sous la forme

$$A = -\frac{e^2\Omega^4R_0^2nT}{4c^3}\int \frac{\sin^3\theta\,d\theta}{|1 - \beta_0 n\cos\theta|^5} \qquad (7,22)$$

où, pour l'effet Doppler anomal,

$$0 \leqslant \theta \leqslant \arccos\frac{1 + \Omega/\omega_m}{\beta_0 n},$$

et pour l'effet Doppler normal,

$$\arccos \frac{1-\Omega/\omega_m}{\beta_0 n} \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

La grandeur $U = \int\limits_0^T \frac{dW}{dt} dt = -A > 0$ est égale à l'énergie émise par la particule pendant le temps T. L'expression (7.22) est un analogue de la formule (6.63) associée à un oscillateur qui vibre perpendiculairement à la vitesse de translation.

Le travail du champ de rayonnement absorbé par l'augmentation ou la diminution de l'énergie d'oscillation d'une particule vaut, conformément à (7.19),

$$A_{\sim} = A - A_0 = \frac{e^2 \Omega R_0^2 T}{4c^3 \beta_0} \Bigg\{ \int\limits_{\beta_0 n(\omega)\cos\theta > 1} \omega^2 \left[1 - \frac{1}{\beta_0^2 n^2(\omega)} \left(1 + \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right] d\omega -$$

$$- \int\limits_{\beta_0 n(\omega)\cos\theta < 1} \omega^2 \left[1 - \frac{1}{\beta_0^2 n^2(\omega)} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right] d\omega \Bigg\}. \quad (7.23)$$

Dans le cas (7.21)

$$A_{\sim} = \frac{e^2 \Omega^4 R_0^2 n T}{4c^3} \left\{ \int\limits_0^{\mathcal{A}} \frac{\sin^3\theta \, d\theta}{(1-\beta_0 n \cos\theta)^4} - \int\limits_{\mathcal{B}}^{\pi} \frac{\sin^3\theta \, d\theta}{(1-\beta_0 n \cos\theta)^4} \right\} \quad (7.24)$$

$$\mathcal{A} \equiv \arccos \frac{1}{\beta_0 n} \left(1 + \frac{\Omega}{\omega_m} \right), \quad \mathcal{B} \equiv \arccos \frac{1}{\beta_0 n} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega_m} \right) \Big).$$

Ainsi, le rayonnement qui se propage en dehors du cône Tchérenkov, auquel correspondent les deuxièmes intégrales de (7.23) et (7.24), amortit les oscillations, alors que le rayonnement à l'intérieur de ce cône (effet Doppler anomal), auquel correspondent les premières intégrales de (7.23) et (7.24), amplifie les oscillations *). Ce résultat est en parfait accord avec les considérations quantiques (cf. plus haut). On voit sans peine que les deuxièmes intégrales de (7.23) et (7.24) sont plus grandes que les premières. Il s'ensuit que dans un milieu isotrope les vibrations d'un oscillateur sont toujours amorties et $A_{\sim} \to 0$ seulement si dans une grande partie du domaine d'intégration $\beta_0 n(\omega) \to \infty$.

[79, 87] étudient encore le mouvement d'un oscillateur animé de vibrations perpendiculaires à sa vitesse de translation $\mathbf{v}_0$, ainsi que le mouvement hélicoïdal d'une charge dans un champ magné-

*) Le travail positif $A_{\sim}$ ou une de ses fractions est responsable de l'amplification des oscillations du fait que $A_{\sim}$ est le travail de la force de réaction sur la particule.

tique. On y montre que dans un milieu isotrope, de même que dans le cas précédent, les oscillations sont toujours amorties (cette conclusion n'est pas de rigueur pour les autres sources de rayonnement, par exemple, aux antennes de longueur suffisante).

Pour élucider certaines particularités du mouvement superlumineux des charges dans des milieux anisotropes, il est commode d'examiner la translation d'un oscillateur le long de l'axe optique d'un cristal uniaxial non gyrotrope, l'électron étant considéré comme oscillant dans la même direction. On a

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{R}=\{0,\ 0,\ v_0t+R_0\sin\Omega t\},\quad \mathbf{k}=\{0,\ k\sin\theta,\ k\cos\theta\},\\ &\mathbf{a}_1=\{0,\ \cos\theta+K_1\sin\theta,\ -\sin\theta+K_1\cos\theta\},\ \mathbf{a}_2=\{1,\ 0,\ 0\},\\ &K_1=\frac{(n_1^2-\varepsilon_\perp)\cos\theta}{\varepsilon_\perp\sin\theta},\quad \frac{1}{n_1^2}=\frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_\parallel}+\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_\perp},\quad kR_0\ll 1,\end{aligned}\right\}\tag{7.25}$$

où n_1 est l'indice de réfraction de l'onde extraordinaire la seule émise dans le cas considéré. La grandeur K_1 est le rapport des composantes parallèle et perpendiculaire au vecteur $\mathbf{k}$ du vecteur d'intensité du champ électrique d'une onde extraordinaire; ce vecteur électrique est parallèle au vecteur de polarisation $\mathbf{a}_1$ (cf. chapitre 6).

Maintenant on peut obtenir les expressions qui correspondent aux formules (7.19) et (7.23)

$$A=-\frac{e^2R_0^2T}{4c^3\beta_0}\int\limits_{L_1+L_2}\omega^3\frac{\varepsilon_\perp^2(\omega)\sin^2\theta\,|\,1-(\operatorname{cotg}\theta/n_1)(\partial n_1/\partial\theta)\,|^{-1}\,d\omega}{[\varepsilon_\perp(\omega)\sin^2\theta+\varepsilon_\parallel\cos^2\theta]^2},$$

$$A_\sim=\frac{e^2R_0^2\Omega T}{4c^3\beta_0}\left\{-\int\limits_{L_1}\omega^2\frac{\varepsilon_\perp^2(\omega)\sin^2\theta\,|\,1-(\operatorname{cotg}\theta/n_1)(\partial n_1/\partial\theta\,|^{-1}\,d\omega}{[\varepsilon_\perp(\omega)\sin^2\theta+\varepsilon_\parallel(\omega)\cos^2\theta]^2}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{L_2}\omega^2\frac{\varepsilon_\perp^2(\omega)\sin^2\theta\,|\,1-(\operatorname{cotg}\theta/n_1)(\partial n_1/\partial\theta\,|^{-1}\,d\omega}{[\varepsilon_\perp(\omega)\sin^2\theta+\varepsilon_\parallel(\omega)\cos^2\theta]^2}\right\}.\tag{7.26}$$

Ici les domaines d'intégration L_1 et L_2 sont déterminés par les relations Doppler

$$1-\beta_0 n(\omega,\theta)\cos\theta=\Omega/\omega\tag{7.27}$$

pour les fréquences Doppler normales (domaine L_1) et

$$\beta_0 n(\omega,\theta)\cos\theta-1=\Omega/\omega\tag{7.28}$$

pour les fréquences Doppler anomales (domaine L_2). On voit aisément que les deux intégrales pour $A_\sim$ de (7.26) sont toujours positives. Cela signifie qu'au rayonnement des fréquences dopplériennes normales (première intégrale de (7.26)) correspond l'amortissement des oscillations, alors qu'au rayonnement des fréquences dopplériennes anomales, leur amplification.

Il convient de noter que cette division est en quelque sorte conventionnelle, et ce n'est que la force égale à la différence des deux intégrales qui a un sens physique.

A la différence du cas isotrope, le problème considéré peut donner lieu non seulement à l'amortissement des oscillations mais aussi à leur amplification (on a en vue le signe du travail $A_{\sim}$ tout entier, et non celui de ses parties). Supposons, par exemple, que $\varepsilon_{\parallel}$ et $\varepsilon_{\perp}$ ne dépendent pas de la fréquence; en outre, $\varepsilon_{\parallel} < 0$, $\varepsilon_{\perp} > 0$; alors $n_1^2(\theta_\infty) \to \infty$ pour un angle défini par la condition (cf. l'expression (7.25) de n_1^2)

$$\varepsilon_{\perp} \sin^2\theta_\infty + \varepsilon_{\parallel} \cos^2\theta_\infty = 0. \tag{7.29}$$

Dans un tel milieu les ondes extraordinaires peuvent se propager sous un angle $|\theta| < |\theta_\infty|$, mais pour les angles $^1/_2\pi > \theta > \theta_\infty$ on a déjà $\tilde{n}_1^2 < 0$ et la propagation des ondes est rendue impossible. Ensuite, n_1^2 est minimal et égal à $\varepsilon_{\perp}$ pour $\theta = 0$. Si maintenant $\beta_0\varepsilon_{\perp} > 1$, $\varepsilon_{\parallel}$ peut toujours être choisi tel que l'angle Tchérenkov θ_0 soit plus grand que θ_∞ (ici $\beta_0 n \cos\theta_0 = 1$). Dans ces conditions, évidemment, en général, le rayonnement Tchérenkov n'a pas lieu (à l'angle θ_0 correspondent les valeurs de $\tilde{n}_1^2 < 0$) et en avant sont émises seulement des ondes Doppler anomales (pour $\theta < {}^1/_2\pi$, et en fait pour $\theta < \theta_\infty$). En arrière (pour $\pi < \theta < \theta_\infty$) sont émises les ondes Doppler normales, mais là $(1 - \beta_0 n_1 \cos\theta) = (1 + \beta_0 n_1 |\cos\theta|)$ et le travail total $A_{\sim}$ est positif. On peut le voir en passant dans (7.26) compte tenu de (7.27) et (7.28) à l'intégration sur θ, d'où il résulte pour le cas envisagé

$$A_{\sim} = \frac{e^2\Omega^4 R_0^2 T}{4c^3\beta_0} \left\{ \int_0^{\mathcal{A}} \frac{n_1^5(\theta)\sin^3\theta\, d\theta}{\varepsilon_{\parallel}^2 [\beta_0 n_1(\theta)\cos\theta - 1]^4} - \int_0^{\mathcal{A}} \frac{n_1^5(\theta')\sin^3\theta'\, d\theta'}{\varepsilon_{\parallel}^2 [\beta_0 n_1(\theta')\cos\theta' + 1]^4} \right\} \tag{7.30}$$

$$\left(\mathcal{A} \equiv \operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{|\varepsilon_{\parallel}|}{\varepsilon_{\perp}}}\right),$$

où $\theta' = \pi - \theta$. Ici $A_{\sim} > 0$ du fait que la première intégrale de (7.30) est toujours plus grande que la deuxième. Ainsi le cas considéré donne lieu à l'amplification des oscillations.

La question du mouvement d'une charge dans un magnétoplasma fait l'objet d'étude de [87], où l'on montre que dans des conditions déterminées, ce cas-là donne aussi lieu à l'amplification des oscillations, ou plus exactement à l'« extension » des spires de la trajectoire

hélicoïdale de la particule dans le champ magnétique. Ainsi, le pompage a lieu, par exemple, si

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_H^2} = \beta_0 \ll 1, \quad \omega_H = \frac{eH_0}{mc}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m},$$

où H_0 est le champ magnétique uniforme où se trouve plongé le plasma; N, la concentration des électrons du plasma. Le pompage apparaît également pour les valeurs suivantes des paramètres (ils sont obtenus par intégration numérique): $\beta_0 = 0{,}01$; $\omega_p^2/\omega_H^2 = 10$ et $\beta_0 = 0{,}99$; $\omega_p^2/\omega_H^2 = 10$. Mais si, par exemple, $\beta_0 = 0{,}99$ et $\omega_p^2/\omega_H^2 = 0{,}01$, le mouvement transversal de la particule s'amortit.

Dans le cas des oscillations l'énergie du mouvement progressif (dans le cas actuel c'est le déplacement le long du champ) est transférée au mouvement transversal. Il en résulte que la vitesse de la translation v_0 diminue et le pompage prend fin lorsque la vitesse v_0 atteint la valeur minimale de la vitesse de la lumière $c/n_{\max}$ dans le milieu donné.

La différence entre les signes de la force subie par le mouvement oscillatoire de la particule, dans le cas de l'effet Doppler normal, correspond totalement aux conclusions tirées des lois de conservation (cf. plus haut). Comme nous l'avons déjà souligné, dans le cas isotrope, cette différence affaiblit le « freinage » ou même pratiquement l'annule, mais elle ne peut pas déclencher le pompage des vibrations de l'oscillateur (pour le rayonnement superlumineux, l'effet quantique du pompage des oscillations associé à l'étalement du paquet dans l'« espace d'énergie », certes, a lieu aussi dans un milieu isotrope). Dans un milieu anisotrope et, notamment, dans un magnétoplasma le pompage des oscillations est possible.

Il est parfaitement clair que l'instabilité des faisceaux « superlumineux » des particules qui dans une approximation classique apparaissent déjà dans un milieu isotrope, est étroitement liée à la réaction de rayonnement examiné précédemment d'une particule.

Constatons également que dans ce qui précède, on admettait que le milieu était équilibré, ou en tous cas tel que si l'on tenait compte de l'amortissement (conductivité), il absorbait les ondes normales: leur amplitude diminue à mesure qu'elles se propagent dans le milieu.

Dans les milieux à conductivité négative (on dit parfois que ce sont des milieux invertis) les ondes normales sont amplifiées (effet maser) et la question de la réaction de rayonnement impose une discussion spéciale [60, 88]. Dans ces conditions, l'intensification d'oscillations peut s'amorcer même à une vitesse infralumineuse ($v < c/n$), par exemple, dans le cas du mouvement d'un oscillateur non relativiste.

Vu la grande attention qu'on porte actuellement à la physique du plasma, examinons sommairement certains aspects associés à la théorie du rayonnement à des vitesses superlumineuses ($v > c/n$).

Dans un plasma isotrope, c.-à-d. en l'absence de champ magnétique extérieur $\mathbf{H}_0$, pour les ondes transversales

$$n_{1,2}^2 = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu_{eff}^2)} < 1$$

(la vitesse de phase des ondes $v_{ph} = c/n > c$) ; par conséquent, l'effet Tchérenkov est impossible (cf. pourtant, chapitre 8; plus haut on suppose que $v < c$). Pourtant si l'on tient compte de l'agitation thermique, dans un plasma isotrope, peuvent se propager des ondes longitudinales *) telles que leur indice de réfraction soit (cf. [64] et chapitre 11)

$$n_3^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2} = \frac{1 - \omega_p^2/\omega^2}{3\beta_T^2}, \qquad \beta_T^2 = \frac{\varkappa T}{mc^2},$$
$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}. \tag{7.31}$$

Ici e, m sont la charge et la masse de l'électron ; N, la concentration électronique; $\varkappa$, la constante de Boltzmann; T, la température absolue. La relation (7.31) est équivalente à l'équation de dispersion

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3\frac{\varkappa T}{m}k^2$$

et conduit aux expressions suivantes des vitesses de phase et de groupe

$$\left.\begin{aligned} v_{ph} &= \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_3} = \frac{\sqrt{3\varkappa T/m}}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}, \\ v_{gr} &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{3\varkappa T}{m\omega}k = \sqrt{\frac{3\varkappa T}{m}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{7.32}$$

Les ondes de plasma forment l'une des branches à droits égaux des ondes normales d'un plasma. La vitesse de phase des ondes de plasma peut être inférieure à la vitesse de la lumière c dans le vide ; par conséquent, ces ondes rendent possible l'apparition de l'effet Tchérenkov pour le mouvement « ordinaire » d'une source (particule) à la vitesse $v < c$. Un tel rayonnement apparaît précisément lorsque les particules chargées se déplacent dans un plasma : l'énergie qu'elles perdent par collisions « lointaines » va justement au rayonnement Tchérenkov des ondes de plasma. Une particule de charge e et de

*) Nous ne tenons pas compte du mouvement des ions et de la sorte passons outre les ondes longitudinales quasi acoustiques (basse fréquence) (cf. [64] et chapitre 11). Nous ne tenons pas compte non plus de l'absorption due aux collisions en posant le nombre de collisions $\nu_{eff} = 0$.

vitesse v sensiblement plus grande que la vitesse thermique $v_T = \sqrt{\varkappa T/m}$ perd par ce rayonnement par unité de temps l'énergie [89]

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{e^2\omega_p^2}{2v} \ln\left(1+\frac{2v^2}{v_T^2}\right). \tag{7.33}$$

L'émission par une particule en mouvement des ondes de plasma ne s'appelle pas dans les cas courants effet Tchérenkov. La question de la dénomination n'est pas très importante, certes, et d'ailleurs c'est une affaire de goût ou d'habitude. Néanmoins, nous pensons qu'il est très à propos de parler de l'effet Tchérenkov justement dans le cas du rayonnement des ondes de plasma (et non, par exemple, dans celui des ondes acoustiques). Premièrement, comme nous l'avons déjà dit, dans un plasma isotrope, les ondes longitudinales (de plasma) sont aussi essentielles que les ondes électromagnétiques (transversales). Deuxièmement, et ceci est plus important, dans un magnétoplasma (c.-à-d. en présence d'un champ magnétique extérieur $\mathbf{H}_0$) apparaissent dans le cas général trois ondes normales qui ne sont ni longitudinales ni transversales. Dégager dans ces conditions les ondes de plasma devient une chose tout à fait conventionnelle [64]; la division des ondes émises par une charge se déplaçant dans un magnétoplasma en ondes électromagnétiques Tchérenkov et ondes de type plasmique est en fait tout aussi conventionnelle. De plus, dans les conditions où le champ magnétique extérieur $\mathbf{H}_0$ tend à s'annuler (passer à l'isotropie), l'émission Tchérenkov ne disparaît pas mais se transforme en permanence en une émission des ondes de plasma mentionnée [86].

Notons que ce qui vient d'être dit se rapporte non seulement au plasma gazeux mais aussi à d'autres milieux pour lesquels on peut parler avec une certaine approximation de la propagation des ondes de plasma. Sous ce rapport, les milieux optiques anisotropes (cristaux) constituent un analogue des magnétoplasmas.

Dans les corps solides et liquides les fréquences de plasma $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$ sont très élevées (elles reposent dans la plage ultraviolette du spectre). C'est pourquoi il importe déjà de tenir compte de la quantification et on introduit la notion susmentionnée des plasmons [90], quanta des ondes de plasma, d'énergie $\hbar\omega \approx \hbar\omega_p$ (ici on admet que le milieu est isotrope). Il est évident que la différence entre les plasmons et les quanta du champ électromagnétique d'un milieu (« photons dans le milieu ») ne correspond qu'à la différence entre les ondes transversales et longitudinales (cf. plus haut). Dans un milieu anisotrope cette différence n'existe en général pas et les pertes d'énergie dites discrètes lors du passage des électrons par des couches minces [90] peuvent en toute raison être considérées comme résultant de l'effet Tchérenkov [91]. En étudiant les pertes

discrètes il est important de tenir compte également de l'impulsion des photons ou des plasmons [90].

Dans le cas d'un plasma de gaz raréfié, lorsque les fréquences ω_p sont relativement faibles (on a en vue la condition $\hbar\omega_p \ll {}^1/_2 Mv^2$, $\hbar\omega_p \ll \varkappa T$, où M est la masse et v, la vitesse de la particule émettrice; T, la température du plasma), l'utilisation des concepts quantiques n'est pas de rigueur. Pourtant, là aussi, de même que pour les ondes électromagnétiques, l'application de la théorie quantique du rayonnement et de l'absorption des ondes de plasma, ainsi que de la notion même des plasmons, peut être très commode et efficace. Indiquons à titre d'exemple, le calcul de la réabsorption des ondes de plasma et la recherche du critère d'instabilité d'un faisceau de particules se déplaçant dans un plasma [81].

L'instabilité d'un faisceau apparaît si les perturbations (ondes) qui s'y forment vont en augmentant. Du point de vue quantique, cela signifie que le coefficient d'absorption des ondes (quanta) du faisceau doit être négatif (c.-à-d. $\mu < 0$), ce qui a précisément lieu si les particules du faisceau, premièrement, peuvent en général émettre des ondes, et deuxièmement, si la fonction de distribution de particules dans le faisceau suivant les vitesses assure la prédominance de l'émission induite sur l'absorption. Une particule suffisamment rapide ($v \gg \sqrt{\varkappa T/m}$) se déplaçant dans un plasma isotrope rayonne, comme nous l'avons dit, des ondes Tchérenkov de plasma. Quant au coefficient d'absorption μ, il est négatif (on observe un plus grand nombre d'événements sous la forme d'émission induite que d'événements sous la forme d'absorption), si le faisceau compte plus de particules aux niveaux « supérieurs » qu'aux niveaux « inférieurs » (cf. (7.7), (7.8) et, plus en détails, le chapitre 15). Pour des particules sans degrés de liberté internes (c.-à-d. électrons libres, protons, etc.) ou en négligeant la modification de la structure interne, le niveau supérieur correspond simplement à une plus grande vitesse. De là il est immédiat qu'un flux est instable si pour l'un quelconque intervalle de vitesses les particules rapides sont plus nombreuses que de particules lentes, c.-à-d. si la dérivée de la fonction de distribution des particules dans le faiseau suivant les vitesses $f_s(v)$ est positive. Cette même condition d'instabilité, $df_s/dv > 0$, peut également s'obtenir à partir de la théorie classique [92], mais à la suite d'une étude spéciale. Tout aussi et même plus efficace dans un certain sens (vu la grande complexité du problème) est la méthode quantique de déduction du critère de stabilité pour le cas déjà mentionné d'un faisceau des particules chargées se déplaçant dans un magnétoplasma (ici il faut tenir compte de la variation de la projection de la vitesse de la particule perpendiculaire au champ magnétique ou, dans le langage quantique, tenir compte des transitions entre les niveaux d'énergie pour le mouvement perpendiculaire au champ et qui est quantifié [45, 80]).

A titre d'illustration examinons par souci de simplicité le rayonnement dans la direction de la vitesse **v** d'un flux unidimensionnel de particules (dans le cas général, le rôle de $f_s(v)$ est rempli par la fonction $f_s(v_k)$, où $v_k = v\cos\theta$ est la projection de la vitesse des particules du flux sur la direction du vecteur d'onde **k** des ondes émises). Pour la fonction de distribution de la forme

$$f_s(v_k) = \text{const}\cdot\exp\left\{-\frac{M}{2\varkappa T_s}(v_k - v_0\cos\theta)^2\right\},$$

représentée sur la figure 7.2, le coefficient $\mu > 0$ dans le domaine *II*, où $df_s(v_k)/dv_k < 0$ et $\mu < 0$ dans le domaine *I* avec $df_s(v_k)/dv_k > 0$. En vertu de la condition Tchérenkov, $v\cos\theta_0 = v_k = c/n_3(\omega)$ et la fréquence des ondes rayonnées par les particules à valeurs différentes de v_k (en particulier, à valeurs qui correspondent aux domaines *I* et *II* de la fig. 7.2) n'est pas la même ; donc, les ondes ne peuvent s'amortir réciproquement et assurer la stabilité, même si $\mu < 0$ seulement pour une petite partie des valeurs de v_k. Remarquons que pour toute fonction tridimensionnelle isotrope de distribution des électrons suivant les vitesses $f = f(v^2)$, la fonction $f(v_k) = \int f(v^2)\, dv_\perp$ ($v_\perp$ est la projection de la vitesse sur la direction perpendiculaire à **k**) n'a pas de dérivée positive et la distribution est stable.

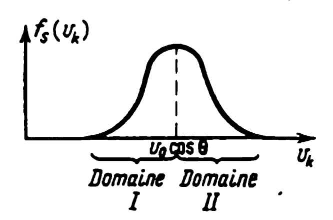


Fig. 7.2. Fonction de distribution $f_s(v_k)$ des particules dans un faisceau

Le fait qu'une particule soit capable d'émettre des ondes Tchérenkov rend, certes, possible l'absorption par cette particule des ondes de même nature quelle que soit leur origine. Il est donc clair que le plasma doit être le siège, outre de l'absorption des ondes due aux collisions *), encore de l'absorption du type Tchérenkov. Dans un plasma isotrope une telle absorption n'existe pas pour les ondes transversales du fait que le rayonnement Tchérenkov n'existe pas non plus **).

Mais les ondes de plasma doivent également être absorbées en l'absence de collisions. L'existence d'une telle absorption a été

*) Les collisions des particules font apparaître le rayonnement de freinage. Le processus inverse consiste précisément à absorber les ondes sous l'effet des collisions.

**) En utilisant la distribution de Maxwell usuelle des vitesses on peut aboutir formellement à la conclusion sur la présence d'une absorption très faible bien que différente de zéro. Toutefois, une telle conclusion est fausse, elle est due au fait que la distribution de Maxwell non relativiste n'assure pas l'absence des particules de vitesse $v > c$.

depuis longtemps mise en évidence d'une tout autre façon [93], sans recourir au rayonnement Tchérenkov.

Considérons l'équation cinétique linéarisée des électrons de plasma (cf., par exemple, [64] et chapitre 11)

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}}f_1+\frac{e}{m}\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{v}}f_0=0,\quad f=f_0+f_1,\quad |f_0|\gg|f_1| \tag{7.34}$$

(ici les collisions sont négligées, alors que $f_0(\mathbf{v})$ est la fonction de distribution en approximation nulle, c.-à-d. dans les conditions d'équilibre: distribution de Maxwell). La méthode de Fourier (c.-à-d. la substitution $f_1(\mathbf{v},\mathbf{r},t)=g(\mathbf{v})\exp[i(\mathbf{kr}-\omega t)]$) conduit alors à l'expression

$$i(\omega-\mathbf{kv})f_1=\frac{e}{m}\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{v}}f_0. \tag{7.35}$$

Si $\omega\neq\mathbf{kv}$, on en tire en divisant par $(\omega-\mathbf{kv})$ l'expression définie de f_1; en portant ensuite f_1 dans l'équation du champ

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\mathbf{j}_l}{\partial t},\quad \mathbf{j}_l=e\int\mathbf{v}f_1\,d\mathbf{v},$$

on obtient l'équation de dispersion qui associe ω et $\mathbf{k}$; cette équation peut s'écrire $c^2k^2/\omega^2=n^2_{1,2,3}$, où $n_{1,2,3}$ sont les indices de réfraction utilisés plus haut pour les ondes de la forme considérée: transversales ($n_{1,2}$) et longitudinales (n_3). Pourtant, si l'égalité $\omega=\mathbf{kv}$ est possible, nous ne pouvons pas diviser (7.35) par $(\omega-\mathbf{kv})$, et comme on peut le montrer [93], l'onde longitudinale qui se propage dans le plasma s'amortit. Mais la condition

$$\omega=\mathbf{kv}=\frac{\omega n v}{c}\cos\theta,\quad k^2=\frac{\omega^2n^2}{c^2} \tag{7.36}$$

est justement la condition Tchérenkov (6.53), (6.55). Comme nous l'avons dit, dans un plasma isotrope elle ne peut être respectée que pour les ondes de plasma dont l'absorption constitue précisément dans ce cas l'effet Tchérenkov inverse (dans ces conditions l'onde s'évanouit et les électrons de plasma dont la vitesse satisfait à la condition (7.36) acquièrent une énergie supplémentaire) *).

En présence d'un champ magnétique extérieur (dans un magnétoplasma) l'émission des ondes peut résulter des collisions (rayonnement de freinage), de l'effet Tchérenkov, ou de l'action de l'accélération de la particule dans le champ magnétique (rayonnement synchrotron). Ceci fait qu'il existe trois mécanismes d'absorption. Il faut d'ailleurs faire une réserve: la division du rayonnement et de l'absorption en rayonnement Tchérenkov et rayonnement synchro-

*) L'interprétation physique de l'amortissement des ondes de plasma non lié aux collisions a été au fond déjà donnée dans [92], qui pourtant ne se référait pas explicitement à l'effet Tchérenkov.

tron est quelque peu conventionnelle. Nous savons que dans un champ magnétique une particule (un électron) se déplace suivant une ligne hélicoïdale en tournant à la fréquence $\omega_H^* = \omega_H mc^2/\mathscr{E} = (eH_0/mc)(mc^2/\mathscr{E})$ ($\mathscr{E}$ est l'énergie totale). Dans le vide un tel mouvement produit l'émission aux fréquences $s\omega_H^*$ ($s = 1, 2, \ldots$; pour simplifier, nous ne tenons pas compte ici du décalage Doppler). Mais en présence d'un plasma, le caractère du rayonnement (son intensité, directivité et polarisation) change et en plus des fréquences $s\omega_H^*$ on peut voir apparaître un rayonnement spectre continu qui est certainement un effet Tchérenkov (si la particule se déplace suivant strictement le champ, le rayonnement synchrotron disparaît tout à fait). D'autre part, lorsqu'une particule se déplace, par exemple, suivant une circonférence dans le plan perpendiculaire au champ $\mathbf{H}_0$, elle n'émet que des fréquences discrètes $s\omega_H^*$, c.-à-d. dans la terminologie adoptée, il s'agit seulement du rayonnement synchrotron. Mais au sens physique il est évident que dans ce cas-là aussi, si le rayon de la circonférence est suffisant et $\mathscr{E}/mc^2 \gg 1$, le spectre du rayonnement est pratiquement continu et s'apparente dans le domaine correspondant des fréquences au spectre du rayonnement Tchérenkov. Ce qui vient d'être dit montre que dans le cas général seule est conséquente l'étude unifiée du rayonnement et de l'absorption du freinage magnétique et Tchérenkov [94].

Examinons de plus près la définition des fréquences émises (et absorbées) dans le magnétoplasma. A cet effet écrivons l'équation des amplitudes du champ $q_{\lambda j}$ introduites précédemment (cf. (7.12))

$$\ddot{q}_{\lambda j} + \omega_{\lambda j}^2 q_{\lambda j} = \sqrt{4\pi}\, \frac{e}{n_{\lambda j}} (\mathbf{v}\mathbf{a}_{\lambda j}^*) \exp(-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{R}) \equiv f(t), \qquad (7.37)$$

où $\omega_{\lambda j}^2 = c^2 k_\lambda^2 / n_{\lambda j}^2$, alors que $\mathbf{R}(t)$ et $\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt$ sont le rayon vecteur et la vitesse de la particule émettrice.

L'équation (7.37) s'obtient en portant le développement (7.12) dans l'équation du potentiel vecteur (7.14), en multipliant cette équation par $\mathbf{a}_{\lambda j}^* \exp(-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})$ et en l'intégrant sur l'espace. Si on ne parle pas du facteur constant, la forme de la « force » $f(t)$ de (7.37) devient tout de suite évidente, puisque

$$\int (\mathbf{j}_e \mathbf{a}_{\lambda j}^*) \exp(-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})\, d\mathbf{r} = e(\mathbf{v}\mathbf{a}_{\lambda j}^*) \exp(-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{R})$$

pour $\mathbf{j}_e = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ (cf. (7.14)).

L'équation (7.37) ne possède des solutions croissantes dans le temps pour $q_{\lambda j}$ conformes au rayonnement qu'aux fréquences $\omega_{\lambda j}$ qui figurent dans le spectre de la « force » $f(t)$. Si, par exemple, un électron se déplace uniformément, alors $\mathbf{R} = \mathbf{v}t$ et dans le spectre de la « force » f ne figure que la fréquence $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$. C'est pourquoi la condition de rayonnement devient $\omega_{\lambda j} = \omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$, c.-à-d. on

obtient tout de suite la condition Tchérenkov (7.36), comme nous l'avons déjà dit au chapitre 6.

Pour un électron dans un champ magnétique $\mathbf{H}_0$ dirigé suivant l'axe z,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R} &= \{R_0 \cos \omega_H^* t,\ R_0 \sin \omega_H^* t,\ v_z t\}, \\ \mathbf{v} &= \{-v_\perp \sin \omega_H^* t,\ v_\perp \cos \omega_H^* t,\ v_z\}, \\ v_\perp &= R_0 \omega_H^*, \\ f(t) &= \text{const}\,(-a_x^* v_\perp \sin \omega_H^* t + a_y^* v_\perp \cos \omega_H^* t + a_z^* v_z) \times \\ &\quad \times \exp\{-i\,(kR_0 \sin\alpha \sin \omega_H^* t + kv_z \cos \alpha t)\}, \end{aligned}\right\} \quad (7.38)$$

où pour simplifier on a posé $k_x = 0$; α est l'angle entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{H}_0$ (axe z). En utilisant le développement de l'onde plane en fonctions de Bessel

$$\exp\{-ik_\lambda R_0 \sin\alpha \sin \omega_H^* t\} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s(k_\lambda R_0 \sin\alpha) \exp(-is\omega_H^* t),$$

on obtient sans peine la condition de la résonance

$$\omega = s\omega_H^* + kv_z \cos\alpha; \quad s = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots \quad (7.39)$$

Pour $s = 0$, cette condition est identique à la condition Tchérenkov (7.36) avec $v = v_z$; par ailleurs, tous les termes en $s \neq 0$ sont absents seulement si le déplacement a lieu rigoureusement le long du champ, lorsque $R_0 = 0$. Pour $s \neq 0$, au lieu de (7.39) on peut écrire ($n = ck/\omega$)

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{s\omega_H^*}{1-(v_z n/c)\cos\alpha}, \quad s > 0, \\ \omega &= \frac{s\omega_H^*}{(v_z n/c)\cos\alpha - 1}, \quad s < 0, \end{aligned}\right\} \quad (7.40)$$

de plus, comme dans tout ce qui précède la fréquence est positive.

Si la vitesse $v_\perp \ll v_z = v \cos\theta$, alors l'électron rayonne dans le champ magnétique comme deux doublets choisis de façon convenable et se déplaçant le long du champ à la vitesse $v_z \approx v$, à quoi répondent les valeurs $s = \pm 1$ (plus précisément, l'intensité des harmoniques plus élevées est faible si $k R_0 \sin\alpha = (\omega n/c)(v_\perp/\omega_H^*) \times \sin\alpha \ll 1$). Pour $s = \pm 1$ les formules (7.40) coïncident au fond avec la formule (6.59) de l'effet Doppler dans un milieu (évidemment pour ce mouvement dans un champ magnétique $\omega_{00}\sqrt{1 - v^2/c^2} = \omega_{00} mc^2/\mathcal{E} = \omega_H mc^2/\mathcal{E} = \omega_H^*$, puisque ω_H est la fréquence dans le système où le centre de gravité de la source est au repos).

En passant du rayonnement à l'absorption, nous voyons que dans le magnétoplasma les ondes aux fréquences (7.39) qui correspondent au rayonnement de freinage magnétique et Tchérenkov (compte tenu de l'effet Doppler) doivent être absorbées. Notons qu'on peut aboutir

au même résultat [95] en examinant, l'électron se déplaçant dans un champ magnétique, le spectre des fréquences de la force qui agit sur cet électron dans le champ de l'onde (la fréquence de la force n'est pas égale à la fréquence du champ **E** du fait que l'électron se déplace et à des instants différents se trouve dans un champ d'intensité différente).

Dans ce qui précède nous n'avons exposé que les conditions de rayonnement et d'absorption. Le calcul de l'intensité du rayonnement et du coefficient d'absorption est déjà un problème à part qui parfois est très lourd. Il se résout tant par la méthode d'équation cinétique que par d'autres méthodes. Le résumé des résultats correspondants relatifs au plasma non relativiste est donné dans [64] (cf. également chapitre 11). Il ne serait peut-être pas superflu de remarquer ici que l'absorption des ondes dans un magnétoplasma, non liée aux collisions, joue un grand rôle et non seulement à des températures surélevées (dans des installations utilisatrices des réactions thermonucléaires), mais aussi, par exemple, dans la couronne solaire (température $T \sim 10^6$ degrés; cf. [45, 64]).

Dans les cas courants on envisage seulement le rayonnement Tchérenkov des charges ponctuelles ou des paquets chargés. D'autre part, il est parfaitement clair que l'effet Tchérenkov est produit par toute source se déplaçant à la vitesse v, supérieure à la vitesse de phase de la lumière dans le milieu $v_{\text{ph}} = c/n$. Autrement dit, la condition de rayonnement (6.53) se conserve aussi pour tout multipôle, en particulier pour les doublets magnétique et électrique (cf. la bibliographie de [65-68]); quant à l'intensité du rayonnement, elle change sensiblement et déjà pour les doublets (sans parler des multipôles plus élevés) elle est d'habitude sensiblement plus faible que pour une charge. Ainsi, suivant l'ordre de grandeur, pour $v \sim c$ et $n \sim 1$ l'intensité du rayonnement d'un doublet électrique de moment $p = ed$ est $p^2\omega^2/e^2c^2 \sim (d/\lambda)^2$ fois plus petite que celle du rayonnement de la charge e; dans le cas d'un doublet magnétique μ ce rapport est de l'ordre de $\mu^2\omega^2/e^2c^2$ (la présence du facteur $(d/\lambda)^2$ s'explique sans peine si le doublet est envisagé comme deux charges $+e$ et $-e$ séparées par la distance d; cf. [96]).

Pour les particules élémentaires (électrons, neutron, etc.) ou les noyaux atomiques, le rayonnement Tchérenkov du doublet magnétique est très faible et ne présente pas d'intérêt. La situation change lorsqu'on examine les paquets de particules qui dans certaines conditions rayonnent comme particules ponctuelles de charge et moments multipolaires caractéristiques du paquet tout entier. C'est précisément cette situation qui peut se présenter dans le cas des paquets ou des courants annulaires se déplaçant dans un magnétoplasma ou suivant l'axe des canaux et des fentes, ainsi qu'au voisinage d'un système ralentisseur, etc. D'autre part, le calcul de l'intensité du rayonnement Tchérenkov des doublets est un procédé métho-

dologique connu qui permet en particulier d'obtenir certains renseignements sur le moment magnétique des particules de spin différent (cf. la bibliographie de [68]). Pendant longtemps, le rayonnement Tchérenkov d'un doublet magnétique présentait des points obscurs. Enfin, il est assez curieux d'établir comment évolue le rayonnement Tchérenkov des doublets lorsqu'ils se déplacent dans des canaux et des fentes. Pour toutes ces raisons nous allons examiner d'une façon plus détaillée le rayonnement Tchérenkov des doublets en nous guidant par [68, 97].

Considérons une particule ponctuelle de charge e, de moment électrique dipolaire $\mathbf{p}$ et de moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ qui se déplace à la vitesse $\mathbf{v} = \text{const}$. La densité de courant associé à la particule vaut alors (ρ_e est la densité de charge; $\mathfrak{M}$, sa magnétisation; $\mathbf{P}$, la polarisation; cf. également (6.20))

$$\mathbf{j} = \rho_e \mathbf{v} + c \operatorname{rot} \mathfrak{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} =$$
$$= e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) + c \operatorname{rot} \{\boldsymbol{\mu}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\} + \frac{\partial}{\partial t}\{\mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\}. \quad (7.41)$$

Pour simplifier admettons que le milieu est isotrope et non magnétique (perméabilité magnétique $\mu = 1$; ne pas confondre avec le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$!). Alors, en adoptant que le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ satisfait à la condition $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, on obtient l'équation (cf., par exemple, (7.14) pour $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta}$ et chapitre 6)

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi, \quad \Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \quad (7.42)$$

$$\left.\begin{gathered}
\mathbf{A} = \sum_{\lambda, j} (q_{\lambda j}\mathbf{A}_{\lambda j} + q^*_{\lambda j}\mathbf{A}^*_{\lambda j}), \quad \mathbf{A}_{\lambda j} = c\sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon}}\,\mathbf{a}_{\lambda j}\exp i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}, \\
\mathbf{a}_{\lambda i}\mathbf{a}_{\lambda j} = \delta_{ij}, \quad \mathbf{k}_\lambda \mathbf{a}_{\lambda j} = 0, \quad i, j = 1, 2, \\
\mathscr{H}_{tr} = \int \frac{\varepsilon E^2_{tr} + H^2}{8\pi}\,dV = \sum_{\lambda, j}(p_{\lambda j}p^*_{\lambda j} + \omega^2_{\lambda j}q_{\lambda j}q^*_{\lambda j}), \\
\mathbf{E}_{tr} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad p_{\lambda j} = \frac{dq_{\lambda j}}{dt} \equiv \dot{q}_{\lambda j}, \\
\omega^2_{\lambda j} = \omega^2_\lambda = \frac{c^2 k^2_\lambda}{\varepsilon}.
\end{gathered}\right\} \quad (7.43)$$

Ici, évidemment, φ est le potentiel scalaire; $\mathscr{H}_{tr}$, l'énergie du champ transversal et $\mathbf{a}_{\lambda j}$, les vecteurs de polarisation. En portant dans (7.42)

l'expression (7.41) et en intégrant sur le volume après avoir multiplié par $\mathbf{A}^*_{\lambda j}$ on a

$$\ddot{q}_{\lambda j}+\omega_\lambda^2 q_{\lambda j}=\frac{1}{c}\int(\mathbf{j}\mathbf{A}^*_{\lambda j})\,dV=$$

$$=\sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon}}\{e(\mathbf{a}_{\lambda j}\mathbf{v})-ic\mu[\mathbf{k}_\lambda\mathbf{a}_{\lambda j}]-i(\mathbf{a}_{\lambda j}\mathbf{p})(\mathbf{k}_\lambda\mathbf{v})\}\exp(-i\mathbf{k}_\lambda\mathbf{v}t). \quad (7.44)$$

En intégrant les équations (7.44), par exemple, sous les conditions initiales $q_{\lambda j}(0)=\dot{q}_{\lambda j}(0)=0$, on trouve l'énergie $\mathscr{H}_{tr}$. Cette énergie contient une partie qui croît dans le temps et qui est liée à la résonance sous la condition Tchérenkov $\omega_\lambda=\mathbf{kv}$. La partie de $\mathscr{H}_{tr}$ qui croît dans le temps (dans ce qui suit il ne s'agira que d'elle) ne dépend pas des conditions initiales et se calcule aisément en introduisant les densités d'états:

$$dZ_i(\omega)=\frac{\varepsilon^{3/2}\omega^2\,d\omega\,d\Omega}{(2\pi c)^3}$$

et en intégrant sur l'angle θ entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{v}$ (ci-dessus $d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$). Toutes ces opérations ont déjà été réalisées aux chapitres 1 et 6.

(7.44) rend clair que le rayonnement de la charge e et des doublets de moments $\mathbf{p}$ et μ est déphasé de $\pi/2$, l'interférence n'apparaissant pas ainsi entre le rayonnement de la charge et des doublets. Autrement dit, l'énergie rayonnée par unité de temps est égale à la somme de l'expression (6.58) de la charge et de l'expression des énergies de l'effet Tchérenkov des doublets

$$\frac{d\mathscr{H}_{tr}}{dt}\equiv\frac{dW}{dt}=\frac{1}{2\pi vc^2}\sum_{j=1,\,2}\int d\omega\int_0^{2\pi}n^2\omega^3\left\{\mu[\mathbf{s}\mathbf{a}_j]+\frac{1}{n}(\mathbf{a}_j\mathbf{p})\right\}^2 d\varphi, \quad (7.45)$$

où $n^2(\omega)=\varepsilon(\omega)$ est la permittivité du milieu,

$$\cos\theta=\cos\theta_0=c/n(\omega)\,v, \quad \mathbf{s}=\mathbf{k}/k,$$

θ et φ, les angles polaire et azimutal du système des coordonnées à axe z dirigé suivant la vitesse $\mathbf{v}$. Dans (7.45), l'intégration par rapport aux fréquences s'opère suivant le domaine, où $vn(\omega)/c\geqslant 1$. Comme nous l'avons souligné au chapitre 6, le calcul susmentionné tient compte de la dispersion (dépendance de n par rapport à ω), bien qu'à première vue cela n'est pas évident.

Pour un doublet magnétique de moment μ, dirigé suivant la vitesse, on tire de (7.45) [61]

$$\frac{dW}{dt}=\frac{\mu^2}{vc^2}\int n^2\left(1-\frac{c^2}{v^2n^2}\right)\omega^3\,d\omega. \quad (7.46)$$

Pour un doublet électrique on obtient également tout de suite de (7.45) les expressions connues [76, 96]. Pour ce qui est des points obscurs susmentionnés, ils apparaissaient lorsque le doublet magné-

tique se déplaçait perpendiculairement à la vitesse. Si dans le système de repos d'une particule les moments de ce doublet sont μ_0 et $\mathbf{p}_0 = 0$, alors comme on le sait dans le système du laboratoire $\mu = \mu_0$ et $\mathbf{p} = \frac{1}{c}$ $[\mathbf{v}\mu]$. Pour ce cas (avec $\mathbf{v} \perp \mu$) on trouve

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu^2}{2vc^2}\int n^2\omega^3 \left\{2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2 - \left(1-\frac{v^2}{n^2c^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{n^2v^2}\right)\right\} d\omega. \quad (7.47)$$

Cette expression coïncide avec celle obtenue dans [71], mais se distingue des résultats d'autres calculs. Ainsi, dans [96], au lieu de la formule (7.47) on donne la relation

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu^2 v}{2c^4}\int n^4\omega^3\left(1-\frac{c^2}{n^2v^2}\right)^2 d\omega. \quad (7.48)$$

La divergence est due au fait que dans [96] et certains autres articles, on utilise les doublets magnétiques « vrais » formés par des pôles magnétiques (le calcul se fait d'abord pour les pôles magnétiques dont on forme ensuite un doublet). Cependant, les doublets magnétiques « vrais » animés d'un mouvement, ne sont équivalents à un moment de courant que dans le vide. En effet, lorsqu'on utilise les pôles magnétiques à densité ρ_m (r), les équations du champ deviennent (cf., par exemple, [98])

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\varepsilon\mathbf{E}}{\partial t}, && \operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = 0,\\ &\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mu\mathbf{H}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\rho_m\mathbf{v}, && \operatorname{div}\mu\mathbf{H} = 4\pi\rho_m, \end{aligned}\right\} \quad (7.49)$$

où l'on admet que $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ et $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ (nous sommes obligés de rappeler encore une fois la nécessité de distinguer la permittivité et le moment magnétique, les deux étant notés par la même lettre μ).

D'où

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\varepsilon\frac{\partial(\rho_m\mathbf{v})}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}(\rho_m\mathbf{v}).$$

Or, en présence des charges électriques et des courants (mais pour $\rho_m = 0$), on a

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}(\rho\mathbf{v}),$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mu\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t}.$$

Ainsi, les équations des pôles magnétiques s'obtiennent des équations des charges en appliquant les substitutions

$$\mathbf{E} \to \mathbf{H},\ \mathbf{H} \to -\mathbf{E},\ \rho \to \rho_m,\ \mu \to \varepsilon.$$

C'est pourquoi, en fait, le moment de courant pour $\mu = 1$ n'est équivalent au moment magnétique « vrai » que dans le vide, lorsque $\varepsilon = 1$. Alors que dans un milieu de $\varepsilon \neq 1$, le moment électrique du moment magnétique « vrai » en mouvement est $\frac{\varepsilon}{c}$ [$\mathbf{v}\boldsymbol{\mu}$] et non pas $\frac{1}{c}$ [$\mathbf{v}\boldsymbol{\mu}$]. Cette substitution est équivalente à la prise en considération de la polarisation électrique du milieu entraîné par le dipôle [99]. Autrement dit, le doublet magnétique « vrai » est équivalent au moment de courant, « créé » par le matériau à permittivité ε et de ce fait susceptible de polarisation. Il est curieux que ce cas est réalisable pour des paquets; à cet effet, comme nous l'avons dit, il faut que (pour la fréquence considérée) la permittivité ε au sein du paquet soit égale à celle du milieu ambiant (par exemple, du plasma placé dans un champ magnétique).

Pour le calcul quantique (cf. [61] et la bibliographie de [68]), les équations de Pauli et de Dirac (ainsi que les équations des particules à spin 1, $^3/_2$ et 2) amènent en particulier les expressions du type (7.46) et (7.47). Si le spin est orienté dans la direction de la vitesse $\mathbf{v}$ ou dans le sens opposé, l'expression du type (7.47) s'obtient seulement pour les transitions avec des sauts de spin, du fait que les composantes de l'opérateur du spin perpendiculaires à $\mathbf{v}$ sont importantes seulement dans les conditions de tels sauts. Or, le rayonnement Tchérenkov d'un doublet magnétique ne possède en fait aucun trait quantique particulier.

L'expression (7.47) a cette propriété caractéristique par rapport à (6.58) et (7.46) que l'expression sous le signe d'intégration ne disparaît pas au seuil de l'effet (pour $\cos\theta_0 = c/nv = 1$), lorsque

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu^2}{vc^2} \int n^2\omega^3 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 d\omega. \tag{7.47a}$$

Ce résultat n'a pourtant rien de paradoxal, puisque la puissance dW/dt, étant elle-même nulle au seuil, croît ensuite progressivement. En effet, avec l'accroissement de la vitesse, compte tenu de la dispersion, le rayonnement s'amorce à la fréquence relative à la valeur maximale de n (ω). Ensuite, en tenant compte du recul, ce que dans un calcul quantique se fait automatiquement, on obtient la formule (7.3) où dans le cas d'un paquet, le rôle de la masse m est joué, évidemment, par la masse du paquet tout entier. En vertu de (7.3), même pour n = const, la vitesse $\mathbf{v}$ allant en augmentant, le rayonnement s'amorce à la même fréquence, dans le cas concerné, à la fréquence $\omega = 0$; ainsi, avec la croissance de v le domaine d'intégration et la puissance du rayonnement elle-même (7.47) augmentent progressivement.

Notons que le calcul quantique permet également d'obtenir l'expression de la forme (7.48); à cet effet, à l'équation de Dirac

d'une particule chargée il faut ajouter le terme correspondant proportionnel à $\gamma_i\gamma_k G_{ik}$, et dans le cas d'une particule au moment magnétique non cinématique, remplacer $\gamma_i\gamma_k F_{ik}$ par $\gamma_i\gamma_k H_{ik}$ (ici $F_{ik} = \{\mathbf{H}, i\mathbf{E}\}$, $H_{ik} = \{\mathbf{H}, i\mathbf{D}\}$ et $G_{ik} = F_{ik} - H_{ik}$; γ_i sont les matrices de Dirac connues). Toutefois, on n'a aucune raison d'introduire ces modifications pour des particules isolées, alors que l'application d'un tel calcul quantique au cas des paquets est absurde.

En terminant l'exposé de la théorie de l'effet Tchérenkov, examinons de plus près le cas du mouvement d'une source (charge, dipôle) dans les canaux et les fentes (pour simplifier, adoptons que dans le canal ou la fente $\varepsilon = 1$ et $\mu = 1$). Cette question présente de l'intérêt premièrement, pour la recherche des voies permettant de diminuer les pertes par ionisation qui, grosso modo, se concentrent au voisinage immédiat de la trajectoire d'une particule. Or, l'effet Tchérenkov est produit dans un domaine dont les dimensions sont de l'ordre de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi c/\omega n = \lambda_0/n$. Deuxièmement, l'étude de l'effet dans les canaux et les fentes présente un certain intérêt pour la méthodologie.

Comme le montre le calcul (cf. [100] et ce qui suit), dans le cas du rayonnement Tchérenkov d'une charge l'intensité du rayonnement pour $a/\lambda \ll 1$ est la même que dans un milieu continu (a est le rayon du canal ou la largeur de la fente). Ce résultat s'accorde avec l'idée intuitive susmentionnée qu'un canal ou une fente de dimension $a \ll \lambda$ en doivent pas intervenir le rayonnement produit dans un domaine aux dimensions d'ordre λ. En fait, cette conclusion est vraie pour les dipôles et d'autres multipôles seulement dans des cas particuliers.

Pour élucider l'influence des canaux fins (fentes) sur le rayonnement Tchérenkov, il est commode d'appliquer le théorème de réciprocité

$$\int\limits_{(1)} \mathbf{j}_\omega^{(1)}\mathbf{E}_\omega^{(2)}\, dV = \int\limits_{(2)} \mathbf{j}_\omega^{(2)}\mathbf{E}_\omega^{(1)}\, dV, \tag{7.50}$$

où $\mathbf{j}_\omega^{(1,\,2)} \equiv \mathbf{j}^{(1,\,2)}(\omega)$ sont les composantes de Fourier de la densité de courant extérieur dans les domaines 1 et 2; le champ $\mathbf{E}_\omega^{(2)}$ est produit par le courant 2 dans le domaine 1, et le champ $\mathbf{E}_\omega^{(1)}$, par le courant 1 dans le domaine 2 (cf., par exemple, [64, 98]) *).

*) Sous la forme indiquée le théorème de réciprocité est vrai pour tout milieu fixe linéaire, mais en l'absence de champ magnétique extérieur. En présence d'un champ magnétique, lorsque les tenseurs de permittivité ε_{ij} et de perméabilité μ_{ij} sont asymétriques, seul le théorème de réciprocité généralisé qui est vrai (cf. § 29 de [64]).

En écrivant le courant sous la forme $\mathbf{j} = \rho_e \mathbf{v} + c \operatorname{rot} \mathfrak{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$, on obtient

$$\int_{(1)} [(\rho_e \mathbf{v})^{(1)}_\omega \mathbf{E}^{(2)}_\omega - i\omega (\mathbf{P}^{(1)}_\omega \mathbf{E}^{(2)}_\omega - \mu_1 \mathfrak{M}^{(1)}_\omega \mathbf{H}^{(2)}_\omega)]\, dV =$$

$$= \int_{(2)} [(\rho_e \mathbf{v})^{(1)}_\omega \mathbf{E}^{(1)}_\omega - i\omega (\mathbf{P}^{(2)}_\omega \mathbf{E}^{(1)}_\omega - \mu_2 \mathfrak{M}^{(2)}_\omega \mathbf{H}^{(1)}_\omega)]\, dV, \quad (7.51)$$

où $\mu_{1,\,2}$ est la perméabilité magnétique du milieu aux points 1 et 2. Dans le cas du rayonnement Tchérenkov d'une charge ponctuelle se déplaçant suivant l'axe z

$$(\rho_e \mathbf{v})^{(1)}_\omega = \frac{e}{2\pi} \mathbf{v} \exp(i\omega z/v)\, \delta(x)\, \delta(y) \quad (7.52)$$

on a en plaçant en 2, point éloigné de la trajectoire, un certain doublet électrique de moment $\mathbf{p}^{(2)} = \int \mathbf{P}^{(2)}\, dV$

$$\frac{e}{2\pi} \mathbf{v}\mathbf{E}^{(2)}(0, 0, z) \exp\left(i \frac{\omega}{v} z\right) dz = -i\omega \mathbf{p}^{(2)} \mathbf{E}(2), \quad (7.53)$$

où $\mathbf{E}^{(2)} \equiv \mathbf{E}^{(1)}(2)$ est le champ de rayonnement au point 2 qui nous intéresse (nous omettons l'indice ω).

Lorsqu'une charge se déplace dans un canal fin ou une fente étroite (c.-à-d. pour $a/\lambda \ll 1$) la quantité $\mathbf{v}\mathbf{E}^{(2)}(0, 0, z)$ reste la même que dans un milieu continu du fait que les composantes tangentielles du champ $\mathbf{E}^{(2)}$ sont continues. C'est pourquoi, comme il est clair de (7.53), le champ de rayonnement reste également le même que dans le cas d'un milieu continu.

Pour un doublet électrique émetteur $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{p}\delta(z - vt) \times \times \delta(x)\, \delta(y)$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int \mathbf{p}\mathbf{E}^{(2)}(0, 0, z) \exp\left(i \frac{\omega z}{v}\right) dz = \mathbf{p}^{(2)} \mathbf{E}(2). \quad (7.54)$$

Si le doublet de moment $\mathbf{p} = \mathbf{p}^{(1)}$ est parallèle à l'axe du canal ou s'il repose dans le plan de la fente, alors pour $a/\lambda \ll 1$ le champ de rayonnement est encore le même que pour le milieu continu. La composante $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ normale à l'interface étant continue, on a pour un doublet perpendiculaire au plan de la fente

$$\mathbf{p}\mathbf{E}^{(2)}(0, 0, z) = \varepsilon(\omega)\, \mathbf{p}\mathbf{E}^{(2)}_0(0, 0, z), \quad (7.55)$$

où $\mathbf{E}^{(2)}_0$ est le champ produit par le doublet 2 dans un milieu continu (fig. 7.3). Si on désigne par $\mathbf{E}_0$ le champ de rayonnement Tchérenkov du doublet 1 (de moment $\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}$) dans un milieu continu, alors le théorème de réciprocité entraîne

$$\frac{1}{2\pi} \mathbf{p}\mathbf{E}^{(2)}_0 \exp\left(\frac{i\omega z}{v}\right) dz = \mathbf{p}^{(2)} \mathbf{E}_0(2). \quad (7.56)$$

En présence d'une fente et en vertu de (7.55) et du théorème de réciprocité

$$\frac{1}{2\pi}\int \mathbf{p}\mathbf{E}^{(2)}\exp\left(i\frac{\omega z}{v}\right)dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\varepsilon\int \mathbf{p}\mathbf{E}_0^{(2)}\exp\left(i\frac{\omega z}{v}\right)dz=\mathbf{p}^{(2)}\mathbf{E}(2). \qquad (7.57)$$

Des deux dernières relations il s'ensuit que le champ du rayonnement Tchérenkov $\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}_0$, c.-à-d. il est ε fois plus grand que

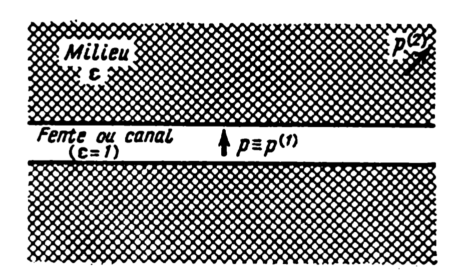


Fig. 7.3. Figure illustrant le calcul du rayonnement d'un doublet dans un canal ou une fente

dans le cas d'un doublet se déplaçant dans un milieu continu. Pour un doublet dirigé perpendiculairement à l'axe d'un canal fin ayant la forme d'un cylindre circulaire, $\mathbf{E} = (2\varepsilon/(\varepsilon + 1))\,\mathbf{E}_0$. Puisque dans la zone d'onde le champ magnétique est proportionnel au champ électrique l'énergie rayonnée dans les cas considérés de la fente et du canal s'accroît respectivement de ε^2 et de $(2\varepsilon/(\varepsilon + 1))^2$ fois *). On peut admettre qu'un doublet à orientation arbitraire se compose de doublets parallèle et perpendiculaire à l'axe du canal (fente); donc, en vertu du principe de superposition, ce problème se ramène aux problèmes précédents. Comme il devient clair de (7.51), pour une perméabilité magnétique $\mu = 1$ d'un dipôle magnétique de moment μ la présence d'un canal étroit fin n'intervient pas sur le rayonnement. Si les dipôles magnétique et électrique existent simultanément, les champs qu'ils émettent (mais, certes, pas les énergies) s'additionnent, c.-à-d. le problème se résout également sans aucune difficulté.

Bien entendu, le moment de courant en mouvement et le moment magnétique « vrai » placés dans une cavité vide doivent produire

*) Pour calculer l'énergie rayonnée à l'aide de la formule (7.45) en présence d'un canal ou d'une fente, il faut remplacer $\mathbf{p}$ par l'expression correspondante déterminée à l'aide de (7.54), c.-à-d., par exemple, pour un doublet perpendiculaire à l'axe d'un canal rond, circulaire, par $(2\varepsilon/(\varepsilon + 1))\,\mathbf{p}$.

le même rayonnement. Cette conclusion a été vérifiée également par un calcul direct [101] pour le rayonnement des doublets différents se déplaçant dans un canal rond; dans le cas particulier d'un canal fin on obtient, comme il se doit, le résultat mentionné, c.-à-d. le champ du doublet électrique devient $2\varepsilon/(\varepsilon + 1)$ fois plus grand.

Le fait que le rayonnement Tchérenkov d'un doublet électrique en mouvement, et aussi d'un doublet magnétique si la perméabilité magnétique $\mu \neq 1$, dépend de la forme d'une cavité aussi étroite que l'on veut, met en question la validité des formules (7.45), (7.46) et (7.47) relatives au mouvement des doublets dans un milieu continu. Le théorème de réciprocité rend clair qu'il s'agit ici de la possibilité de considérer le champ $\mathbf{E}_{eff}$ qui s'exerce sur les doublets comme un champ macroscopique moyen $\mathbf{E}$. Il n'en est pas ainsi en général pour les doublets fixes placés dans le milieu (c.-à-d. $\mathbf{E}_{eff} \neq \mathbf{E}$). Pourtant, pour une particule, chargée ou aux moments dipolaires se déplaçant suivant la trajectoire donnée, le champ moyen est justement un champ macroscopique. On aboutit à la même conclusion sur la justesse des expressions initiales (7.42)-(7.44) du mouvement d'une particule dans un milieu continu si on les obtient en prenant la moyenne des équations de l'électrodynamique microscopique. Ainsi, selon nous, la validité des formules (7.45)-(7.47) du rayonnement Tchérenkov des dipôles ponctuels placés dans un milieu continu n'est pas mise en doute.

Dans ce qui précède nous avons pu voir combien la méthode fondée sur l'utilisation du théorème de réciprocité est efficace pour le calcul du rayonnement Tchérenkov des canaux fins. Cette méthode a été appliquée également à l'étude du rayonnement de transition [69], elle contribue à la résolution de toute une série d'autres problèmes de la théorie de l'effet Tchérenkov et du rayonnement de transition en présence des interfaces, sans parler de l'exploration de nombreux autres problèmes de l'électrodynamique (le résumé des résultats fournis par la résolution des problèmes du rayonnement Tchérenkov en présence des interfaces, cf. dans [65, 67]).

Pour conclure, considérons le rayonnement de transition qui apparaît lorsque les propriétés du milieu changent au droit de la source; pour fixer les idées, disons qu'il s'agit de l'indice de réfraction $n(\omega)$. Une telle formulation étant très générale mais probablement non universellement admise, elle impose une explication.

Lorsqu'une source se déplace dans le vide elle émet des ondes électromagnétiques soit si sa vitesse $v > c$, soit lorsqu'il y a accélération, c.-à-d. formellement lorsque le paramètre v/c change dans le temps. C'est à cette possibilité qu'on a généralement affaire en théorie du rayonnement, puisqu'une particule isolée, si on ne parle pas des tachyons foncièrement hypothétiques, ne peut avoir qu'une vitesse $v < c$ (les sources se déplaçant à $v > c$ seront examinées au chapitre 8). Pour le mouvement dans un milieu, le rôle du para-

mètre v/c revient au paramètre $v/v_{ph} = vn(\omega)/c$ (il s'agit ici d'un milieu transparent ; dans le cas général, les propriétés électromagnétiques se caractérisent par le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$). Maintenant, premièrement, le régime lumineux lorsque $vn/c > 1$ est réalisé sans difficultés particulières et le rayonnement apparaît même si $vn/c =$ $=$ const (effet Tchérenkov). Deuxièmement, comme le rend clair l'analogie avec le problème de vide, le rayonnement apparaît avec des variations dans le temps du paramètre vn/c indépendamment de la valeur de ce dernier. Ceci est possible non seulement en présence de l'accélération, lorsque $dv/dt \neq 0$, mais encore dans le cas où n varie dans l'espace et (ou) dans le temps. En effet, le rayonnement est défini par la variation de n au droit de la particule (la source) ou dans son voisinage, dans la zone de naissance de l'onde. Autrement dit, ce qui importe ici, c'est la valeur de $n(t, \mathbf{r}_l(t))$, où $\mathbf{r}_l(t)$ est le rayon vecteur de la charge (pour simplifier nous ne tenons pas explicitement compte ici de la dispersion et de la fluctuation éventuelle de n non pas sur la trajectoire $\mathbf{r}_l(t)$, mais dans son voisinage). Nous disons transition justement quand il s'agit d'un rayonnement qui apparaît sous l'effet de la dépendance de n par rapport à t et $\mathbf{r}$. Bien sûr, le rayonnement de transition n'est « pur » que si $\mathbf{v} =$ const, $v < c/n$. Mais si $v > c/n$ et (ou) $d\mathbf{v}/dt \neq 0$, il s'accompagne de l'effet Tchérenkov et (ou) d'un rayonnement de freinage. Ensuite, pour éliminer des complications inutiles, admettons que

$$\mathbf{v} = \text{const}, \quad v < \frac{c}{n(\omega)}. \qquad (7.58)$$

La situation la plus simple et la plus réelle de la production d'un rayonnement de transition est celle d'une charge passant par l'interface de deux milieux [69]. Outre les considérations générales que nous venons d'exposer, l'apparition d'un rayonnement dans ces conditions s'explique avec une évidence particulière, on peut même dire immédiate, par l'exemple du passage d'une charge du vide dans un métal. Dans le domaine des basses fréquences (fréquences optiques y compris) le métal peut être considéré avec une bonne approximation comme un réflecteur (conducteur) parfait. Alors, tant que le champ de la charge se déplace dans le vide, il se compose de la somme du champ de la charge ponctuelle e et du champ de son image (de la charge $-e$ qui se trouve dans le métal ; fig. 7.4). En traversant

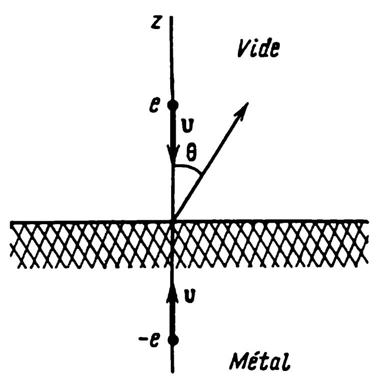


Fig. 7.4. Le rayonnement de transition émis par la charge e traversant l'interface vide-métal correspond à l'« annihilation » de la charge et de son image

l'interface, la charge et son image s'« annihilent » du fait que le champ de la charge, lorsque cette dernière est déjà passée dans le métal, dans l'approximation d'une conductivité parfaite (infinie), subit totalement l'effet d'écran. C'est pourquoi le rayonnement apparu est évidemment le même que celui produit par l'arrêt réel des charges e et $-e$, par exemple, par l'arrêt d'un électron et d'un positon.

Les calculs du champ et de l'énergie du rayonnement de transition sont décrits pour des cas différents dans [28, 69-73] et dans les ouvrages indiqués par la bibliographie des aperçus [28, 70-71]. Quant à nous, nous allons nous borner ici à ce propos à quelques remarques isolées *).

Pour obtenir l'énergie émise lors du passage par l'interface vide-métal (conducteur parfait), le plus simple est d'utiliser les formules du rayonnement de freinage des charges émis lors de leur arrêt brusque (cf. § 69 de [6], où la grandeur dU_s est notée $d\mathscr{E}_{n\omega}$)

$$\frac{d^2U_s}{d\Omega\, d\omega} \equiv W_\omega = \frac{1}{4\pi^2c^3}\left\{\sum_i e_i\left(\frac{[\mathbf{v}_{i2}\mathbf{s}]}{1-\mathbf{s}\mathbf{v}_{i2}/c} - \frac{\mathbf{v}_{i1}\mathbf{s}}{1-\mathbf{s}\mathbf{v}_{i1}/c}\right)\right\}^2, \quad (7.59)$$

où e_i est la charge de l'i-ième particule dont la vitesse varie brusquement de la valeur $\mathbf{v}_{i1}$ à $\mathbf{v}_{i2}$, et $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$ est la direction du vecteur d'onde; la variation brusque de $\mathbf{v}$ traduit le fait qu'elle a lieu en un temps $\tau \ll T = 2\pi/\omega$, où ω est la fréquence considérée.

Dans le cas qui nous intéresse, la charge e qui se déplace à la vitesse $\mathbf{v}$ s'arrête brusquement en même temps que la charge $-e$ qui se déplace à la vitesse $-\mathbf{v}$. Avec une approximation non relativiste on trouve (l'axe du système de référence polaire θ, φ est dirigé suivant $-\mathbf{v}$)

$$\left.\begin{aligned} W_\omega(\theta, \Omega) &= \frac{e^2[\mathbf{v}\mathbf{s}]^2}{\pi^2c^3} = \frac{e^2v^2\sin^2\theta}{\pi^2c^3}, \\ W_\omega &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} W_\omega(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta = \frac{4e^2v^2}{3\pi c^3}. \end{aligned}\right\} \quad (7.60)$$

Ces valeurs sont quatre fois plus grandes que l'énergie émise à travers la demi-sphère des directions par l'arrêt d'une seule charge (dans le cas non relativiste, tout simplement le champ de la charge

*) Parmi les questions que nous n'examinerons pas il y a la renormalisation macroscopique de la masse dans le rayonnement de transition et le mouvement dans les canaux et les fentes [73, 102].

et celui de son image s'ajoutent, c.-à-d. sont doublés). Dans le cas général, quelle que soit la vitesse v:

$$\left.\begin{aligned} W_\omega(\theta, \varphi) &= \frac{e^2v^2}{\pi^2c^3}\frac{\sin^2\theta}{(1-(v^2/c^2)\cos^2\theta)^2}, \\ W_\omega &= \frac{4e^2v^2}{3\pi c^3}\left\{\frac{3(v^2/c^2+1)}{8(v/c)^3}\ln\left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right)-\frac{3}{4v^2/c^2}\right\} = \\ &= \frac{e^2}{\pi c}\left\{\frac{1+v^2/c^2}{2v/c}\ln\left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right)-1\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (7.61)$$

Le rayonnement produit à la sortie de la charge du métal dans le vide est absolument le même (dans ce cas l'axe z est dirigé suivant $\mathbf{v}$). Remarquons à titre de comparaison que pour l'arrêt brusque (instantané) d'une charge dans le vide, on obtient aisément de (7.59) (le calcul détaillé est donné au § 69 de [6])

$$W_\omega = \frac{e^2}{\pi c}\left\{\frac{1}{v/c}\ln\left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right)-2\right\}. \quad (7.62)$$

Pour $v/c \rightarrow 1$ (cas ultra-relativiste) les formules (7.61) et (7.62) coïncident. Ceci s'explique par le fait que le rayonnement est dirigé surtout suivant la vitesse de la charge (c.-à-d. suivant $\mathbf{v}$; pour l'image, suivant $-\mathbf{v}$). Mais le rayonnement de la charge « pénétrant » dans le métal en venant du vide, ou le rayonnement de l'image « pénétrant » dans le métal lors de la sortie de la charge dans le vide ne sont pas observés. Autrement dit, dans le vide le rayonnement est le même que lors d'un arrêt brusque (accélération) d'une seule charge. A propos, en approximation non relativiste, la quantité W_ω définie par (7.62) est deux fois plus petite que d'après (7.60) du fait qu'il n'y a qu'une seule charge qui rayonne (diminution de quatre fois), mais dans l'espace tout entier (augmentation de deux fois).

Dans le cas où la charge passe par l'interface entre le vide et le milieu à permittivité complexe $\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i\varepsilon''$, le calcul est assez lourd et nous ne donnerons ici que le résultat [28, 69-71]

$$W_\omega(\theta, \varphi) = \frac{e^2v^2\sin^2\theta}{\pi^2c^3}F,$$

$$F = \frac{\cos^2\theta}{(1-(v^2/c^2)\cos^2\theta)^2}\left|\frac{(\varepsilon-1)(1-v^2/c^2+(v/c)\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})}{(\varepsilon\cos\theta+\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})(1+(v/c)\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})}\right|^2. \quad (7.63)$$

Pour passer au conducteur parfait on pose $|\varepsilon| \rightarrow \infty$, ce qui conduit précisément à (7.61) avec $F = \frac{1}{(1-(v^2/c^2)^2\cos^2\theta)^2}$. Pour $v/c \rightarrow 1$, pratiquement tout le rayonnement vers l'arrière se con-

centre dans un angle d'ouverture $\theta \sim \sqrt{1 - v^2/c^2} \ll 1$, et donc

$$\left.\begin{aligned} F &= \left|\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}\right|^2 \frac{1}{(1-(v^2/c^2)\cos^2\theta)^2}, \quad \varepsilon=\varepsilon(\omega), \\ W_\omega &= \int W_\omega(\theta, \varphi)\, d\Omega = \frac{e^2}{\pi c}\left|\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}\right|^2 \left\{\ln\frac{2}{1-v/c}-1\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (7.64)$$

Cette formule généralise l'expression (7.61) et pour de grandes valeurs de $|\varepsilon| \gg 1$ elle se ramène évidemment à cette expression. Par ailleurs, (7.64) rend clair que l'énergie du rayonnement diminue à mesure que $\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ s'approche de 1, et c'est pourquoi le rayonnement lui-même se concentre dans le domaine optique. Pour le rayonnement de transition qui apparaît lors du passage du milieu dans le vide, la situation est différente. Dans ces conditions, l'expression générale de $W_\omega(\theta, \varphi)$ est tirée de (7.63) en remplaçant v par $-v$ (de plus, il est plus commode d'entendre maintenant par angle θ l'angle entre **v** et **k**, et non pas entre $-$**v** et **k**). Le facteur $(1 - (v/c) \times \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta})^2$ qui dans ce cas figure au dénominateur conditionne pour $v/c \to 1$ le renforcement du rôle des hautes fréquences, lorsque la permittivité est voisine de l'unité, étant donné que dans le domaine des rayons X

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}, \quad (7.65)$$

où N est la concentration totale d'électrons, ou, pour des fréquences plus basses, leur concentration sur une partie des couches atomiques. Dans les conditions d'un rayonnement X de transition vers l'avant (cf. (7.63) pour $v/c \to 1$ en remplaçant v par $-v$, et (7.65)) on tire [71]

$$\left.\begin{aligned} W_\omega(\theta, \varphi) &= \frac{e^2\theta^2}{\pi^2 c}\left\{\frac{1}{1-v^2/c^2+\theta^2} - \frac{1}{1-v^2/c^2+\omega_p^2/\omega^2+\theta^2}\right\}, \\ W_\omega &= \frac{2e^2}{\pi c}\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega^2(1-v^2/c^2)}{\omega_p^2}\right)\ln\left(1+\frac{\omega_p^2}{(1-v^2/c^2)\,\omega^2}\right)-1\right\} \end{aligned}\right\} \quad (7.66)$$

ou approximativement

$$\left.\begin{aligned} W_\omega &= \frac{2e^2}{\pi c}\ln\frac{\omega_c}{\omega}, \quad \omega \ll \omega_c, \\ W_\omega &= \frac{e^2}{6\pi c}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^4, \quad \omega \gg \omega_c, \\ \omega_c &= \frac{\omega_p}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \omega_p \frac{\mathscr{E}}{Mc^2}, \end{aligned}\right| \quad (7.67)$$

$$U = \int W_\omega\, d\omega = \frac{e^2\omega_p}{3c}\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}. \quad (7.68)$$

Ainsi, le rayonnement de transition vers l'avant des particules ultra-relativistes appartient surtout au domaine des rayons X (pour les milieux denses $\omega_p \sim 10^{15}$-10^{16}) et la fréquence caractéristique $\omega_c \sim (10^{15} \div 10^{16})\, \mathscr{E}/Mc^2$; en outre, l'énergie totale rayonnée U croît linéairement avec $\mathscr{E}/Mc^2$. Comme il est clair de (7.67) et (7.68), dans le cas que nous venons d'examiner, ce sont les photons d'énergie $\hbar\omega \sim \hbar\omega_c = \hbar\omega_p\, (\mathscr{E}/Mc^2)$ qui sont surtout émis, leur nombre moyen lors du passage de l'interface milieu-vide étant $U/\hbar\omega \sim e^2/\hbar c \approx 1/137$. C'est pourquoi l'utilisation du rayonnement de transition pour la détection des particules de haute énergie n'est réelle que si les interfaces sont nombreuses, comme par exemple dans le cas d'un ensemble de plaques (cf. [28, 70, 71, 103, 104]).

Pour des plaques et en général pour un milieu non homogène, la relation entre l'épaisseur de la plaque (ou d'une autre longueur caractéristique de la non-homogénéité du milieu) et la zone de la production du rayonnement, joue un rôle essentiel. Pour les sources au repos ou se déplaçant à la vitesse $v \ll c/n$, le rayonnement est produit dans le domaine délimité par les dimensions $l \sim c/n\omega = \lambda/2\pi$: c'est précisément à cette distance que la phase des ondes $\varphi = kl = (2\pi/\lambda)\, l$ change d'une valeur de l'ordre de l'unité. Nous avons vu également (cf. plus haut) que dans le cas du rayonnement Tchérenkov produit par une charge se déplaçant dans un canal ou une fente de dimension caractéristique a, avec $a/\lambda \ll 1$, le rayonnement apparu est le même que dans un milieu continu, c.-à-d. il est produit dans le domaine de dimensions d'ordre λ. Mais pour les sources animées d'un mouvement rapide, en général, la zone de production n'est nullement égale à la longueur $\lambda/2\pi$ (quant au rayonnement Tchérenkov, sa zone de production l est de l'ordre de $\lambda/2\pi$ seulement dans la direction perpendiculaire à la vitesse, ce qui importe précisément dans le cas des fentes et des canaux). Pour trouver la zone de formation l pour le cas d'une source qui se déplace à la vitesse $\mathbf{v}$ et qui émet les ondes sous un angle θ par rapport à $\mathbf{v}$, considérons la figure 7.5. Supposons qu'à l'instant $t = 0$, la source se trouve en A et la phase de l'onde émise dans la direction $\mathbf{k}$ est égale à φ_A. Définissons la zone de production l comme une distance le long de la trajectoire de la source (distance entre les points A et B) telle que la phase des ondes φ_B rayonnées en B dans la même direction $\mathbf{k}$ se distingue de π de la phase φ_A des ondes rayonnées en A. Alors,

$$|\varphi_A - \varphi_B| = |kl\cos\theta - \omega t| = \left|\frac{\omega n}{c}\, l\cos\theta - \omega\,\frac{l}{v}\right| = \pi,$$

d'où

$$l = \frac{\pi v}{\omega\,|1-(v/c)\,n(\omega)\cos\theta|} = \frac{(vn/c)\,\lambda}{2\,|1-(v/c)\,n(\omega)\cos\theta|}, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{n\omega}. \qquad (7.69)$$

Bien entendu, pour l'angle Tchérenkov $\theta_0 = \arccos (c/nv)$ les ondes émises le long de la trajectoire sont en phase, et c'est pourquoi l'énergie rayonnée est proportionnelle à la longueur de la trajectoire L (formellement elle est infinie pour $L \to \infty$ comme on le suppose en négligeant le rayonnement au début et à la fin du parcours). Appliquée au rayonnement de transition, la zone de production remplit le rôle de la dimension des domaines dans le vide et dans le

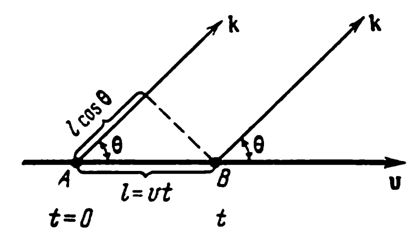


Fig. 7.5. Figure illustrant la détermination de la zone de formation l

milieu respectivement, qui sont responsables du rayonnement (pour plus de détails et de précision, cf. [28, 71]). Ainsi, en particulier, si une particule ultra-relativiste sort du milieu pour pénétrer dans le vide et le rayonnement se propage vers l'avant, ce qui est important à de hautes fréquences (cf. plus haut), la zone de production dans le vide (pour $\theta = 0$) est égale à

$$l = \frac{\lambda}{2(1 - v/c)} = \lambda \left(\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}\right)^2 \sim \lambda_p \frac{\mathscr{E}}{Mc^2}, \tag{7.70}$$

où pour passer à la dernière expression, on adopte comme longueur d'onde λ la longueur d'onde $\lambda_c = 2\pi c/\omega_c = \lambda_p (Mc^2/\mathscr{E})$, $\lambda_p = 2\pi c/{}_p\omega$ (cf. (7.67)). Pour $\lambda_p \sim 10^{-5}$ cm et $\mathscr{E}/Mc^2 \sim 10^4$ (par exemple, pour les électrons de 5 GeV), on a déjà $l \sim 0{,}1$ cm. Sous ce rapport, l'utilisation du rayonnement de transition obtenu dans un milieu multiplaque n'est efficace que dans certaines limites : l'intensité du rayonnement produit par le passage à travers les interfaces s'additionne (si on ne tient pas compte des oscillations dues à l'interférence) seulement si la distance entre les interfaces est plus grande que la zone de production. S'il s'agit d'une seule plaque, le « travail » de ses deux surfaces de séparation n'est efficace également que tant que l'épaisseur de la plaque $d \succ l$. Mais si la plaque est mince ($d \ll l$), le rayonnement de transition qu'elle fournit est sensiblement plus faible que celui produit par une seule surface de séparation. A la limite, comme le montrent déjà les considérations générales, dans une plaque aussi mince que l'on veut ($d \to 0$), le rayon-

nement de transition n'apparaît pas *). La généralisation des formules de la théorie du rayonnement de transition relatives à une seule surface de séparation au cas de plaques minces, petites billes, etc.. peut entraîner certes des erreurs grossières (ce qui a été précisément le cas de certaines tentatives de calculer le rayonnement X de transition produit dans l'espace interstellaire par le passage des électrons rapides à travers les grains de poussière cosmique; pour l'étude correcte de cette question, cf. [105]).

Outre le rayonnement de transition produit par le passage à travers les surfaces de séparation isolées ou par un paquet de plaques, il est intéressant d'examiner le rayonnement de transition dans un milieu statistiquement inhomogène, lors du passage d'une charge au voisinage de divers corps (cf. [28, 70, 72]). Signalons spécialement le cas des milieux non stationnaires, lorsque les propriétés du milieu changent non seulement dans l'espace, mais encore dans le temps. En particulier, le rayonnement de transition apparaît également dans un milieu spatialement homogène, si seulement les propriétés de ce milieu, son indice de réfraction n par exemple, changent dans le temps. C'est ce problème de n variant brusquement de la valeur n_1 ($t < 0$) à la valeur n_2 ($t > 0$) [73] que nous allons examiner dans ce qui suit.

Ainsi, supposons que les propriétés d'une charge se déplaçant à la vitesse $v = \text{const}$, $v < c/n_{1,2}$, dans un milieu homogène subissent un saut à l'instant $t = 0$. Une telle variation de n peut s'obtenir en augmentant brusquement la pression et donc, la densité du milieu, en modifiant l'intensité du champ extérieur où se trouve le milieu (il s'agit, par exemple, du milieu d'un condensateur), etc. Par variation brusque des propriétés du milieu on entend ici leur modification en un temps $\tau \ll 2\pi/\omega$, où ω est la fréquence du rayonnement qui nous intéresse.

Reconsidérons les équations initiales du champ dans un milieu (6.1). Dans le cas d'une discontinuité (variation brusque) des propriétés d'un milieu, il n'y a que les dérivées par rapport au temps qui peuvent être grandes. Intégrons donc la première et la troisième des équations de (6.1) par rapport à t dans l'intervalle Δt qui inclut la discontinuité. On obtient alors pour $\Delta t \to 0$ les conditions aux limites

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2, \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2, \quad t = 0, \tag{7.71}$$

où les indices 1 et 2 se rapportent au milieu précédant ($t < 0$) et succédant ($t > 0$) à la discontinuité. Pour résoudre le problème

*) Nous avons ici en vue une plaque de n'importe quel matériau réel, et non pas un conducteur parfait pour lequel avec $d \to 0$ sa notion n'a aucun sens physique.

appliquons le formalisme hamiltonien et, par commodité, reprenons certaines formules:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{E}_{tr} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \\ &\mathbf{A} = \sum_\lambda (q_\lambda \mathbf{A}_\lambda + q_\lambda^* \mathbf{A}_\lambda^*), \quad \mathbf{A}_\lambda = \sqrt{4\pi}\, \frac{c}{n} \mathbf{e}_\lambda \exp(i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}), \\ &e_\lambda^2 = 1, \quad \mathbf{e}_\lambda \mathbf{k}_\lambda = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.72}$$

Dans ce qui suit nous ne nous intéresserons pas à la partie longitudinale du champ $\mathbf{E}_l = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{tr}$ et comme nous pourrions le voir, son estimation ne change pas les expressions que nous allons employer. Pour une charge se déplaçant uniformément, $\mathbf{j} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, $\mathbf{v} = \text{const}$, et on tire de (6.1) et (7.72) (on admet que $n = \sqrt{\varepsilon} = \text{const}$; comme nous l'avons dit au chapitre 6, l'estimation de la dispersion ne changerait pas le résultat) de la façon usuelle

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda = \frac{e}{c}(\mathbf{v}\mathbf{A}_\lambda^*(\mathbf{v}t)) = \frac{\sqrt{4\pi}\, e}{n}(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}) \exp(-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{v}t), \\ &\omega_\lambda^2 = \left(\frac{c^2}{n^2}\right) k_\lambda^2. \end{aligned}\right\} \tag{7.73}$$

L'orthogonalité des fonctions $\exp(i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})$ et $\exp(-i\mathbf{k}_\mu \mathbf{r})$ pour $\mu \neq \lambda$ et l'orthogonalité de la fonction $\mathbf{e}_\lambda \exp(\pm i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})$ et du champ longitudinal $\mathbf{E}_l$ (ces propriétés ont été déjà appliquées, certes, pour obtenir les équations (7.73)) font que les conditions aux limites par rapport au temps (7.71) se mettent sous la forme

$$n_1 \dot{q}_{\lambda,1} = n_2 \dot{q}_{\lambda,2}, \quad \frac{1}{n_1} q_{\lambda,1} = \frac{1}{n_2} q_{\lambda,2}, \quad t = 0. \tag{7.74}$$

Adoptons que pour $t < 0$ il n'y avait pas de champ radiant, c.-à-d. que la charge était seulement plongée dans son champ entraîné par elle (nous avons déjà dit que pour simplifier nous admettons que $v < c/n_{1,2}$, c.-à-d. que le rayonnement Tchérenkov n'apparaît ni avant ni après la variation de l'indice n). Alors, pour $t < 0$, il ne faut prendre que la solution imposée des équations (7.73), c.-à-d.

$$q_{\lambda,1} = \frac{\sqrt{4\pi}\, e(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}) \exp(-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{v}t)}{n_1\{k_\lambda^2 c^2/n_1^2 - (\mathbf{k}_\lambda \mathbf{v})^2\}}, \quad t < 0. \tag{7.75}$$

Avec $t > 0$, on a aussi bien le champ entraîné que le champ radiant (résolution des équations homogènes (7.73))

$$q_{\lambda,2} = \frac{\sqrt{4\pi}\, e(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}) \exp(-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{v}t)}{n_2\{k_\lambda^2 c^2/n_2^2 - (\mathbf{k}_\lambda \mathbf{v})^2\}} + C_+ \exp\left(ik_\lambda \frac{c}{n_2} t\right) + C_- \exp\left(-ik_\lambda \frac{c}{n_2} t\right). \tag{7.76}$$

A l'aide des conditions (7.74) on en tire pour $t = 0$

$$C_{\pm} = \frac{\sqrt{4\pi}\, e\, (\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v})}{2c^2 k_\lambda^2} \left\{ n_2 \left[\frac{1}{1-(\mathbf{s}_\lambda \mathbf{v})^2 n_1^2/c^2} - \frac{1}{1-(\mathbf{s}_\lambda \mathbf{v})^2 n_2^2/c^2} \right] \mp \right.$$

$$\left. \mp \frac{(\mathbf{s}_\lambda \mathbf{v})}{c} \left[\frac{n_1^2}{1-(\mathbf{s}_\lambda \mathbf{v})^2 n_1^2/c^2} - \frac{n_2^2}{1-(\mathbf{s}_\lambda \mathbf{v})^2 n_2^2/c^2} \right] \right\}, \quad (7.77)$$

où $\mathbf{s}_\lambda = \mathbf{k}_\lambda / k_\lambda$; par la suite nous poserons $(\mathbf{s}_\lambda \mathbf{v})^2 = v^2 \cos^2 \theta$ et $(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v})^2 = v^2 \sin^2 \theta$, puisque la deuxième direction du vecteur de polarisation $\mathbf{e}_\lambda$ peut être choisie orthogonale à la vitesse $\mathbf{v}$. L'énergie du champ transversal s'écrit

$$\mathcal{H}_{tr} = \int \frac{\varepsilon E_{tr}^2 + H^2}{8\pi}\, dV = \sum_\lambda (p_\lambda p_\lambda^* + \omega_\lambda^2 q_\lambda q_\lambda^*). \quad (7.78)$$

Nous nous intéressons à l'énergie totale du champ du rayonnement apparu sous l'effet de la variation de n. Cela signifie qu'il faut porter dans (7.78) la solution

$$q'_{\lambda,2} = C_+ \exp\left(ik_\lambda \frac{c}{n^2}\, t\right) + C_- \exp\left(-ik_\lambda \frac{c}{n_2}\, t\right),$$

de plus, il convient de se borner à la fraction de $\mathcal{H}_{tr}$ indépendante de t. On voit aisément que cette fraction vaut ($d\Omega = \sin \theta\, d\theta\, d\varphi$)

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H}_{tr} &= 2 \sum_\lambda \omega_\lambda^2 (C_+^2 + C_-^2) = \int W_\omega(\theta, \varphi)\, d\omega\, d\Omega, \\ W_\omega(\theta, \varphi) &= \frac{(C_+^2 + C_-^2)\, \omega^2 k^2}{(2\pi)^3} \frac{dk}{d\omega}, \quad \omega^2 = \frac{c^2}{n_2^2} k^2; \end{aligned}\right\} \quad (7.79)$$

on a tenu compte ici que dans (7.72) et (7.78) la sommation se fait suivant la demi-sphère des directions $\mathbf{k}_\lambda$, et dans (7.79) on envisage toutes les directions *). On trouve finalement

$$W_\omega(\theta, \varphi) = \frac{e^2 v^2 \sin^2 \theta}{\pi^2 c^3} F, \quad (7.80)$$

$$F = \frac{1}{4n_2} \left\{ n_2^2 \left[\frac{1}{1-(v^2/c^2)\, n_1^2 \cos^2 \theta} - \frac{1}{1-(v^2/c^2)\, n_2^2 \cos^2 \theta} \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{v^2 \cos^2 \theta}{c^2} \left[\frac{n_1^2}{1-(v^2/c^2)\, n_1^2 \cos^2 \theta} - \frac{n_2^2}{1-(v^2/c^2)\, n_2^2 \cos^2 \theta} \right]^2 \right\}. \quad (7.81)$$

Si

$$\frac{v^2 n_{1,2}^2}{c^2} \cos^2 \theta \ll 1, \quad (7.82)$$

---

*) Dans cette méthode de calcul les ondes émises sous des angles θ et $\pi - \theta$ ne se distinguent pas. C'est pourquoi l'expression (7.81) donne la demi-somme des intensités pour les angles θ et $\pi - \theta$. Pour le cas non relativiste cela a peu d'importance ; dans le cas relativiste, les formules de l'intensité du rayonnement pour tous θ sont données dans [73b].

on a

$$F \approx \frac{(n_1^2 - n_2^2)^2 v^2 \cos^2\theta}{4n_2c^2}. \quad (7.83)$$

Les formules (7.80), (7.83) peuvent, certes, s'obtenir immédiatement par des simplifications correspondantes, relatives à la condition (7.82) des expressions (7.75) et (7.76).

A titre de comparaison, rappelons que lorsqu'un électron non relativiste traverse l'interface vide-milieu à indice de réfraction n_2, comme on le voit de (7.63), on obtient pour l'énergie du rayonnement de transition dans le vide l'expression (7.80) avec

$$F = \left(\frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 \cos\theta + \sqrt{n_2^2 - \sin^2\theta}}\right)^2 \cos^2\theta;$$

mais si le milieu 2 est un conducteur parfait, alors $F = 1$ (ceci peut s'obtenir également de ce qui précède avec $n_2^2 \to \infty$). Ainsi, le rayonnement de transition de type donné dans un milieu non stationnaire et le rayonnement de transition qui apparaît lors du passage par l'interface de deux milieux, sont en effet des phénomènes apparentés. En outre, notons que comme il se doit, avec $n_1 = n_2$ le facteur $F = 0$ (cf. (7.81) et (7.83)). Pour la différence donnée $(n_1^2 - n_2^2)^2$, la quantité W_ω peut être augmentée en diminuant les dénominateurs $(1 - (v^2 n_{1,2}^2/c^2) \cos^2\theta)$ de (7.81). Il se peut que cette circonstance puisse être mise à profit si on cherche à utiliser le rayonnement de transition discuté comme détecteur des variations dans le temps de l'indice de réfraction n. Bien entendu, ces variations pourraient être également décelées, par exemple, d'après le déphasage des ondes électromagnétiques qui passent par le milieu. Cependant, la radioscopie de ce genre n'est pas toujours possible surtout dans les conditions astronomiques. Aussi ne faut-il pas perdre de vue la possibilité d'utiliser les particules rapides comme une « sonde » bien que cette possibilité ne soit pas très prometteuse. Dans des conditions réelles, les caractéristiques d'un rayonnement seront probablement définies par l'ensemble de plusieurs processus et circonstances, notamment par la non-homogénéité du milieu, la variation de ses propriétés dans le temps, le rayonnement de freinage, etc. Seule l'analyse concrète pourra dans chaque cas particulier rendre évident quel est le mécanisme prédominant du rayonnement.

Tout mécanisme de rayonnement est lié au mécanisme d'absorption d'ondes correspondant (en langage classique ce fait résulte de l'invariance des équations par rapport au changement du signe du temps; en langage quantique, la liaison entre les processus direct et inverse est rendue claire pour ce cas par l'égalité des modules des éléments matriciels des transitions). Le rayonnement de transition (ou plus exactement, les transitions correspondantes dans le système charges — champ radiant) peut apparaître également dans les pro-

cessus plus compliqués : rayonnement induit ou diffusion de combinaison spontanée ou forcée (induite), etc. Enfin, le rayonnement de transition, aussi bien que tout autre rayonnement, fait varier l'énergie de la particule émettrice. Il est vrai que pour résoudre le problème du rayonnement de transition (ainsi que celui de l'effet Tchérenkov) on peut admettre que la vitesse de la source est donnée et constante. Une telle position du problème est d'autant plus légitime que les pertes d'énergie correspondantes peuvent être compensées par le travail des sources extérieures (forces). Mais en l'absence d'une telle compensation, la particule, certes, perd par rayonnement une partie de son énergie (mais parfois il arrive qu'elle en acquiert, en particulier, dans le cas des milieux à absorption négative, ou comme on dit, dans celui du diélectrique inverti [60, 88]). Notons, par ailleurs, que lorsque la charge se déplace dans un milieu non homogène on ne peut nullement égaler en général le travail d'une force de radiation à l'énergie rayonnée. C'est que la variation des propriétés du milieu donne lieu non seulement au rayonnement, mais encore fait changer l'énergie du champ entraîné par la particule [73, 102]. C'est pourquoi, la vitesse étant donnée, le travail d'une force de réaction effectué sur la particule est égal à la somme de l'énergie rayonnée et de la variation de l'énergie du champ entraîné par la particule prise avec le signe opposé (autrement dit, l'énergie, dépensée par les forces extérieures pour rendre uniforme le mouvement de la particule dans un milieu inhomogène, est égale à la somme de l'énergie rayonnée et de l'énergie associée à la variation du champ entraîné).

Le rayonnement de transition est un effet assez élémentaire et universel qui a déjà fait l'objet des centaines d'articles. Fait curieux sous ce rapport, que 13 ans ont passé entre la date où la théorie du rayonnement de transition [69] a été rendue publique et sa première étude expérimentale [106]. Ceci est dû, probablement, non tant aux difficultés de la mise en expérience particulières, mais plutôt aux « caprices de la mode », assez fréquents en physique aussi.

CHAPITRE 8

SUR LES SOURCES DE RAYONNEMENT SUPERLUMINEUSES

Vitesses superlumineuses apparentes et réelles des sources de rayonnement. Effet Vavilov-Tchérenkov et effet Doppler dans le mouvement des sources animées d'une vitesse supérieure à celle de la lumière dans le vide

La vitesse de la lumière dans le vide $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s est la vitesse limite, la plus grande dans la nature. C'est ainsi que pourrait être formulée « en approximation nulle » la conclusion tirée de la théorie de la relativité et confirmée par l'expérience. Or, on sait depuis bien longtemps que déjà en « première approximation » cette affirmation est incorrecte, ou en tous cas impose une mise au point. L'exemple le plus simple est celui de la vitesse de phase de la lumière $v_{\text{ph}} = c/n$, qui peut être aussi grande que l'on veut pour $n \to 0$ (les milieux à $n < 1$ sont, assurément, bien réels : il suffit de songer au plasma où, dans des conditions définies, $n = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}$, $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m$). Sous ce rapport et en vertu de certains autres exemples, on précise que c'est la vitesse des signaux, des perturbations, des particules, des sources de rayonnement, etc., qui doit être inférieure à celle de la lumière, non pas, disons, la vitesse du « déplacement » de la phase constante (c.-à-d. la vitesse de phase). Mais ces affirmations demandent elles aussi une mise au point et lorsqu'elles sont mal comprises, elles conduisent à des paradoxes et des contradictions. On considère, par exemple, que dans les cas courants, la vitesse d'un signal est égale à la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{d(n\omega)/d\omega}$$

(rien que pour simplifier, nous nous bornons ici au cas d'un milieu isotrope, où $k = (\omega/c)\, n(\omega)$ et la vitesse $\mathbf{v}_g$ est dirigée suivant $\mathbf{k}$). Mais cette vitesse v_g peut parfaitement s'avérer supérieure à c, par exemple, dans le domaine d'une dispersion anomale, où $dn/d\omega < 0$. Cette contradiction apparente est résolue depuis des décennies [107] par l'étude de la propagation d'un signal dans un milieu dispersif. C'est que la notion de la vitesse de groupe $v_g = d\omega/dk$ n'a en général un sens précis que si on néglige l'étalement du signal et son absorption (pour plus de détails, cf. [57, 64, 98]). C'est pourquoi,

en particulier dans le domaine de la dispersion anomale bien marquée, où l'absorption se manifeste toujours, la vitesse de la partie principale du signal est différente de $d\omega/dk$. Ensuite, comme on peut le montrer, la vitesse du front du signal est égale exactement à c. Si on ne parle pas du calcul du champ suivant le front (domaine du « précurseur »), la conclusion sur la vitesse du front est évidente sans aucun calcul. En effet, le développement du champ du signal (du train d'ondes) en une intégrale de Fourier contient toujours également de très hautes fréquences. Mais pour $\omega \to \infty$ (et pratiquement déjà dans le domaine des rayons X) l'indice de réfraction $n \to 1$, du fait que les particules du milieu n'ont pas le temps de réagir au champ de l'onde. De telles hautes fréquences contiennent justement le « précurseur » du signal qui se déplace à la vitesse c. Autre chose est que pour des signaux à fréquence porteuse ω_0 relativement basse l'énergie du « précurseur » est négligeable. Lorsqu'on néglige l'absorption, dans les cas courants, la partie principale ou le « corps » du signal se déplace justement à la vitesse de groupe $v_g = d\omega/dk$, mais si $d\omega/dk > c$ (bien que non seulement dans ces cas), le signal se déforme fortement, la notion de la vitesse de groupe devient inapplicable et, en tous cas, l'énergie n'est pas transmise à une vitesse supérieure à c. Comme nous l'avons souligné spécialement, ce qui vient d'être dit était bien connu et depuis longtemps. Mais fait curieux, l'affirmation sur l'impossibilité de dépasser c, la vitesse de la lumière dans le vide, produit de nos jours encore son effet d'hypnotisation. Un exemple en est fourni par l'opinion largement admise sur l'impossibilité d'observer l'effet Tchérenkov et l'effet Doppler anomal dans le vide et dans les milieux à $n < 1$ (en particulier, pour les ondes transversales dans un plasma isotrope). Un autre exemple peut être tiré de la discussion en cours sur la distance des quasars. Il n'est pas aisé, en effet, de la définir, du fait que la seule méthode directe relative à ce cas impose la mesure du redshift des raies spectrales. En admettant que ce décalage est cosmologique (lié à l'expansion de l'Univers) nous obtenons la distance recherchée; mais les adversaires de cette interprétation s'appuyent sur l'absence des preuves de la nature cosmologique du redshift des quasars. Selon nous il est difficile de mettre en doute sa nature cosmologique mais ce n'est pas de cela qu'il s'agit. Ce qui présente de l'intérêt, c'est que comme argument contre l'utilisation de la distance cosmologique des quasars (radiosources) on a avancé les données sur la variation de leur structure à la vitesse $u > c$. En schématisant, imaginons une source de rayonnement (de rayonnement radio, par exemple) dont la dimension angulaire croît dans le temps avec une vitesse angulaire $\Omega = d\varphi/dt$. C'est justement l'angle φ, sous lequel on voit la source de la Terre, et la vitesse angulaire Ω qui sont les quantités observables. Si la distance à la source est R, la vitesse du déplacement des frontières de la source sur la sphère

céleste est $u_{\perp} = \Omega R$. Il s'avère que si on utilise la distance cosmologique R, cette vitesse perpendiculaire au rayon visuel serait supérieure à la vitesse c (des observations supplémentaires sont nécessaires). En partant de l'hypothèse suivant laquelle obligatoirement $u < c$, on était amené à conclure que les quasars sont relativement proches (dans ce cas le redshift de leurs spectres pourrait être dû à l'effet gravifique ou à la grande vitesse du quasar par rapport aux galaxies voisines).

Or, en fait, la vitesse « apparente » observée $u_{\perp} = \Omega R$ peut être aussi grande que l'on veut et dans ce qui suit on ne peut en déduire aucune limite sur R. En effet, en nous appuyant totalement sur la théorie de la relativité et en rejetant toutes les hypothèses éventuelles (et, probablement, inadmissibles) du mouvement des objets à la vitesse $v > c$ (tachyons, etc.) nous n'avons quand même aucune raison d'identifier la vitesse de l'objet v à la vitesse mentionnée $u_{\perp}$. Examinons, par exemple, un écran qui peut être constitué par l'enveloppe d'une supernova, d'un quasar, etc., éclairé par une source et rendu visible (observable) par un rayonnement diffus ou une luminescence. Il est parfaitement clair que l'écran peut « s'allumer » en tous ses points simultanément et dans ce cas la vitesse $u \to \infty$. En éclairant l'écran d'une façon donnée on peut obtenir également tout autre valeur de la « vitesse » d'expansion du secteur lumineux de l'écran. Un exemple moins trivial de l'obtention de vitesses superlumineuses « apparentes » u peut être donné par la vitesse observée de l'expansion d'une certaine enveloppe (cf. [31b, 108, 109]).

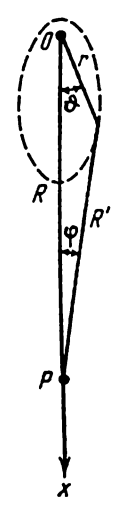


Fig. 8.1. Figure illustrant le calcul de la vitesse « apparente » (observée) d'une enveloppe en expansion

Ainsi, supposons que la surface d'une enveloppe sphérique (par exemple, des produits d'une explosion) qui se déplace à la vitesse v soit observée de l'extérieur. Supposons que l'explosion ait eu lieu au point O (fig. 8.1) à l'instant t_0', alors que le signal soit enregistré au point d'observation P à l'instant $t = 0$. Il est évident que $t_0' = -R/c$, où R est la distance entre les points O et P, alors que l'influence du milieu sur la propagation du signal (lumière, ondes radio) peut être négligée. Cherchons maintenant le lieu géométrique des points (enveloppe « visible ») à partir desquels le rayonnement atteint l'observateur à un certain instant $t > 0$. Les points de cette enveloppe « visible » sont caractérisés par leur distance r jusqu'au point O et par l'angle ϑ entre r et la ligne OP (cf. fig. 8.1). Le temps de l'émission t' qui correspond au point (r, ϑ) et le temps d'observa-

tion t sont associés par la relation

$$t' = t - \frac{R'}{c} \approx t - \frac{R}{c} + \frac{r}{c} \cos\vartheta,$$

où $R' \approx R - r\cos\vartheta$, puisqu'on suppose que $R \gg r$. D'autre part $t' - t'_0 = t' + R/c = r/v$, étant donné que l'enveloppe parcourt la distance r à la vitesse v. En éliminant t' on obtient des deux expressions

$$r = \frac{vt}{1 - (v/c)\cos\vartheta}. \tag{8.1}$$

Le facteur $(1 - (v/c)\cos\vartheta)^{-1}$ est le même que dans la formule de l'effet Doppler : son origine l'est aussi, ce qui découle de la grandeur finie de la vitesse de propagation de la lumière. De ce fait, dans le cas considéré, à l'instant d'observation t, la lumière (les ondes radio) parviennent au point d'observation à partir des points de l'enveloppe auxquels correspondent des temps différents $t' - t'_0$ écoulés depuis l'instant d'explosion $t'_0 = -R/c$. La situation est ici analogue à celle de l'observation (prise de vues) d'un objet animé d'un mouvement rapide, quand il faut aussi distinguer la forme de l'objet à l'instant de son observation (l'arrivée des rayons) au lieu donné et la forme de l'objet à l'instant du rayonnement qui correspond, disons, aux événements simultanés dans le système de référence considéré (du laboratoire) (cf., par exemple, [110, 111]). En reprenant l'examen de l'enveloppe en expansion, cherchons la vitesse « apparente » (visible) de son expansion dans la direction perpendiculaire au rayon visuel. Il est évident que (cf. (8.1))

$$u_\perp = \frac{dr}{dt}\sin\vartheta = \frac{v\sin\vartheta}{(1-(v/c)\cos\vartheta}, \quad \Omega = \frac{d\varphi}{dR} = \frac{u_\perp}{R}. \tag{8.2}$$

La vitesse $u_\perp$ est maximale avec $du_\perp/d\vartheta = 0$ pour un certain angle $\vartheta_{max} = \arccos(v/c)$; de plus

$$u_{\perp,\,max} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \Omega_{max} = \frac{v}{R\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{8.3}$$

La vitesse elle-même

$$u = \frac{dr}{dt} = \frac{v}{1-(v/c)\cos\vartheta}$$

est maximale pour $\vartheta = 0$ et sa valeur $u_{max} = v/(1 - v/c)$. Il est clair que la vitesse apparente $u_{\perp,\,max}$ peut être plus grande que c, bien que la vitesse de l'enveloppe $v < c$. Il est vrai que cela n'a lieu que si la vitesse v est suffisamment grande, c.-à-d. si l'effet est relativiste.

Se peut-il que non seulement la vitesse apparente, mais encore la vitesse réelle d'une source soit supérieure à la vitesse de la lumière c?

A cette question également il faut répondre par l'affirmative (dans ce qui suit nous nous inspirons de l'article [112]). A titre de démonstration il suffit, en somme, de donner en exemple la tache produite par une source rotative qui balaye un écran éloigné. La vitesse du balayage est

$$v = \Omega R, \qquad (8.4)$$

où Ω est la vitesse angulaire de la source (du « phare ») et R, la distance de la source à l'écran. Le modèle de phare est actuellement universellement admis pour les pulsars (cf., par exemple, [16, 53]) ; dans ce cas, pour tous les pulsars connus, la vitesse de la tache sur la Terre est supérieure à celle de la lumière c. Pour le pulsar le mieux connu (NP 0532 de la Nébuleuse du Crabe) $\Omega \approx 200$ s^{-1} et $R \approx$ $\approx 6 \cdot 10^{21}$ cm (1500 pc), d'où $v = \Omega R \approx 1{,}2 \cdot 10^{24}$ cm/s (!). Si le rayon d'un laser ou un faisceau électronique tourne à la vitesse angulaire $\Omega = 10^5$ s^{-1}, alors $v = \Omega R > c$ pour les distances $R > 3$ km.

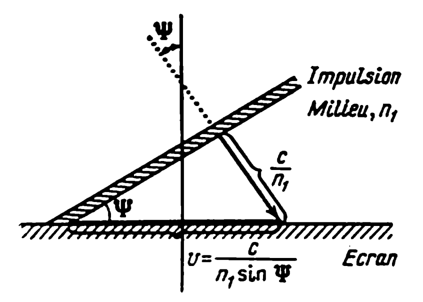


Fig. 8.2. Une impulsion frappant un écran plan

Dans un certain sens le modèle le plus simple ou l'exemple d'un mouvement à vitesse superlumineuse peut être fourni par une impulsion lumineuse d'ondes planes frappant sous une incidence oblique une certaine interface plane (écran) [76]. Si l'angle d'incidence de l'onde sur l'écran est noté Ψ (il est évident que Ψ est l'angle entre le vecteur d'onde de l'impulsion **k** et la normale à l'écran ; fig. 8.2), la section de l'impulsion par l'écran (c.-à-d. la tache lumineuse sur l'écran) se déplace sur ce dernier à la vitesse

$$v = \frac{c}{n_1 \sin \Psi}, \qquad (8.5)$$

où $n_1 > 1$ est l'indice de réfraction du milieu au-dessus de l'écran, milieu considéré pour simplifier comme non dispersif (au fond, ce qui importe pour nous, c'est seulement que nous adoptons que la vitesse de l'impulsion lumineuse est égale à c/n_1). Il est évident qu'avec la diminution de l'angle d'incidence Ψ la vitesse de la tache (ou plus précisément, de la bandelette) peut être rendue plus grande que c, et dans le vide elle est en général supérieure à c pour tous les angles Ψ car dans ce cas

$$v = \frac{c}{\sin \Psi}. \qquad (8.6)$$

Le rôle d'impulsion lumineuse peut, certes, être rempli par le flux d'électrons qui se déplacent normalement au front du flux à la vitesse $u < c$; alors,

$$v = \frac{u}{\sin \Psi} \tag{8.7}$$

et en principe il est toujours possible de réaliser la vitesse superlumineuse de la tache. Qui plus est, dans tous les cas (8.5)-(8.7) la vitesse v peut être rendue aussi grande que l'on veut : à l'approche de l'incidence normale (avec $\Psi \to 0$) la vitesse $v \to \infty$. D'ailleurs, on le comprend sans peine, puisque si l'incidence est normale, l'impulsion frappe simultanément toute la surface de l'écran. L'impulsion frappant l'écran possède un analogue mécanique que sont les ciseaux (le rôle de la tache revient à l'intersection des génératrices des deux lames).

Pour la source rotative mentionnée plus haut, de même que pour l'impulsion qui frappe l'écran, la grande vitesse de la tache s'obtient en diminuant l'angle entre la surface de la phase constante (front d'onde) et l'écran. En effet, examinons pour simplifier une source cylindrique dans le vide, qui tourne à la vitesse angulaire Ω et écrivons le champ de la zone d'onde sous la forme *)

$$E = \sum_{s=1}^{\infty} E_s \frac{\exp is\{(\Omega/c)\, r + \varphi - \Omega t\}}{\sqrt{r}}. \tag{8.8}$$

La surface de phase constante est définie par la relation

$$\frac{\Omega}{c} r + \varphi - \Omega t = \text{const} \tag{8.9}$$

ou

$$r = \text{const} + c\left(t - \frac{\varphi}{\Omega}\right). \tag{8.10}$$

L'équation (8.10) est celle d'une spirale. Sur un écran cylindrique éloigné de rayon R, la surface de phase constante coupe l'écran suivant la génératrice du cylindre telle que

$$R = \text{const} + c\left(t - \frac{\varphi_0}{\Omega}\right); \tag{8.11}$$

de plus, l'angle φ_0 qui détermine la génératrice concernée change dans le temps suivant la loi $d\varphi_0/dt = \Omega$. Autrement dit, la ligne d'inter-

*) Cette formule donne la solution du problème scalaire. La fonction E satisfait à l'équation d'onde pour $r > r_0$ et la condition aux limites $E = f(\varphi - \Omega t)$ à la surface du cylindre $r = r_0$. Ainsi dans le système des coordonnées animé d'un mouvement de rotation sur l'axe des z à la vitesse Ω, le champ est statique.

12—0406

section (la tache) balaye l'écran à la vitesse

$$v = R\frac{d\varphi_0}{dt} = \Omega R. \qquad (8.12)$$

Ainsi, nous avons obtenu plus formellement le résultat évident (ou en tout cas bien connu) (8.4). Il importe que l'angle Ψ entre la surface de phases égales et l'écran soit défini par la condition (fig. 8.3)

$$\operatorname{tg} \Psi = -\frac{dr}{R\,d\varphi} = \frac{c}{\Omega R} = \frac{c}{v}. \qquad (8.13)$$

Bien entendu, pour de petits angles Ψ, $\operatorname{tg} \Psi \approx \sin \Psi \approx \Psi$ et $v \approx \approx c/\sin \Psi$ en accord avec (8.6). Autrement dit, comme nous l'avons noté plus haut, la grande vitesse de la tache est conditionnée (par exemple, pour $v \gg c$) par la petitesse de l'angle Ψ entre le front d'onde et l'écran.

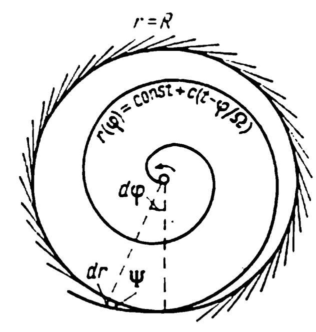


Fig. 8.3. Tache lumineuse produite par une source rotative (phare) sur un écran cylindrique ou sphérique éloigné

Dans ce qui précède, en fait nous n'avons pas avancé des hypothèses sur la nature du champ considéré mais seulement admis (et encore rien que pour simplifier) que la vitesse de sa propagation est égale à c. Il devient donc clair que les taches de vitesse $v > c$ peuvent s'obtenir non seulement dans le cas des ondes électromagnétiques mais aussi dans celui des ondes gravifiques. En appliquant le langage des rayonnements: on peut obtenir des taches de vitesse arbitraire tant pour les neutrinos (vitesse c) que pour toutes autres particules (vitesse $u < c$) *). Le fait qu'une vitesse $v > c$ apparaissant dans le cas des taches ne contredit nullement la relativité est indiscutable. Il suffit de dire que ce résultat s'obtient dans des cas parfaitement réels, par exemple, dans celui d'une impulsion de lumière ou des électrons frappant un écran (cf. fig. 8.2). A titre de supplément indiquons cependant que la méthode de synchronisation des horloges évoquée ordinairement dans les exposés de la théorie de la relativité, premièrement, n'est pas la méthode unique mais seulement l'une des méthodes possibles. Deuxièmement, dans la majorité des cas, une telle méthode est en effet la plus commode et la plus avantageuse, et ceci non pas du fait que la vitesse de la lumière est la vitesse maximale possible, mais parce qu'elle est universelle, étant

*) La trajectoire des particules émises à la vitesse u par une source en rotation est $r = r_0 + u(t - t_0)$, $\varphi = \Omega t_0$, d'où $r = r_0 + u(t - \varphi/\Omega)$; t_0 est l'instant de l'émission.

la même dans tous les systèmes d'inertie (bien entendu, à la condition que l'échelle et les horloges de tous les référentiels soient les mêmes). Enfin, quand on évoque quand même la vitesse de la lumière c dans le vide en tant que vitesse maximale possible, on a en vue la vitesse de transmission des perturbations, des interactions ou des « signaux ». En effet, cette affirmation est vraie (au moins dans le cadre de la Relativité et de la physique telle que nous la connaissons). Bien que les taches lumineuses et autres dont nous venons de parler puissent se déplacer à la vitesse $v > c$, elles ne compromettent

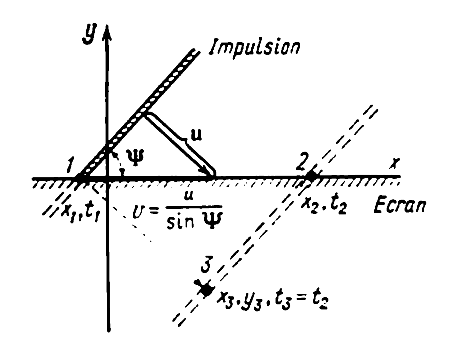


Fig. 8.4. Passage d'une impulsion à travers un écran plan

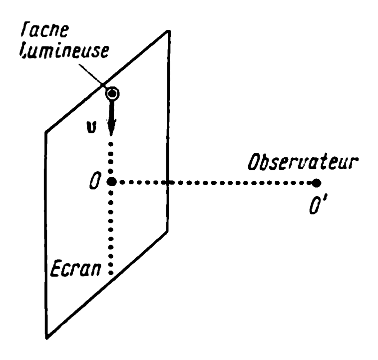


Fig. 8.5. Observation d'une tache lumineuse sur un écran

d'aucune façon notre affirmation qu'il est impossible de les utiliser pour transmettre un signal à une vitesse $v > c$. Examinons l'impulsion (de lumière, d'électrons) dont la section par l'écran (tache) se déplace sur l'écran le long de l'axe x à la vitesse $v > c$ pour atteindre les points *1*, *2* de coordonnées x_1, x_2 aux instants t_1, t_2 (fig. 8.4). Il est évident que $x_2 = x_1 + v\,(t_2 - t_1)$ et pour $v = u/\sin\Psi > c$ les événements 1 et 2 sont séparés par un intervalle spatialement similaire, c.-à-d. $(x_2 - x_1)^2 > c^2\,(t_2 - t_1)^2$. La perturbation (repère) dont est marquée au point *1* l'impulsion à l'instant t_1, sera à l'instant t_2 au point *3* de coordonnées $x_3 = x_1 + u\sin\Psi\,(t_2 - t_1)$, $y_3 = u\cos\Psi\,(t_2 - t_1)$; en outre, $(x_3 - x_1)^2 + y_3^2 = u^2\,(t_2 - t_1)^2 \leqslant c^2\,(t_2 - t_1)^2$. Mais cette perturbation ne tombe pas au point *2*. Pour autant, la vitesse superlumineuse de la tache n'est pas du tout apparente, elle est aussi réelle que toute autre vitesse d'une formation macroscopique ou d'un corps.

Soulignons également que les vitesses superlumineuses des taches sont d'une autre nature que les vitesses apparentes du type $u_{\perp,\,\max}$ (cf. (8.3)) ; la vitesse $u_{\perp,\,\max}$ peut être supérieure à c du fait qu'il s'agit des signaux observés à l'instant t donné mais qui n'ont pas été émis simultanément (cf. plus haut). Dans ces conditions, ce qui

importe c'est le retard défini par la finitude de la vitesse de propagation de la lumière. Ce retard intervient sensiblement aussi dans le comportement des taches observées en un point quelconque. Nous allons nous borner ici à l'exemple le plus simple de la tache lumineuse qui balaye à une vitesse constante v un écran plan et qui est observée au point O' (fig. 8.5). Par observation on entend ici la réception de la lumière émise par la tache rendue possible par la rugosité de l'écran (c.-à-d. sous l'effet de la diffusion) ou résultant de la luminescence de l'écran, produite par l'éclairement. Si $v \leqslant c$, la tache sera visualisée, comme d'« habitude », balayant l'écran de haut en bas. Supposons maintenant que $v \to \infty$, c.-à-d. que toute la trace laissée par la tache se visualise instantanément. Alors, l'observateur verra tout d'abord la tache en O, point le plus proche de O' (la droite OO' est perpendiculaire à l'écran). Ensuite, il verra évidemment deux taches qui s'écartent de O dans des sens opposés. Pour $c < v < \infty$ pendant un temps défini on observera également deux taches.

L'existence des vitesses superlumineuses et des sources superlumineuses du type mentionné (nom que nous donnerons pour abréger dans ce qui suit aux sources qui se déplacent à la vitesse $v > c$) *) est bien connue et depuis longtemps. Il n'y avait d'obscure que cette circonstance que, dans le cadre d'une théorie macroscopique et de l'approche macroscopique dans son ensemble, ces sources ne sont nullement « pires » que les sources infralumineuses. L'approche macroscopique est envisagée ici dans ce sens qu'une source superlumineuse n'est pas une particule ponctuelle (aussi petite que l'on veut), mais toujours associée à un ensemble de particules de ce type (microscopiques) **). Qui plus est, si la position du problème est

---

*) En général, on appelle source superlumineuse les sources qui se déplacent à la vitesse $v > v_{ph} = c/n$. Une telle terminologie est raisonnable mais en disant ici superlumineuses seulement pour les sources à vitesse $v > c$ nous n'apporterons probablement aucune confusion, surtout sous la réserve que nous venons de faire.

**) L'approche macroscopique dont il est question ici est assez relative et bien plus « lâche » que les conditions liées au passage à l'électrodynamique macroscopique à partir des équations de l'électrodynamique microscopique (ou, suivant l'ancienne terminologie, à partir des équations de la théorie électronique). En effet, les équations de l'électrodynamique n'amènent que l'équation de la continuité, alors que pour le reste, le mouvement des charges peut être donné de l'« extérieur » (c'est une tout autre question si ce mouvement est compatible avec l'équation du mouvement des particules). Il est donc clair que déjà dans le cadre de la théorie électronique on peut admettre sans tomber dans des contradictions que dans de larges limites la densité de courant $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ est arbitraire et poser, en particulier, que $v > c$. Dans ce sens, les calculs que Sommerfeld [113] réalisa dès 1904 et où il a examiné le rayonnement d'une charge se déplaçant à la vitesse $v > c$, étaient parfaitement corrects. Il est vrai que Sommerfeld avait en vue le mouvement d'une seule charge, lorsqu'en fait $v < c$ (cette conclusion, si on ne mentionne pas les tachyons, se déduit de la relativité

quelque peu réelle, le nombre de particules responsables du mouvement de la source superlumineuse (tache) s'avère être grand. Un formalisme adéquat pour l'examen du rayonnement des sources superlumineuses est fourni par la théorie du champ usuelle, et notamment, les équations (6.1), où la densité de courant $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ peut en principe varier et se déplacer à des fréquences et vitesses quelconques.

Considérons un fil chargé qui tombe à la vitesse u sous un angle Ψ à la surface de séparation d'un milieu transparent d'indice de réfraction $n(\omega)$. Autrement dit, nous avons la situation schématisée à la figure 8.6 et analogue à la figure 8.2. Avant de traverser la surface du milieu, les charges qui constituent le fil (disons, les électrons ou les protons) se déplacent uniformément. Mais après avoir traversé l'interface, les charges subissent le freinage dont il résulte un courant (polarisation) se déplaçant à la vitesse $v = u/\sin\Psi$, qui correspond à la vitesse du déplacement de la section du fil par la surface du milieu. Un tel courant apparaît même sans le freinage des charges par effet de transition (variation des paramètres du milieu suivant le parcours de la charge) qui conditionne l'émission du rayonnement de transition. Pour donner une illustration suggestive de ce phénomène, on peut imaginer des charges qui s'arrêtent en atteignant le milieu, puis, par exemple, sont neutralisées par les courants existants dans ce milieu. Il en résulte que la surface du milieu est balayée par une charge q à la vitesse v. Admettons pour simplifier que le fil est de section carrée (de côté d) et que la concentration des charges e qui le composent est N. Alors la section du fil par la surface de séparation du milieu, c.-à-d. l'aire de la tache, est $S = d^2/\sin\Psi$; c'est l'aire couverte par la charge $q = eNd^3 \operatorname{cotg}\Psi$ (la surface de séparation du milieu est traversée par unité de temps par la charge $eNd^2v\cos\Psi$, la charge linéique dans le sens de la vitesse est $eNd^2\cos\Psi$, et par conséquent, à la longueur de la tache $d/\sin\Psi$ correspond précisément la charge q). On connaît la solution du problème du rayonnement de la charge qui traverse l'interface vide-

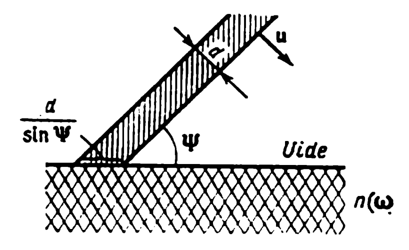


Fig. 8.6. Chute d'un fil chargé sur un écran

---

restreinte créée par Einstein en 1905). Dans ses ouvrages de 1904-1905 [113], Sommerfeld a au fond anticipé la théorie de l'effet Tchérenkov. Fait curieux : pendant plus de trente ans jusqu'à la publication du livre de Tamm et Frank [26], personne n'a eu l'idée dans le problème du rayonnement d'une source animée d'un mouvement uniforme soit de remplacer la vitesse c par la vitesse de phase c/n, soit d'examiner une source de type tache qui se déplace à la vitesse $v > c$.

milieu [65]. L'énergie ainsi rayonnée peut s'écrire

$$\frac{dW}{dt} = \frac{q^2 v}{c^2} \int \left(1 - \frac{c^2}{n^2(\omega) v^2}\right) F\omega \, d\omega. \qquad (8.14)$$

Evidemment, avec $F = 1$, cette formule devient l'expression (6.58) pour le milieu homogène. Le facteur $F(\omega, \ldots)$ rend compte de l'influence de l'interface, de la dimension de la source, etc. Des considérations générales font penser que la même formule est applicable également à une source superlumineuse de $v > c$; de plus, $F = F(\omega, \Psi, d \ldots)$, et dépend également de la distribution de charges dans le vide *). Le facteur F peut être concrétisé seulement par un calcul précis, ainsi que, certes, en utilisant un modèle bien défini de la source. C'est ce que nous ferons plus loin. Pour le moment remarquons que quel que soit le cas, l'intégration de (8.14) porte sur le domaine des fréquences vérifiant la condition Tchérenkov (6.53). Par ailleurs, bien entendu, il faut poser dans le vide $n = 1$ (nous avons supposé plus haut que le milieu confine au vide). C'est pourquoi pour $v > c$ dans le vide (au-dessus du milieu) le rayonnement apparaît toujours si seulement $F \neq 0$. Mais pratiquement le facteur F doit être à l'avance très petit pour les ondes de longueur $\lambda = 2\pi c/\omega$, celle-ci étant plus petite que la projection des dimensions de la tache sur la direction du vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Dans le milieu, pour $v > c$ et $n(\omega) > 1$, la situation est la même, mais pour $n(\omega) < 1$, le rôle du facteur de coupure peut être joué également par la condition $v > v_{\mathrm{ph}} = c/n$: le rayonnement dans un milieu n'est possible que si cette condition est respectée. Dans le cas général on peut également affirmer que dans le vide le rayonnement est caractérisé par l'angle $\theta_{01} = \arccos(c/v)$, dans le milieu par l'angle $\theta_{02} = \arccos(c/n(\omega)\, v)$ (θ est l'angle entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{v}$; fig. 8.7). Puisque dans un milieu quelconque la vitesse du front avant des ondes électromagnétiques, compte tenu de la dispersion, est c, le rayonnement d'une source superlumineuse dans un milieu est caractérisé non seulement par l'angle θ_{02}, mais encore par l'angle $\theta_{01} = \arccos(c/v)$ qui dans ce cas détermine l'ouverture du cône du front avant de l'onde. Ainsi, pour $\theta > \theta_{01}$, le champ dans le milieu est nul. Si on parle de la fraction principale du rayonnement et non pas de son front, alors dans un milieu dispersif où la vitesse de groupe

---

*) Il serait plus exact d'écrire le deuxième membre de l'expression (8.14) sous la forme de la somme de deux termes

$$\int \left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) F_1 \omega \, d\omega + \int \left(1 - \frac{c^2}{n^2(\omega) v^2}\right) F_2 \omega \, d\omega,$$

où le premier terme correspond à la puissance du rayonnement dans le vide, et le deuxième, à sa puissance dans un milieu. Or, tant que le facteur F n'est pas concrétisé, l'expression (8.14) est d'un caractère symbolique et de ce fait elle peut être retenue.

$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \Big/ \frac{d(\omega n)}{d\omega}$ est inférieure à la vitesse de phase $v_{ph} = c/n$, l'effet Tchérenkov donne lieu à une situation analogue. Aucun besoin n'est donc de discuter ici cet aspect du problème (cf. [114, 115]).

Examinons maintenant de près la solution exacte du problème d'un fil qui tombe sur un plan conducteur parfait. La géométrie du problème est celle de la figure 8.6. mais le milieu à indice de

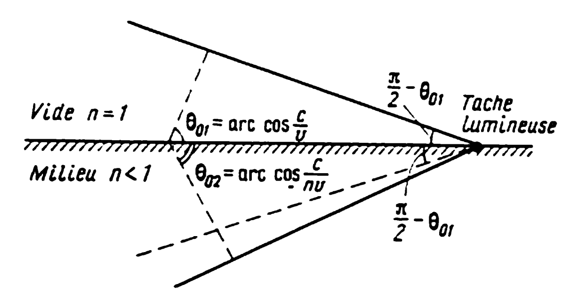


Fig. 8.7. Rayonnement Tchérenkov d'une tache lumineuse

réfraction $n(\omega)$ est remplacé par un conducteur parfait. Pour un observateur extérieur, la charge qui traverse l'interface du conducteur disparaît, c.-à-d. si on parle du mécanisme de l'émission, il s'agit ici d'un rayonnement de transition ; notre intérêt porte pourtant sur l'interférence d'un tel rayonnement émis par un fil en mouvement ; de plus, nous savons à l'avance que le rayonnement résultant sera dirigé sous un angle $\theta_{01} = \arccos(c/v)$. Le champ du fil dans le vide est la somme des champs du fil lui-même et de son image, c.-à-d. il est généré par le courant de densité

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= Q\delta(z)\,\mathbf{u}_1\delta(\mathbf{b}_1\mathbf{r} - ut), \quad && y > 0, \\ \mathbf{j} &= -Q\delta(z)\,\mathbf{u}_2\delta(\mathbf{b}_2\mathbf{r} - ut), \quad && y < 0. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Ici Q est la charge linéique du fil ; $\mathbf{u}_1 = u\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{u}_2 = u\mathbf{b}_2$ sont les vitesses du fil et de son image ($b_1 = b_2 = 1$; $b_{1x} = b_{2x}$, $b_{1y} = -b_{2y}$, $b_{1z} = b_{2z} = 0$; le fil repose dans le plan x, y et pour simplifier, on admet qu'il est infiniment fin). Bien entendu, il faut admettre par ailleurs que dans (8.15) la première expression est différente de zéro dans le vide, et la deuxième, dans le métal. La composante de Fourier de la densité de courant est

$$\mathbf{j}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int \mathbf{j}\exp(i\omega t)\,dt = \frac{Q\delta(z)}{2\pi}\left\{\mathbf{b}_1\exp\left(i\frac{\omega}{u}\mathbf{b}_1\mathbf{r}\right) - \right.$$
$$\left. - \mathbf{b}_2\exp\left(i\frac{\omega}{u}\mathbf{b}_2\mathbf{r}\right\}\right. .$$

A de grandes distances de l'écran on a pour la composante de Fourier du potentiel vecteur

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{\exp(ikR)}{cR} \int \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' =$$

$$= i\,\frac{Q\exp(ikR)}{cR}\left\{\frac{\mathbf{b}_1}{(\omega/u)\,b_{1y}-k_y} - \frac{\mathbf{b}_2}{(\omega/u)\,b_{2y}-k_y}\right\}\delta\left(\frac{\omega}{u}b_{1x}-k_x\right), \quad (8.16)$$

où $\mathbf{k} = (\omega/c)\,\mathbf{s} = k\mathbf{s}$ est le vecteur d'onde de l'onde rayonnée (évidemment, $s^2 = 1$, $k = \omega/c$). Ensuite on trouve facilement le champ magnétique $\mathbf{H}_\omega = i\,[\mathbf{k}\mathbf{A}_\omega]$, puis l'intégrale

$$\frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H^2\,dt = \frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\,\mathbf{H}_\omega\mathbf{H}_{\omega'} \exp[i(\omega+\omega')\,t] =$$

$$= {}^1/_2 c\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\,\mathbf{H}_\omega\mathbf{H}_{\omega'}\delta(\omega+\omega') =$$

$$= {}^1/_2 c\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{H}_\omega|^2\,d\omega = c\int_0^{\infty} |\mathbf{H}_\omega|^2\,d\omega.$$

Prenons l'axe x parcouru par la tache lumineuse pour l'axe polaire et supposons que le vecteur d'onde du rayonnement $\mathbf{k} = (\omega/c)\,\mathbf{s}$ fait avec cet axe un angle θ ; notons l'angle azimutal par φ (fig. 8.8) ; en outre, dans le vide, $-{}^1/_2\pi \leqslant \varphi \leqslant {}^1/_2\pi$.

La formule (8.16) montre que $\mathbf{A}$ est proportionnelle à la fonction delta de l'argument $(\omega/u)\,b_{1x} - k_x$. Evidemment, le champ magnétique $\mathbf{H}_\omega$ lui aussi est proportionnel à cette fonction. Quant à l'énergie du rayonnement, elle croît avec carré de la fonction delta. L'intégrale de ce dernier est divergente, ce qui témoigne de l'énergie infinie du rayonnement. L'explication physique de cette infinitude est bien simple : nous admettons que le fil coupe l'écran pendant un temps infiniment grand. Pour obtenir le résultat final on peut considérer le mouvement du fil au cours d'un temps T très long bien que fini. Il est évident que l'énergie du rayonnement sera proportionnelle à T. La procédure formelle suivante aboutit au même résultat. Ecrivons

$$\delta^2\left(\frac{\omega}{u}b_{1x}-k_x\right) = \frac{u}{b_{1x}}\,\delta\left(\omega-\frac{k_x u}{b_{1x}}\right)\delta\left(\frac{\omega}{u}b_{1x}-k_x\right).$$

Développons le premier cofacteur en une intégrale de Fourier

$$\delta^2\left(\frac{\omega}{u}b_{1x}-k_x\right) = \frac{u}{2\pi b_{1x}}\,\delta\left(\frac{\omega}{u}b_{1x}-k_x\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i\left(\omega-\frac{k_x u}{b_{1x}}\right)t\right]dt.$$

La présence dans ce produit de la fonction delta nous permet d'admettre que sous le signe d'intégration l'exposant de l'exponentielle est nul; on a alors

$$\delta^2\left(\frac{\omega}{u}b_{1x}-k_x\right)=\frac{vT}{2\pi}\,\delta\left(\frac{\omega}{u}b_{1x}-k_x\right),$$

où T est le temps total du déplacement du fil, et $v = u/b_{1x}$, la vitesse de la source (de la tache lumineuse). En procédant de cette façon

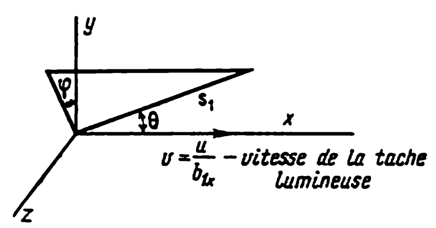


Fig. 8.8. Figure illustrant le calcul du rayonnement Tchérenkov d'une tache lumineuse

pour l'énergie émise dans l'angle solide $d\Omega = \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ dans l'intervalle des fréquences $d\omega$ par unité de temps on obtient l'expression suivante

$$\frac{dW_\omega(\theta,\varphi)}{dt}=\frac{1}{T}c\,|\mathbf{H}_\omega|^2R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d\omega=$$

$$=\frac{Q^2v}{2\pi\omega}\left\{\frac{[\mathbf{sb}_1]}{(c/u)\,b_{1y}-s_y}-\frac{[\mathbf{sb}_2]}{(c/u)\,b_{1y}+s_y}\right\}^2\delta\left(\frac{c}{v}-s_x\right)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d\omega.$$

L'existence de la fonction delta correspondante rend clair que, comme il se doit, seules sont émises les ondes à vecteur d'onde $\mathbf{k}$ vérifiant la condition $s_x = \cos\theta = c/v = \cos\theta_{01}$. L'intégration sur θ amène

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dW_\omega(\varphi)}{dt}=\frac{Q^2v}{2\pi\omega}\left\{\frac{[\mathbf{sb}_1]}{(c/u)\,b_{1y}-s_y}-\frac{[\mathbf{sb}_2]}{(c/u)\,b_{1y}+s_y}\right\}^2 d\varphi\,d\omega,\\
&\mathbf{s}=\{\cos\theta_{01},\ \sin\theta_{01}\cos\varphi,\ \sin\theta_{01}\sin\varphi\},\\
&\mathbf{b}_1=\{\sin\Psi,\ -\cos\Psi,\ 0\},\quad \mathbf{b}_2=\{\sin\Psi,\ \cos\Psi,\ 0\},\\
&\cos\theta_{01}=\frac{c}{v},\quad v=\frac{u}{\sin\Psi},
\end{aligned}\right\}\tag{8.17}$$

où Ψ est l'angle entre la vitesse des particules $\mathbf{u}$ et l'axe x.

Enfin, on obtient

$$\frac{dW}{dt}=\frac{2Q^2v}{\pi}\frac{c^2}{u^2}\int_0^\infty\frac{d\omega}{\omega}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\,\frac{\{(1-u^2/v^2)^2-(1-c^2/v^2)(1-u^4/c^2v^2)\cos^2\varphi\}}{[(c^2/u^2)\cos^2\Psi-(1-c^2/v^2)\cos^2\varphi]^2}.\tag{8.18}$$

D'après (6.58), il est clair que l'émission d'une charge q se déplaçant dans un milieu homogène aurait dans l'« intervalle » $d\omega\, d\varphi$ la puissance

$$\frac{dW_\omega(\varphi)}{dt} = \frac{q^2 v}{2\pi c^2}\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right)\omega\, d\varphi\, d\omega,$$

où nous avons posé $n = 1$. En comparant cette expression avec (8.17) nous voyons que le filament est équivalent à la charge

$$q = Q\left|\frac{[\mathbf{sb}_1]}{(c/u)\, b_{1y} - s_y} - \frac{[\mathbf{sb}_2]}{(c/u)\, b_{1y} + s_y}\right| \frac{c}{\omega}\, \frac{1}{\sqrt{1 - c^2/v^2}}. \qquad (8.19)$$

Puisque Q est la charge d'une unité de longueur du fil, le facteur affecté à Q de (8.19) est la longueur efficace du fil, responsable du rayonnement dans la direction $\mathbf{k}$. Cette longueur n'est rien d'autre que la longueur de formation du rayonnement de transition dans la direction $\mathbf{k}$. Les intégrales (8.17), (8.18) divergent pour $\omega \to 0$, ce qui est lié tout simplement à l'hypothèse sur l'étendue infinie du fil. La puissance du rayonnement diminue avec la croissance de ω, ceci a lieu évidemment par suite de la diminution dans ces conditions de la longueur de formation du rayonnement de transition. Dans d'autres problèmes analogues, la dépendance fréquentielle peut être différente (cf. plus loin).

Comme nous l'avons noté, nous pouvons considérer que le mécanisme de l'émission des particules isolées ou du fil tout entier qui passent par la surface de séparation du conducteur est le rayonnement de transition. Pourtant, avec le même succès (et le même résultat final) on peut supposer qu'on est en présence du rayonnement de freinage produit par l'arrêt instantané à l'interface des charges et de leurs images (dans le cas d'un conducteur parfait, pour le calcul du champ dans le vide, ces deux possibilités sont indiscernables; cf. chapitre 7). En général, le mécanisme de l'« acte élémentaire » du rayonnement, qui conduit finalement à l'effet Tchérenkov, est sous un certain rapport peu important: l'allure du rayonnement Tchérenkov (il s'agit en premier lieu de la condition $\cos\theta_0 = c/vn(\omega)$) est définie par l'interférence des ondes émises le long de la trajectoire de la source. Ce qui vient d'être dit est bien entendu en plein accord avec le principe de Huyghens. Ainsi, le rayonnement concerné d'un fil chargé qui frappe un écran constitue précisément l'effet Tchérenkov pour $v > c$; de plus, il apparaît dans le vide (il est vrai qu'ici est nécessaire une interface quelconque entre le vide et le milieu). L'intensité du rayonnement et sa distribution angulaire par rapport à φ varieront en fonction des propriétés des milieux 1 et 2 (assurément, pour observer le rayonnement Tchérenkov au moins l'un de ces milieux doit être transparent; dans ce qui précède nous avons admis que le milieu 1 est le vide). Pour un milieu anisotrope l'indice de réfraction $n(\omega)$ de la condition (6.53) doit être pris

séparément pour chaque onde normale, la valeur de n dépendant également des angles entre l'onde et les axes de symétrie (axes du cristal, direction du champ magnétique extérieur, etc.). Signalons spécialement l'émission des ondes dans les guides d'ondes. Dans l'ensemble ceci pose un grand nombre de problèmes analogues à ceux de la théorie du rayonnement Tchérenkov pour $v < c$ (cf. [65-68]). Il est également évident que les sources considérées (taches de lumière) émettent aussi dans un régime infralumineux, c.-à-d. lorsque $c/n < v < c$. Ces sources présentent aussi de l'intérêt lorsqu'on étudie l'excitation, celle, par exemple, des ondes superficielles de différents types résultant de l'effet Tchérenkov ou du rayonnement de transition sur une surface non homogène (dans ce dernier cas, certes, la condition $v > c/n$ n'est plus nécessaire). Ce qui vient d'être dit est également vrai pour les ondes de nature non électromagnétique; à titre d'exemple indiquons la production du second son dans l'hélium II par une source en mouvement (disons, par un rayon de laser se déplaçant à la surface de l'hélium).

Le rayonnement d'une source superlumineuse ne se ramène nullement à l'effet Tchérenkov. Ainsi, déjà dans le mouvement uniforme, mais avec la source « modulée » par une certaine fréquence ω_0, on observe le rayonnement à la fréquence dopplérienne $\omega = \frac{\omega_0}{|1-(v/c)\,n\cos\theta|}$ (cf. (6.59)). La modulation peut s'obtenir de façons différentes: par pompage supplémentaire du rayon, par modification de sa densité (le long du rayon), en portant un « réseau » (des inhomogénéités périodiques) sur l'écran, etc. Enfin les particularités du rayonnement superlumineux à $v > c$, ainsi que dans le cas $c/n < v < c$. se manifestent aussi lorsque le mouvement de la source n'est pas uniforme. Un exemple en est fourni par le rayonnement synchrotron (ou, plutôt, quasi synchrotron) qui apparaît lorsque le mouvement de la source est circulaire. C'est le cas des particules ou des photons émis par une source en rotation et frappant un écran sphérique ou cylindrique. Voici un modèle plus concret [116]: une source animée d'un mouvement de rotation (disons, un pulsar) émet un flux directionnel de rayons gamma qui frappent un « écran » composé d'une substance plus ou moins dense (plasma) se trouvant à la distance R de la source. En frappant l'écran, les rayons γ se diffusent sur les électrons qui acquièrent par recul une impulsion et créent de ce fait une polarisation radiale qui « balaye » l'écran à la vitesse $v = \Omega R$. Il en résulte que l'écran est balayé par un courant de densité

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{\partial}{\partial t}\,[\mathbf{p}(t)\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}(t))], \\ \mathbf{p}(t) &= p\,\{\cos\Omega t,\ \sin\Omega t,\ 0\}, \\ \mathbf{R}(t) &= R\,\{\cos\Omega t,\ \sin\Omega t,\ 0\}, \end{aligned}\right\} \qquad (8.20)$$

où **p** est le moment électrique dipolaire associé à la polarisation créée qu'on considère comme ponctuelle; ceci est possible si on envisage le rayonnement de longueur d'onde λ sensiblement supérieure aux dimensions l de la source.

Le rayonnement apparu avec $v = \Omega R > c$ est analogue quant à son caractère au rayonnement synchrotron dans un milieu sous la condition que $v > c/n$ (cf. chapitre 6); sa puissance totale est

$$\frac{dW}{dt} \approx \frac{p^2(1+v^2/c^2)}{2v^3} \int\limits_{\Omega \ll \omega \ll c/l} \omega^3 \, d\omega. \tag{8.21}$$

La coupure de l'intégrale a lieu aux fréquences élevées vu les dimensions finies du doublet, ce dont (8.20), (8.21) n'ont pas tenu compte; à propos, le calcul de [116] admet que le moment dipolaire **p** de (8.20) est dirigé non pas suivant le rayon, mais suivant l'axe des z (c.-à-d. on pose $\mathbf{p} = p\,\{0, 0, 1\}$, ce qui dans la formule (8.21) n'intervient probablement que sur le coefficient numérique. Dans les modèles des pulsars, la perturbation qui balaye le plasma à la vitesse $v > c$ peut être due également au rayonnement magnétique dipolaire ou au flux des particules émises par le pulsar.

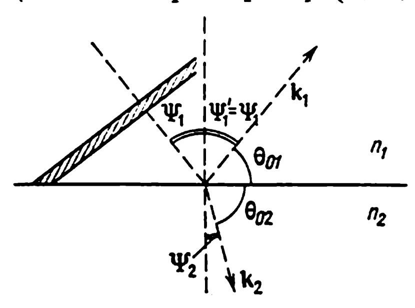


Fig. 8.9. Réflexion et réfraction d'une impulsion de lumière à l'interface de deux milieux

L'essor des techniques du laser fait que la création d'une source superlumineuse à l'aide de la lumière acquiert un intérêt particulier. Si on impose que pour $v = \Omega R > c$ l'intensité du champ au sein de la tache lumineuse soit assez grande, l'utilisation d'un rayon animé d'un mouvement rotatif n'est guère facile même si on fait appel à un laser. Il est donc plus simple de réaliser l'incidence de l'impulsion sur un écran qui constitue l'interface (cf. plus haut fig. 8.2 et formules (8.5), (8.6)). Si l'écran est une surface de séparation parfaitement plane de deux milieux et le problème peut être envisagé en approximation linéaire (champ faible), il s'agit d'un problème ordinaire sur la réflexion et la réfraction de la lumière. Il devient donc tout de suite clair (et, certes, ceci résulte des équations du champ) que l'impulsion incidente sous un angle Ψ_1 se reflète également sous un angle $\Psi_1' = \Psi_1$, et l'angle de réfraction Ψ_2 est défini par la loi de réfraction (fig. 8.9)

$$\frac{\sin \Psi_2}{\sin \Psi_1} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \Psi_1' = \Psi_1. \tag{8.22}$$

Fait curieux qui a été depuis longtemps signalé par Frank [76b]: les conditions (8.22) coïncident avec celles de l'effet Tchérenkov pour

l'impulsion concernée, dont la section par l'écran se déplace à la vitesse $v = (c/n_1) \sin \Psi_1$ (cf. (8.5)). En effet, dans le milieu 1, l'angle Tchérenkov est défini par la condition $\cos \theta_{01} = c/n_1 v = \sin \Psi_1$, d'où comme il se doit $\Psi_1 = \Psi_1' = {}^1/_2\pi - \theta_{01}$ (cf. fig. 8.9). Pour le milieu 2 on a $\cos \theta_{02} = c/n_2 v = (n_1/n_2) \sin \Psi_2$, ce qui coïncide avec (8.22) puisque $\cos \theta_{02} = \sin \Psi_2$. On peut dire littéralement que pendant une très longue période « nous avons fait de la prose sans le savoir »: la condition Tchérenkov superlumineuse (et la condition plus générale pour $n_1 > 1$) est connue depuis plusieurs siècles. D'autre part, la correspondance dont on vient de parler entre les lois de réflexion et de réfraction d'une part et la condition Tchérenkov de l'autre, est naturelle, puisque toutes ces relations se déduisent de la même façon du principe de Huyghens. Pour obtenir de nouveaux résultats, le problème doit être envisagé en tenant compte de la non-linéarité de divers milieux (en particulier, des substances piézo-électriques).

Encore une remarque que nous voulons faire concerne les taches lumineuses dans le cas des écrans rugueux ou luminescents. Dans ce dernier cas le rayonnement émis par une tache lumineuse est en général non cohérent. Ceci est également vrai en fait pour les écrans rugueux, puisque dans ces conditions il s'agit d'habitude des taches lumineuses suffisamment grandes (leurs dimensions sont sensiblement plus grandes que la longueur d'onde de la lumière). Si le rayonnement est non cohérent, l'interférence devient impossible et les traits particuliers tels que la directivité nettement exprimée du rayonnement Tchérenkov disparaissent.

Le sort historique des recherches sur le rayonnement émis par des sources se déplaçant à la vitesse supérieure à la vitesse de phase de la lumière est très particulier. Il s'agit des effets classiques qualitativement évidents déjà dans le cadre des notions optiques les plus simples (principe de Huyghens, interférence) et décrits quantitativement par les équations de Maxwell. Comme nous l'avons vu, les lois élémentaires de la réflexion et de la réfraction de la lumière sur une interface plane de deux milieux coïncident au fond avec les conditions de rayonnement Tchérenkov emis par une source qui balaye l'interface. La condition Tchérenkov pour une charge ou une source superlumineuse (vitesse $v > c$) a été obtenue en 1904 [113]. Malgré cela l'effet Tchérenkov n'a été découvert expérimentalement qu'en 1934, et encore par un simple hasard (dans le sens que l'étude portait sur tout autre question), alors que l'établissement de la théorie de cet effet a nécessité de grands et plutôt longs efforts [74]. Fait tout aussi curieux est qu'à la première étape il semblait que les possibilités que présente en physique l'effet Tchérenkov pour mesurer ou comprendre divers phénomènes soient très modestes. Or, en fait, l'émission Tchérenkov et les phénomènes apparentés sont actuellement appliqués à une large échelle et on peut dire que leur étude

constitue toute une branche de la physique à laquelle on consacre un nombre considérable d'articles et aperçus [65-68]. Il peut sembler que ce problème, bien que non épuisé encore, soit du moins suffisamment étudié sous tous ses aspects. Or, il s'avère que ceci non plus n'est pas exact et le témoignage en est fourni par l'article [112] et le présent chapitre. En effet, il était largement admis, et l'auteur lui-même partageait cette vue, que l'effet Tchérenkov et l'effet Doppler anomal ne peuvent s'observer que dans le cas des ondes auxquelles correspond l'indice de réfraction $n(\omega) > 1$ (la condition $c/n < v < c$). On en déduisait que dans le vide les phénomènes correspondants étaient impossibles. Cependant, il existe des sources superlumineuses qui se déplacent à la vitesse $v > c$. Dans de larges limites ces sources peuvent être assimilées aux sources « ordinaires » se déplaçant à la vitesse $v < c$. Un exemple concret est fourni par le fait que les sources superlumineuses peuvent émettre un rayonnement Tchérenkov dans un milieu quelconque, y compris dans le vide ou sous la condition $n(\omega) < 1$. Les sources superlumineuses de type général possèdent dans l'ensemble les mêmes particularités que les sources se déplaçant à la vitesse $c/n < v < c$ (effet Doppler anomal, etc.). Du point de vue de la théorie du rayonnement, la différence entre les sources superlumineuses ($v > c$) et les sources infralumineuses ($v < c$) est qu'une source superlumineuse ne peut être particule « élémentaire » isolée, elle est donc toujours étendue. Ce sont précisément les dimensions d'une source superlumineuse qui déterminent en premier lieu, surtout dans le vide, la limite des ondes courtes du spectre émis. Sous ce rapport, il serait plutôt difficile d'utiliser les sources superlumineuses, par exemple, pour produire des rayons X (on pourrait être séduit par une telle possibilité, puisque le fait qu'aux fréquences élevées l'indice $n(\omega)$ tend vers l'unité, qui est un obstacle pour les sources à $v < c$ rendant impossible l'utilisation de l'effet Tchérenkov dans le domaine des rayons X, ne joue pas un rôle aussi critique pour $v > c$). Il n'y aurait rien d'étonnant, pourtant, si dans l'avenir on découvre aussi telle ou telle application intéressante des sources superlumineuses. D'autre part, il se peut que les sources superlumineuses soient détectées par l'astronomie. Indépendamment de ceci, l'étude de telles sources (à $v > c$) d'ondes électromagnétiques et gravifiques (et, peut être, des neutrinos aussi) et l'ensemble de tous les problèmes qui se posent dans ce domaine, présente selon nous sans conteste un grand intérêt physique.

CHAPITRE 9

RÉABSORPTION ET TRANSFERT DE RAYONNEMENT *

Réabsorption et effet maser (amplification des ondes). Equation de transfert du rayonnement. Méthode des coefficients d'Einstein et son application dans le cas du rayonnement polarisé. Réabsorption et amplification du rayonnement synchrotron dans le vide et en présence d'un plasma « froid »

En étudiant le rayonnement synchrotron d'un ensemble des particules (cf. chapitre 5) nous avons admis que divers électrons relativistes émettent indépendamment l'un de l'autre (ou, comme il est d'usage de le dire, leur rayonnement est non cohérent). Ceci se rapporte non seulement au rayonnement dans le vide, mais aussi au rayonnement sur lequel intervient un plasma non relativiste (« froid ») (cf. chapitre 6). Cependant, si le nombre de particules émettrices se trouvant sur le rayon visuel est assez grand alors l'absorption et le rayonnement forcé (induit) des particules elles-mêmes commencent à exercer leur action. Dans les cas courants ce processus s'appelle réabsorption. La réabsorption peut en principe modifier sensiblement l'intensité et la polarisation du rayonnement. Qui plus est, dans certaines conditions, la réabsorption peut être négative, c.-à-d. il est possible que le rayonnement soit amplifié. Cette amplification ou réabsorption négative s'appelle aussi effet maser. Il va de soi que le caractère de la réabsorption est étroitement lié à la nature du rayonnement, c.-à-d. dans le cas de la réabsorption d'un rayonnement synchrotron on adopte que les particules émettrices sont des particules relativistes chargées se déplaçant dans un champ magnétique. Ce rayonnement ainsi que sa réabsorption peuvent changer sensiblement si le domaine émetteur contient en plus des électrons relativistes un plasma froid. Ainsi, dans le cas du rayonnement dans le vide, la réabsorption dans n'importe quel système d'électrons relativistes isotrope par rapport à la direction de leur vitesse est positive (c.-à-d. dans ces conditions on observe l'absorption). Mais en présence d'un plasma froid, la réabsorption du rayonnement synchrotron peut devenir négative (cf. ci-dessous). Cela signifie que le système correspondant (par exemple, une couche ou un nuage) d'électrons relativistes à distribution isotrope des vitesses agit comme un maser.

Bien que, comme nous l'avons dit, nous ne discutions que de la réabsorption du rayonnement synchrotron, ce qui suit se rapporte dans une grande mesure au rayonnement de nature quelconque.

---

*) Ce chapitre s'inspire de la section 3 de l'article [31b].

Pour étudier la réabsorption on fait souvent appel à la mise en moyenne dans toutes les directions, des expressions de l'intensité du rayonnement d'une particule isolée. Les conditions dans lesquelles cette approche est applicable et son caractère ne sont pas évidents à l'avance, ils sont même inutilisables pour déterminer les variations de la polarisation. Il suffit de dire que la distribution angulaire du rayonnement synchrotron est tout de même finie et la polarisation dépend sensiblement de l'angle $\psi = \chi - \alpha$ entre la direction de la vitesse et la direction du rayonnement (cf. (5.21)-(5.23)). C'est pourquoi l'étude de la réabsorption (et surtout de la réabsorption négative) tenant compte de la polarisation du rayonnement impose une analyse plus rigoureuse des propriétés angulaires et polarisatrices du rayonnement synchrotron. Il faut dire encore qu'un plasma froid placé dans un champ magnétique est anisotrope (magnétiquement actif) et même dans un champ faible avec une bonne approximation on ne peut, et de loin, la considérer toujours comme isotrope d'indice de réfraction $n \approx 1 - \omega_p^2/2\omega^2$. Sous ce rapport ce sont les caractéristiques de polarisation qui sont particulièrement sensibles du fait que la rotation du plan de polarisation (effet de Faraday) est un effet intégral: il croît avec le chemin parcouru par l'onde (cf., par exemple, [64] et chapitre 11).

Voici le problème général, tel qu'on l'étudie habituellement dans des cas particuliers. Dans un certain domaine (« source ») sont données la distribution des électrons relativistes N_e (**p**, **R**), la concentration du plasma froid N (**R**) et l'intensité du champ magnétique **H** (**R**). Il faut déterminer le champ radiant aussi bien dans le domaine exploré (dans la source) que, surtout, loin de cette source. Dans les cas courants, il s'agit du rayonnement de la source elle-même mais il se peut qu'on ait à déterminer l'influence d'une telle source sur le rayonnement qui passe par cette dernière étant émis par une autre source plus éloignée du point de réception (c'est pourquoi précisément le terme de source devient conventionnel).

Nous avons admis plus haut que la source est stationnaire et de ce fait le temps t ne figure nulle part. Mais pour des sources en mouvement ou en expansion nous devons rejeter cette contrainte. Ordinairement, en plus de l'hypothèse de stationnarité, nous pouvons recourir en pratique à d'autres simplifications. Ainsi, l'existence de toute une série d'instabilités fait que dans les conditions cosmiques l'anisotropie dans la distribution des électrons suivant les vitesses disparaît assez vite ou en tout cas, diminue sensiblement (cf. chapitre 15). C'est pourquoi on peut considérer le plus souvent que la fonction de distrbution des électrons relativistes ne dépend que de leur énergie, c.-à-d. on peut utiliser la grandeur N_e ($\mathcal{E}$, **R**). Ensuite, dans les conditions cosmiques la variation de N_e, N et **H** en fonction des coordonnées est toujours très lente s'il s'agit des distances de l'ordre de la longueur d'onde du rayonnement. Par conséquent, on peut

en général appliquer l'approche de l'optique géométrique et souvent on peut admettre simplement que dans un domaine de longueur L le long du rayon visuel toutes les grandeurs sont constantes. Une autre possibilité consiste à admettre que les concentrations N_e et N sont constantes sur la longueur L, alors que le champ **H** est en moyenne chaotique et d'intensité H.

Pour décrire le rayonnement, dans le cas général il faut appliquer les paramètres de Stokes I, Q, U et V qu'on peut associer par le tenseur $I_{\alpha\beta}$ (α, β = 1, 2)

$$I_{\alpha\beta} = {}^1/_2 \begin{pmatrix} I+Q & U+iV \\ U-iV & I-Q \end{pmatrix};$$

$$\left.\begin{aligned} I &= I_{11}+I_{22}, \quad V = i(I_{21}-I_{12}), \\ Q &= I_{11}-I_{22}, \quad U = I_{21}+I_{12}. \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

Les indices 1, 2 correspondent ici aux axes des x et des y perpendiculaires au rayon visuel. La liaison entre les paramètres de Stokes, l'intensité du rayonnement I, le degré de polarisation Π, la relation entre les axes de l'ellipse de polarisation p et l'angle $\tilde{\chi}$ déterminant l'orientation de cette ellipse est la suivante (pour plus de détails cf., par exemple, [44] et § 6 de [45], ainsi que [38])

$$\left.\begin{aligned} I &= I, \quad \Pi = \frac{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}}{I}, \qquad \beta = \operatorname{arctg} p, \\ \sin 2\beta &= \frac{V}{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}}, \quad \operatorname{tg}(2\tilde{\chi}) = \frac{U}{Q}. \end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

Il est donc clair que le paramètre de Stokes I coïncide avec l'intensité.

Les paramètres de Stokes et toute autre grandeur exprimée à travers ces paramètres se rapportent au rayonnement dans un certain intervalle fréquentiel $\Delta\nu \ll \nu$ et correspondent à la mise en moyenne des expressions quadratiques suivant les champs pendant le temps $\Delta t \gg 1/\Delta\nu$. Dans un milieu anisotrope, et en particulier, dans un milieu magnétiquement actif, le champ électrique **E** n'est pas en général perpendiculaire à **k**, alors que le vecteur d'induction **D** est toujours orthogonal au vecteur d'onde **k**. C'est pourquoi dans un milieu anisotrope il est plus commode de définir le tenseur $I_{\alpha\beta}$ comme $I_{\alpha\beta} = D_\alpha D_\beta^*$ (α, β = 1, 2) [117]. Maintenant, les paramètres de Stokes et les quantités (9.2) concernent aussi le vecteur **D** et non pas **E**. Il faut retenir que dans le cas général l'intensité $I = \mathrm{Sp}\, I_{\alpha\beta} \equiv D_{11}D_{11}^* + D_{22}D_{22}^*$ n'est plus proportionnelle au flux d'énergie. Lorsque le rayonnement est enregistré loin de la source (dans le vide, ou plus exactement, hors du milieu anisotrope), cette circonstance est évidemment peu importante.

Pour déterminer le tenseur $I_{\alpha\beta}$ on reçourt à l'équation de transfert qui ces dernières années a fait l'objet d'étude ou de discussion de nombreux ouvrages (notamment, de l'examen très détaillé de [117]). Dans un milieu homogène, l'équation de transfert du cas stationnaire ($I_{\alpha\beta}$ ne dépend pas de t) est de la forme

$$\frac{dI_{\alpha\beta}}{dz} = \varepsilon_{\alpha\beta} + (\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \mathcal{K}_{\alpha\beta\gamma\delta})\, I_{\gamma\delta}. \tag{9.3}$$

Ici

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \int R^2 p_{\alpha\beta} N_e(\mathcal{E}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\tau})\, d\mathcal{E}\, d\Omega_\tau \tag{9.4}$$

est le pouvoir émissif d'une unité de volume, c.-à-d. la puissance du rayonnement spontané émis par unité de volume dans un angle solide unité et dans un intervalle unité de fréquences (la notation ε_{ij} du tenseur de permittivité n'est pas employée dans ce chapitre; pour d'autres notations cf. également chapitre 5). Les quantités $p_{\alpha\beta}$ du rayonnement synchrotron, le seul envisagé ici pour rendre concrète notre étude, sont définies par les formules (5.21)-(5.23) et (5.26), (5.27); par ailleurs, il peut s'avérer que pour p_{12} l'expression (5.23) doit être complétée par des termes d'ordre plus élevé en $\xi = mc^2/\mathcal{E}$ (cf. [118]). En présence d'un plasma, dans ces formules il faut aussi remplacer

$$\xi = mc^2/\mathcal{E} \quad \text{par} \quad \eta = \sqrt{\xi^2 + (\omega_p/\omega)^2} \approx \sqrt{1 - n^2v^2/c^2}$$

(cf. [31]). Ensuite, les tenseurs $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ et $\mathcal{K}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ de (9.3) caractérisent les variations de $I_{\alpha\beta}$ dues à la rotation de Faraday et à l'absorption du rayonnement respectivement. Les tenseurs $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ et $\mathcal{K}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ s'expriment à l'aide des paramètres caractéristiques des ondes « normales» capables de se propager dans le milieu considéré.

Si on néglige la dispersion spatiale, dans un milieu anisotrope peuvent se propager deux ondes « normales » qui dans le cas des cristaux uniaxiaux et de magnétoplasma sont dites ordinaire (o ou indice 2) et extraordinaire (e ou indice 1). Dans les ondes normales se propageant dans un milieu homogène, toutes les quantités (champs **E**, **D**, **H**) dépendent de t et de **R** suivant une loi exponentielle et, par exemple,

$$\mathbf{D}_{o,e} = A_{o,e}\gamma_{o,e} \exp(-\varkappa_{o,e}z) \exp[-i(\omega t - \delta_{o,e} - k_{o,e}z)]. \tag{9.5}$$

Ici de même que dans (9.3) on admet que les ondes se propagent suivant l'axe z; $\varkappa_{o,e}$ est le coefficient d'absorption en amplitude (le coefficient d'absorption en puissance $\mu_{o,e}$ vaut $2\varkappa_{o,e}$; souvent on note $\varkappa$ l'indice d'absorption $c\mu/2\omega$), $\omega = 2\pi\nu$ et $\mathbf{k}_{o,e}$ est le vecteur d'onde ($k_{o,e} = (\omega/c)\, n_{o,e}$, où $n_{o,e}$ sont les indices de réfraction). Les vecteurs complexes $\gamma_{o,e}$ caractérisent la polarisation des ondes normales ($A_{o,e}$ et $\delta_{o,e}$ sont les amplitudes et les phases arbitraires

de ces ondes). Dans un magnétoplasma on peut poser en négligeant l'absorption (c.-à-d. l'absorption étant pratiquement suffisamment faible)

$$\gamma_{\alpha o}\gamma^*_{\alpha o} = \gamma_{\alpha e}\gamma^*_{\alpha e} = 1, \quad \gamma_{\alpha o}\gamma^*_{\alpha e} = \gamma^*_{\alpha o}\gamma_{\alpha e} = 0, \tag{9.6}$$

où on somme sur $\alpha = 1, 2$ comme partout sur les indices (lettres grecques) deux fois répétés (par exemple, $\gamma_{\alpha o}\gamma_{\alpha o} = \mathrm{Sp}\ \gamma_{\alpha o}\gamma_{\beta o}$; pour plus de détails sur les ondes normales dans un magnétoplasma, cf., par exemple [45, 64] et chapitre 11).

La composante d'induction d'un champ radiant arbitraire dans l'intervalle de fréquence $\Delta\omega$ est de la forme

$$D_\alpha(z, t) = \int_{\Delta\omega} A_e\gamma_{\alpha e} \exp\{-\varkappa_e z - i(\omega t - \delta_e - k_e z)\}\, d\omega + \\ + \int_{\Delta\omega} A_o\gamma_{\alpha o} \exp(-\varkappa_o z - i(\omega t - \delta_o - k_o z)\}\, d\omega.$$

En formant à partir de telles composantes le tenseur $D_\alpha D^*_\beta$ et en calculant la dérivée $\frac{d}{dz}(D_\alpha D^*_\beta)$ on peut justement aboutir, après la mise en moyenne par rapport au temps, l'intervalle de fréquence $\Delta\omega$ étant assez étroit, à l'équation (9.3) [117] ; de plus (ne pas confondre l'indice γ avec le vecteur de polarisation γ!)

$$\mathscr{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -i(k_e - k_o)(\gamma_{\alpha e}\gamma^*_{\beta o}\gamma^*_{\gamma e}\gamma_{\delta o} - \gamma_{\alpha o}\gamma^*_{\beta e}\gamma^*_{\gamma o}\gamma_{\delta e}), \tag{9.7}$$

$$\mathscr{K}_{\alpha\beta\gamma\delta} = (\varkappa_e + \varkappa_o)(\gamma_{\alpha e}\gamma^*_{\beta o}\gamma^*_{\gamma e}\gamma_{\delta o} + \gamma_{\alpha o}\gamma^*_{\beta e}\gamma^*_{\gamma o}\gamma_{\delta e}) + \\ + 2\varkappa_e\gamma_{\alpha e}\gamma^*_{\beta e}\gamma^*_{\gamma e}\gamma_{\delta e} + 2\varkappa_o\gamma_{\alpha o}\gamma^*_{\beta o}\gamma^*_{\gamma o}\gamma_{\delta o}. \tag{9.8}$$

Si l'absorption est assez importante, les ondes normales ne peuvent pas être considérées comme orthogonales (cf. (9.6)) et les formules (9.7) et (9.8) ne sont plus exactes. Notamment, c'est le cas des particules relativistes (plasma chaud) et de plasma froid qui font des apports comparables aux fractions réelle et (ou) imaginaire anisotrope du tenseur de permittivité. L'équation de transfert (9.3) est examinée sans l'hypothèse (9.6) dans [118, 119], mais seulement dans les conditions où on peut admettre que l'influence du plasma n'est pas trop forte.

Si les ondes du milieu sont d'un seul mode (ordinaires ou extraordinaires), c.-à-d. si le tenseur $I_{\alpha\beta}$ comporte seulement des champs du type e ou du type o, alors $\mathscr{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\ I_{\gamma\delta} = 0$. Il est facile d'obtenir ce résultat par la voie formelle mais dès le début ce dernier est tout à fait évident du fait que, par définition des ondes normales dans un milieu homogène, leur polarisation est invariable. Il est tout aussi évident que pour une onde normale $\mathscr{K}_{\alpha\beta\gamma\delta}\ I_{\alpha\beta} = -2\varkappa_{e,o}\, I_{\alpha\beta}$,

en l'absence de sources de rayonnement l'équation de transfert devient

$$\frac{dI_{\alpha\beta}^{(e,\,o)}}{dz}=-2\varkappa_{e,\,o}I_{\alpha\beta}^{(e,\,o)}\equiv-\mu_{e,\,o}(\mathbf{k})\,I_{\alpha\beta}^{(e,\,o)}. \qquad (9.9)$$

La relation (9.9) est évidente dès le début puisqu'elle traduit le fait que dans les ondes normales sous l'effet de l'action exercée par l'absorption, les vecteurs du champ (en particulier, le vecteur **D**) varient suivant la loi exp $(-\varkappa_{e,o}\,z)$ (cf. (9.5)). Les grandeurs $2\varkappa_{e,\,o}=$ $=\mu_{e,\,o}(\mathbf{k})$ sont des coefficients d'absorption en puissance (intensité) le long du vecteur d'onde **k**. Si les directions des vitesses de phase et de groupe (les directions des vecteurs **k** et $\mathbf{v}_{gr}=d\omega/d\mathbf{k}$) sont les mêmes, alors, bien entendu, les grandeurs $2\varkappa_{e,\,o}$ coïncident avec les coefficients d'absorption le long des rayons $\mu_{e,\,o}$. Dans le cas général $\mu_{e,\,o}=2\varkappa_{e,\,o}\cos\varphi_{e,\,o}$, où $\varphi_{e,\,o}$ sont les angles entre $\mathbf{k}_{e,\,o}$ et $\mathbf{v}_{gr,\,e,\,o}$. Dans les conditions où on peut utiliser (9.9) ce n'est que l'intensité du rayonnement $I=I_{xx}+I_{yy}$ telle que $dI^{(e,o)}/dz=-2\varkappa_{e,\,o}I^{(e,\,o)}$, qui changera le long de **k**, c.-à-d. le long de l'axe z. Quant aux grandeurs Π, p (ou β) et χ, comme nous l'avons dit, pour les ondes normales elles restent invariables. Formellement, ceci résulte également de (9.2) et (9.9) du fait que les grandeurs Π, p et $\tilde{\chi}$ ne dépendent que des relations entre les paramètres de Stokes. Il est clair également que Π, p et $\tilde{\chi}$ restent constants aussi dans le cas où dans le milieu les sources de rayonnement ne sont que d'un seul type. Alors

$$\frac{dI^{(e,\,o)}}{dz}=\varepsilon_{e,\,o}-2\varkappa_{e,\,o}I^{(e,\,o)}\equiv\varepsilon_{e,\,o}-\mu_{e,\,o}(\mathbf{k})\,I^{(e,\,o)}. \qquad (9.10)$$

Cette équation peut être généralisée au cas d'un milieu non homogène si l'approximation de l'optique géométrique est vraie et par conséquent, si on peut appliquer la notion de rayons (l'interprétation basée sur les rayons est limitée par la condition d'une faible absorption [64]). L'équation de transfert correspondante de l'intensité $I^{(e,\,o)}$ d'ondes de même mode est de la forme

$$\frac{1}{v_{gr}}\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{k^2}{|\cos\varphi|}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{I\,|\cos\varphi|}{k^2}\right)=\varepsilon-\mu I. \qquad (9.11)$$

Cette équation tient compte de la non-stationnarité éventuelle du problème; $I=I^{(e,\,o)}$ et toutes les autres expressions se rapportent également aux ondes des modes e et o à fréquence ν; d'autre part, v_{gr} est la valeur de la vitesse de groupe; φ, l'angle entre **k** et v_{gr}; $k=(\omega/c)\,n$, la longueur du vecteur d'onde; $\mu=2\varkappa\cos\varphi$, le coefficient d'absorption le long du rayon (un élément de longueur du rayon est ∂l). Notons que si dans (9.10) la grandeur $I^{(e,\,o)}$ d'un magnétoplasma n'est pas en général proportionnelle au flux d'énergie

(cf. plus haut), (9.11), elle, traite de l'intensité au sens propre, c.-à-d. du flux d'énergie associé à l'angle solide unité.

A notre connaissance, l'équation (9.11) n'est pas généralisée au cas du rayonnement simultané de deux modes. Dans un milieu homogène et stationnaire, une telle équation généralisée se ramène, naturellement à (9.3). Assurément, cette équation est vraie aussi pour les fonctions $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ et $\mathcal{K}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ dont la variation en fonction des coordonnées est assez lente. Mais comme le montre la comparaison de (9.11) et (9.3), dans un milieu non homogène l'équation (9.3) ne peut être vraie que si on néglige la réfraction (courbure des rayons) et les dérivées dn/dz comparées aux $dI_{\alpha\beta}/dz$. De plus, l'approximation ordinaire de l'optique géométrique doit être justifiée, c.-à-d. dans un milieu, sur une longueur d'onde $\lambda = 2\pi c/n\omega$ la variation de toutes les quantités doit être faible. Par exemple, il faut observer la condition

$$\lambda \frac{d\varepsilon_{\alpha\beta}}{dz} \ll \varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Mais en général il faut respecter également la condition plus serrée

$$\lambda \left| \frac{dn_{e,\,o}}{dz} \right| \ll |n_e - n_o|.$$

Dans le calcul de la polarisation, cette inégalité en tant que condition justifiant l'approximation géométrique est typique pour le milieu faiblement anisotrope (cf. [45] et § 26 de [64]).

Dans ce qui précède on a essayé de mettre en lumière le problème de transfert d'un point de vue assez général. On a vu clairement qu'il existe des solutions complexes pour $I_{\alpha\beta}$ ou pour les paramètres de Stokes ou, en tout cas, bien lourdes et se prêtant difficilement à une révision d'ensemble. La situation se complique encore si le plasma froid est assez dense et les champs magnétiques suffisamment forts. Dans ces conditions, l'influence du plasma ne saurait déjà plus être évaluée en remplaçant la grandeur $\xi = mc^2/\mathcal{E}$ par $\eta = \sqrt{\xi^2 + \omega_p^2/\omega^2}$ (pour ce problème cf. [94, 120, 121]). Le problème présente également des traits particuliers si la distribution des électrons relativistes suivant les vitesses est anisotrope [118, 122-124]. Ensuite, même si la distribution des électrons suivant les vitesses est isotrope, le cas de la fonction $N_e(\mathcal{E})$ variant rapidement avec l'énergie impose une analyse spéciale. Toutefois, on peut admettre que la fonction $N_e(\mathcal{E})$ est suffisamment lisse et utiliser les expressions ci-dessous du coefficient d'absorption si $N_e(\mathcal{E})$ change peu dans l'intervalle d'énergies $\Delta\mathcal{E}$ associé au rayonnement des harmoniques de fréquence voisins

$$\Omega_H = \frac{\omega_H^*}{\sin^2\chi} = \frac{eH}{mc}\,\frac{mc^2}{\mathcal{E}\sin^2\chi}.$$

La fréquence émise est $\omega = n\Omega_H$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) et par conséquent,

$$|\Delta\omega| = n\frac{eH}{mc}\frac{mc^2}{\mathscr{E}\sin^2\chi}\frac{\Delta\mathscr{E}}{\mathscr{E}} \sim \Omega_H$$

pour

$$\Delta\mathscr{E} \sim \frac{\mathscr{E}}{n} = \frac{\Omega_H\mathscr{E}}{\omega} = \frac{eH}{mc\sin^2\chi}mc^2 = \frac{eH\lambda}{2\pi\sin^2\chi},$$

où $\lambda = 2\pi c/\omega$ est la longueur d'onde (on examine le rayonnement dans le vide). La condition susmentionnée de variation régulière de la fonction $N_e(\mathscr{E})$ est donc de la forme

$$\frac{dN_e}{d\mathscr{E}}\Delta\mathscr{E} \sim \frac{dN_e}{d\mathscr{E}}\frac{eH}{mc\omega\sin^2\chi}mc^2 = \frac{dN_e}{d\mathscr{E}}\frac{eH\lambda}{2\pi\sin^2\chi} \ll N_e. \tag{9.12}$$

Cette condition est nécessaire pour $\chi \approx {}^1/_2\pi$, alors que pour $\chi < {}^1/_2\pi$ elle est suffisante mais non pas nécessaire du fait que Ω_H dépend de χ (pour plus de détails, cf. [31b]).

Pour la plupart des cas qui se présentent dans l'astrophysique il est peu probable que la condition (9.12) puisse être violée (même dans la gamme des ondes métriques, l'intervalle d'énergies $\Delta\mathscr{E} = \frac{eH}{2\pi}\lambda_0$ est inférieur ou de l'ordre de 10^5 H eV et ne peut être assez grand que dans les domaines de champ fort où $H \gg 1$ Oe).

La discussion de l'ensemble des questions soulevées demanderait au moins un tour d'horizon spécial. De plus, toute une série de problèmes qui s'y rapportent ne sont pas encore étudiés. Aussi dans ce qui suit allons-nous nous borner seulement à la discussion de deux problèmes plus spéciaux de la réabsorption du rayonnement synchrotron dans le vide et dans le plasma dans le cas d'une propagation quasi longitudinale. Or, ce sont probablement les cas les plus importants pour la radioastronomie. Avant d'aborder les calculs correspondants, il serait peut-être utile de faire quelques remarques sur la méthode des coefficients d'Einstein et son application au rayonnement polarisé.

L'étude de l'équation de transfert (9.3) et d'autres équations analogues de l'intensité des ondes normales ou des paramètres de Stokes impose le calcul des coefficients $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\mathscr{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\mathscr{K}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ de (9.3), des coefficients $\varepsilon_{e,o}$ et $\mu_{e,o} = 2\varkappa_{e,o}$ de (9.10), etc. Pour chercher le pouvoir émissif $\varepsilon_{\alpha\beta}$, il faut s'appuyer sur la formule (9.4). Dans le cas général, les autres quantités peuvent être calculées par la méthode de l'équation cinétique [118, 123, 124]; s'il s'agit du domaine classique (condition $\hbar\omega \ll \mathscr{E}$), il faut appliquer l'équation cinétique relativiste classique. Les calculs correspondants sont assez lourds. Tant pour cette raison qu'en vertu de la tendance naturelle d'obtenir des résultats par le mode le plus simple et le plus clair, un grand rôle dans l'analyse de la réabsorption revient

à la méthode des coefficients d'Einstein. Cette méthode est en général bien connue, mais son application au cas d'un milieu, et surtout d'un milieu anisotrope, ainsi qu'à l'évaluation de la polarisation d'un rayonnement présente certains traits particuliers (cf. § 27 de [45], § 12 de [64], [81]).

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 6 (cf. également chapitre 12) nous pouvons admettre que dans un milieu de faible absorption (formellement transparent) l'énergie des quanta des ondes normales est $\hbar\omega$ et leur impulsion $\hbar\mathbf{k}_l = (\hbar\omega/c)\, n_l\,(\omega, \mathbf{s})\,\mathbf{s}$, où $\mathbf{k}_l = k_l\mathbf{s}$, $|\,\mathbf{s}_l\,| = 1$ et où l'indice inférieur l correspond à l'onde donnée (pour un magnétoplasma ceci concerne les ondes ordinaires, extraordinaires et de plasma). Dans le domaine classique, le résultat des calculs ne dépend pas de la constante de Planck $\hbar = h/2\pi$, mais on n'a aucune raison pour infirmer l'utilisation des notions quantiques si elles sont commodes. Le flux d'énergie et la densité d'énergie dans les ondes du mode l valent $I_l d\omega\, d\Omega$ et $\rho_l\, d\omega\, d\Omega$, où $d\Omega$ est un élément de l'angle solide et par commodité nous utilisons provisoirement les densités spectrales se rapportant à l'intervalle $d\omega = 2\pi d\theta$. On a également

$$I_l = \rho_l v_{\mathrm{gr},\,l} = \rho_l \left|\frac{d\omega}{d\mathbf{k}_l}\right| = \rho_l \frac{c}{|\cos\varphi_l| \left|\frac{\partial(\omega n_l)}{\partial\omega}\right|} \tag{9.13}$$

($\mathbf{v}_{\mathrm{gr},\,l} = d\omega/d\mathbf{k}_l$ est la vitesse de groupe des ondes du mode l).

Introduisons les coefficients d'Einstein A_m^n, B_m^n et B_n^m, $A_m^n\, d\omega\, d\Omega$ étant la probabilité du rayonnement spontané par unité de temps lors de la transition entre les états $m \to n$ avec émission d'un quantum d'onde normale donnée dans les intervalles $d\omega$ et $d\Omega$; $B_m^n\rho\, d\omega\, d\Omega$ étant la probabilité de cette même transition induite, et $B_n^m\rho\, d\omega\, d\Omega$, la probabilité de l'absorption du quantum lors de la transition $n \to m$. Les coefficients A_m^n, B_m^n et B_n^m sont associés par les relations

$$B_m^n = B_n^m\,; \quad B_m^n = \frac{(2\pi c)^3}{n_l^2 \hbar\omega^3 \left|\frac{\partial(\omega n_l)}{\partial\omega}\right|} A_m^n. \tag{9.14}$$

On en déduit la relation ordinaire pour le vide (cf., par exemple, [1])

$$B_m^n = \frac{(2\pi c)^3}{\hbar\omega^3} A_m^n = \frac{2\pi c^3}{h\nu^3} A_m^n. \tag{9.15}$$

Dans ces conditions, par n et m on entend deux états quelconques dans l'espace d'impulsion, tels que la différence des énergies soit $\mathscr{E}_m - \mathscr{E}_n = \hbar\omega = h\nu$. S'il s'agissait de la transition entre les niveaux énergétiques, il faudrait tenir compte de leur poids statistique. D'après le sens, la relation (9.15) se rapporte aux ondes à polarisation unique. Si la probabilité de la transition induite dans le

vide est définie comme $\widetilde{B}^n_m I_\nu \, d\nu \, d\Omega$ (c'est le fait de [38], par exemple), alors $\widetilde{B}^n_m = (c^2/h\nu^3) \, \widetilde{A}^n_m$, où $\widetilde{A}^n_m \, d\nu \, d\Omega = 2\pi A^n_m \, d\nu \, d\Omega$ est la probabilité de l'émission spontanée dans les intervalles $d\nu$ et $d\Omega$. Enfin, si par $\widetilde{A}^n_m \, d\nu \, d\Omega$ on entend la probabilité de l'émission des ondes à deux polarisations possibles, on peut utiliser la liaison $\widetilde{B}^n_m = (c^2/2h\nu^3) \, \widetilde{A}^n_m$ appliquée justement dans [38]. Mais c'est ce qui fait précisément que les expressions correspondantes ne sont pas suffisamment complètes et bien définies. Premièrement, le passage décrit au rayonnement non polarisé n'est pas argumenté, bien qu'il se puisse que de cette façon on obtient la moyenne de μ pour les deux polarisations éventuelles. Deuxièmement, dans le vide ou dans un milieu isotrope on observe la dégénérescence de la polarisation (choix possible des ondes normales de polarisation quelconque); il en résulte que les relations de polarisation ne peuvent s'obtenir que par une analyse supplémentaire.

Notons N_n et N_m les concentrations d'électrons aux états n et m d'énergies $\mathscr{E}_n$ et $\mathscr{E}_m$ telles que $\mathscr{E}_m - \mathscr{E}_n = \hbar\omega \equiv h\nu$. Alors, en vertu de (9.14), le coefficient d'absorption μ_l le long du rayon pour une onde de mode l est

$$\mu_l = -\frac{\Delta I_l}{I_l} = \frac{\hbar\omega \sum (N_n B^m_n \rho_l - N_m B^n_m \rho_l)}{\rho_l} \left| \frac{d\omega}{d\mathbf{k}_l} \right|^{-1} = \frac{8\pi^3 c^2}{\omega^2 n_l^2} |\cos\varphi_l| \sum_{m \rightleftarrows n} A^n_m (N_n - N_m). \quad (9.16)$$

Pour simplifier, admettons tout de suite que $|n_l - 1| \ll 1$ et $|\cos\varphi_l| \approx 1$. Poursuivons en examinant le cas ultra-relativiste (rayonnement directionnel émis seulement dans le sens de la vitesse de la particule) et en admettant que la fonction de distribution est isotrope; on peut alors poser

$$N_n - N_m = N_e(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}) - N_e(\mathbf{p}) = N_e\left(p - \frac{h\nu}{c}\right) - N_e(p) = -\left(\frac{h\nu}{c}\right) \frac{dN_e}{dp}.$$

Ici on a tenu compte que dans le cas classique considéré $h\nu \ll cp \approx \mathscr{E}$. Enfin, le pouvoir émissif dans l'intervalle $d\nu$ est $\varepsilon_l = \sum \widetilde{A}^n_m N_m h\nu = \sum 2\pi A^n_m N_m h\nu$, et ne serait-ce que de la comparaison avec (9.4) il devient clair que dans (9.16) $A^n_m = \widetilde{A}^n_m/2\pi$ doit être remplacé par $(R^2/2\pi h\nu) \, p_l(\nu, \mathscr{E})$, où $p_l(\nu, \mathscr{E})$ est la fonction de la forme $p_{\alpha\beta}(\nu)$ de (5.26), (5.27), mais associée aux ondes du mode l. Nous allons préciser plus loin ce que cela signifie. Pour le moment nous ne don-

nerons sous les hypothèses avancées que l'expression finale de μ_l

$$\mu_l = -\frac{c}{\nu^2}\int \frac{dN_e(p)}{dp} q_l(\nu, \mathcal{E})\, p^2\, dp = \\ = -\frac{c^2}{4\pi\nu^2}\int \mathcal{E}^2 \frac{d}{d\mathcal{E}}\left(\frac{N_e(\mathcal{E})}{\mathcal{E}^2}\right) q_l(\nu, \mathcal{E})\, d\mathcal{E}, \quad (9.17)$$

$$q_l(\nu, \mathcal{E}) = \int R^2 p_l(\nu, \mathcal{E})\, d\Omega \quad (9.18)$$

et utiliserons les égalités $\mathcal{E} = cp$ et $N_e(p) 4\pi p^2 dp = N_e(\mathcal{E})\, d\mathcal{E}$; par ailleurs, il faut expliquer que pour remplacer dans (9.16) la sommation par l'intégration, un élément de volume de phase doit valoir $p^2 dp\, d\Omega$, de plus, $d\Omega$ est l'élément de l'angle solide où se produit le rayonnement spontané (par hypothèse l'angle entre **p** et **k** est petit). D'après (9.17), (9.18), le calcul de μ_l consiste à préciser le sens de la quantité $p_l(\nu, \mathcal{E})$ ou $q_l(\nu, \mathcal{E})$. Dans un milieu anisotrope cette procédure est parfaitement claire, puisque q_l est la densité spectrale de la puissance rayonnée par un électron sous la forme d'ondes normales du mode l. Mais pour calculer le coefficient de réabsorption μ_l du vide ou d'un milieu isotrope où l'on observe la dégénérescence de polarisation, il faut établir quelles ondes doivent être considérées comme normales.

Il est vrai qu'à première vue il peut sembler que le résultat des calculs ne doive pas dépendre du choix de la polarisation des ondes normales, du fait que cette indépendance définit précisément la dégénérescence de la polarisation. Ceci a certainement lieu si l'application de la méthode de l'équation cinétique aux calculs est conséquente : un choix défini de la polarisation des ondes normales dans le cas du vide, et en principe, l'utilisation elle-même des ondes normales dans un milieu quelconque ne sont pas obligatoires. Mais dans la méthode des coefficients d'Einstein on fait appel seulement aux probabilités (intensités) et non aux amplitudes de probabilité (champs). Aussi, la cohérence des ondes normales différentes, qui a lieu en général dans le cas de dégénérescence, ne peut pas être prise en considération dans la méthode des coefficients d'Einstein. Autrement dit, d'après le sens même de cette méthode, son utilisation est associée au choix du mode des ondes pour lesquelles on calcule le coefficient d'absorption.

Pour le vide « pur » il est certes difficile de bien définir les ondes normales. Mais alors la question de « réabsorption » ne se pose pas non plus. Or, si on parle de « réabsorption dans le vide », on envisage seulement le moyen de négliger l'influence exercée par le plasma froid sur le rayonnement et la réabsorption. Quant au plasma relativiste, d'après le sens même du problème de réabsorption, il influe dans une source sur l'absorption des ondes. Il doit intervenir également d'une autre façon sur l'indice de réfraction, le milieu étant anisotrope. Ceci est évident puisqu'il s'agit des particules relati-

vistes (plasma) placées dans un champ magnétique, et de ce fait il existe dans le système une direction physiquement privilégiée qui est la direction du champ. Comme nous l'avons montré au chapitre 5, si la fonction de distribution des particules ultra-relativistes n'est pas nettement anisotrope, leur émission est alors polarisée linéairement; de plus, dans les ondes, le vecteur électrique est maximal dans la direction perpendiculaire à la projection $\mathbf{H}_\perp$ du vecteur $\mathbf{H}$ sur le tableau (nous dirons plus loin, pour abréger que ces ondes sont polarisées perpendiculairement au champ, alors que pour les ondes de vecteur $\mathbf{E}$ parallèle à $\mathbf{H}_\perp$, nous dirons qu'elles sont polarisées suivant le champ). Dans ces conditions il est naturel de s'attendre que la polarisation des ondes normales suive également le champ ou lui soit perpendiculaire, rappelons que nous nous bornons aux angles $\chi \gg mc^2/\mathcal{E}$, c.-à-d. nous n'examinons pas le rayonnement des particules dont l'angle $\chi \lesssim mc^2/\mathcal{E}$ que la direction de la vitesse fait avec la direction du champ est petit; dans le cas concerné, la polarisation linéaire n'a également lieu qu'à la condition $\chi \gg mc^2/\mathcal{E}$. Le calcul quantitatif confirme cette hypothèse [119]. Ainsi, en appliquant les formules (9.17), (9.18) au calcul des coefficients de réabsorption du rayonnement synchrotron des particules ultra-relativistes dans le vide, il faut calculer les coefficients $\mu_\perp$ et $\mu_{\parallel}$ aussi bien pour le cas de la polarisation transversale au champ que pour celui de la polarisation suivant le champ (autrement dit, l'indice l est remplacé par $\perp$ ou $\parallel$). De plus, tout ce qui précède rend clair que dans (9.18) il faut choisir comme $p_\perp(\nu, \mathcal{E})$ et $p_{\parallel}(\nu, \mathcal{E})$ les expressions (5.34) multipliées par $2\pi \sin\chi$. Par conséquent

$$\left.\begin{aligned} q_\perp(\nu, \mathcal{E}) &= \frac{\sqrt{3}\, e^2\omega_H^* \sin\chi}{2c\eta}\,\frac{\nu}{\nu_c}\left[\int\limits_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(z)\,dz + K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\right],\\ q_{\parallel}(\nu, \mathcal{E}) &= \frac{\sqrt{3}\, e^2\omega_H^* \sin\chi}{2c\eta}\,\frac{\nu}{\nu_c}\left[\int\limits_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(z)\,dz - K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\right], \end{aligned}\right\} \quad (9.19)$$

$$\left.\begin{aligned} \nu_c &= \frac{3\sin\chi}{4\pi}\,\frac{\omega_H^*}{\eta^3}, \quad \omega_H^* = \frac{eH}{mc}\,\frac{mc^2}{\mathcal{E}},\\ \eta &= \sqrt{\left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}. \end{aligned}\right\} \quad (9.20)$$

Ici nous donnons par commodité les expressions qui sont également vraies en présence d'un plasma isotrope $n = 1 - \omega_p^2/2\omega^2$, $|1 - n| \ll \ll 1$, bien que plus loin dans ce chapitre nous poserons $\eta = \xi = = mc^2/\mathcal{E}$. Dans le cas ultra-relativiste considéré à distribution isotrope ou (faiblement anistrope) des particules émettrices suivant les directions de leur vitesse, les particules ne rayonnent pas des ondes à polarisation elliptique (aux termes d'ordre $\eta =$

$= \sqrt{(mc^2/\mathscr{E}^2) + (\omega_p^2/\omega^2)}$ près). Cette circonstance fait que l'analyse du rayonnement propre de la source peut se borner aux paramètres de Stokes I et Q ou aux intensités $I_\perp = {}^1/_2\,(I + Q)$ et $I_{\parallel} = {}^1/_2\,(I - Q)$. La densité spectrale de l'intensité du rayonnement total est égale à

$$q(\nu, \mathscr{E}) = q_\perp + q_{\parallel} = p(\nu, \mathscr{E}) = \frac{\sqrt{3}\,e^2\omega_H^* \sin\chi}{c\eta}\,\frac{\nu}{\nu_c}\int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(z)\,dz. \quad (9.21)$$

Dans le vide,

$$p(\nu, \mathscr{E}) = \frac{\sqrt{3}\,e^3 H_\perp}{mc^2}\,\frac{\nu}{\nu_c}\int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(z)\,dz, \quad (9.22)$$

ce qui coïncide avec (5.33).

Introduisons les notations

$$\mu_\perp(\chi) = \mu(\chi) + \lambda(\chi), \qquad \mu_{\parallel} = \mu(\chi) - \lambda(\chi). \quad (9.23)$$

L'expression $\mu(\chi) = {}^1/_2\,(\mu_\perp + \mu_{\parallel})$ coïncide exactement avec l'expression qu'on obtient si on utilise simultanément la liaison mentionnée $\widetilde{B}_m^n = (c^2/2h\nu^3)\,\widetilde{A}_m^n$ pour les ondes des deux polarisations (cf., par exemple, [38]). Ce résultat est naturel, puisque $\mu(\chi)$ est la moyenne arithmétique de $\mu_\perp$ et $\mu_{\parallel}$. Pour le spectre puissance $N_e(\mathscr{E}) = K_e\,\mathscr{E}^{-\gamma}$ on a [31a]

$$\mu(\chi) = \frac{\gamma + {}^{10}/_3}{\gamma + 2}\,\lambda(\chi) = g(\gamma)\,\frac{e^3}{2\pi m}\left(\frac{3e}{2\pi m^3 c^5}\right)^{1/2\gamma} K_e H^{1/2(\gamma+2)}\nu^{-1/2(\gamma+4)}. \quad (9.24)$$

Le tableau 9.1 ne donne que les valeurs numériques de $g(\gamma)$ (pour la formule de $g(\gamma)$ cf. [38]).

Tableau 9.1

γ	1	2	3	4	5
$g(\gamma)$	0,96	0,70	0,65	0,69	0,83
$\overline{g(\gamma)}$	0,69	0,47	0,40	0,44	0,46

Si on ne tient pas compte de la réabsorption pour le cas du spectre puissance des électrons (cf. (5.46)) le degré de polarisation du rayonnement synchrotron dans le vide est

$$\Pi_0 = \frac{I_\perp^{(0)} - I_{\parallel}^{(0)}}{I_\perp^{(0)} + I_{\parallel}^{(0)}} = \frac{\gamma + 1}{\gamma + 7/3}, \quad \frac{I_\perp^{(0)}}{I_{\parallel}^{(0)}} = \frac{1 + \Pi_0}{1 - \Pi_0} = \frac{3\gamma + 5}{2}. \quad (9.25)$$

Par ailleurs, d'après (9.23) et (9.24)

$$\left.\begin{array}{c}\mu_\perp = \mu+\lambda=\frac{6\gamma+16}{3\gamma+10}\mu, \quad \mu_\parallel=\mu-\lambda=\frac{4}{3\gamma+10}\mu \\ \frac{\mu_\parallel}{\mu_\perp}=\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}=\frac{2}{3\gamma+8}.\end{array}\right\} \qquad (9.26)$$

Dans le cas discuté les équations de transfert du type (9.10) sont évidemment de la forme

$$\frac{dI_{\perp,\parallel}}{dz}=\varepsilon_{\perp,\parallel}-\mu_{\perp,\parallel}I_{\perp,\parallel}, \qquad (9.27)$$

où

$$\varepsilon_{\perp,\parallel}(\nu)=\int q_{\perp,\parallel}(\nu,\ \mathscr{E})\,N_e(\mathscr{E})\,d\mathscr{E}. \qquad (9.28)$$

Le pouvoir émissif (9.28) du spectre puissance se calcule aisément en utilisant les expressions (9.19) et (5.42). Bornons-nous ici à la remarque que, comme il résulte de (9.25), en l'absence de réabsorption on a pour le rayonnement propre d'une source homogène de dimension L

$$I^{(0)}_{\perp,\parallel}=\varepsilon_{\perp,\parallel}L, \quad \frac{I^{(0)}_\perp}{I^{(0)}_\parallel}=\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}=\frac{3\gamma+5}{2}. \qquad (9.29)$$

Si l'on tient compte de la réabsorption, on obtient en intégrant les équations (9.27) sous la condition qu'à l'entrée de la couche (pour $z=0$) $I_{\perp,\parallel}=0$

$$I_\perp=\frac{\varepsilon_\perp}{\mu_\perp}(1-\exp(-\mu_\perp z)), \quad I_\parallel=\frac{\varepsilon_\parallel}{\mu_\parallel}(1-\exp(-\mu_\parallel z)). \qquad (9.30)$$

Pour une couche mince (source de dimension L) $\mu_{\perp,\parallel}L \ll 1$ et

$$\frac{I_\perp}{I_\parallel}=\frac{I^{(0)}_\perp}{I^{(0)}_\parallel}=\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}=\frac{3\gamma+5}{2}, \quad \Pi=\frac{I_\perp-I_\parallel}{I_\perp+I_\parallel}=\Pi_0=\frac{\gamma+1}{\gamma+7/3}. \qquad (9.31)$$

Pour une couche épaisse $\mu_{\perp,\parallel}L \gg 1$ et

$$\frac{I_\perp}{I_\parallel}=\frac{\varepsilon_\perp\mu_\parallel}{\varepsilon_\parallel\mu_\perp}=\frac{3\gamma+5}{3\gamma+8}<1, \quad \Pi=\left|\frac{I_\perp-I_\parallel}{I_\perp+I_\parallel}\right|=\frac{3}{6\gamma+13}. \qquad (9.32)$$

Assurément, celles des expressions (9.31), (9.32) qui ne contiennent pas l'exposant γ ont une valeur générale n'étant pas associées au seul spectre puissance. Rappelons qu'en utilisant le spectre puissance on adopte dans les calcules que $\gamma > 1/3$ (cf. chapitre 5).

Supposons que sur le rayon visuel, le champ magnétique est en moyenne chaotique suivant les directions. Supposons ensuite qu'en

se propageant dans un tel champ, les ondes ne changent pas de polarisation avec le changement de la direction du champ (ceci a lieu si l'approximation de l'optique géométrique est inapplicable pour la description de la polarisation des ondes normales, la condition du type $\lambda \left| \frac{dn_{e,o}}{dz} \right| \ll |n_e - n_o|$, mentionnée plus haut n'étant pas remplie; pour plus de détails, cf. § 24 de [45]). Dans de tels cas, les ondes se propageant dans un champ chaotique, l'anisotropie de l'absorption disparaît et les ondes de polarisation quelconque sont absorbées de la même façon avec le coefficient d'absorption μ. Pour l'angle χ donné, le coefficient d'absorption moyen vaut

$$1/2\,(\mu_\perp + \mu_{\parallel}) = \mu\,(\chi).$$

Pour obtenir $\bar{\mu}$, c.-à-d. la valeur moyenne de $\mu\,(\chi)$ suivant les angles χ entre le champ **H** et le rayon visuel (la vitesse des électrons émetteurs), il est naturel de calculer l'expression

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mu} &= 1/2 \int_0^\pi \mu\,(\chi) \sin\chi\, d\chi = \\ &= \overline{\overline{g\,(\gamma)}}\, \frac{e^3}{2\pi m} \left(\frac{3e}{2\pi m^3 c^5} \right)^{1/2\gamma} K_e H^{1/2(\gamma+2)} \nu^{-1/2(\gamma+4)}, \\ \overline{g\,(\gamma)} &= \frac{\sqrt{3\pi}}{8} \frac{\Gamma\,(1/4\,(\gamma+6))}{\Gamma\,(1/2\,(\gamma+8))}\, \Gamma\left(\frac{3\gamma+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+22}{12}\right). \end{aligned}\right\} \quad (9.33)$$

[31a] montre que l'expression (9.33) dont la déduction ci-dessus n'a pas été rigoureuse représente effectivement le coefficient de réabsorption d'un champ chaotique. Les valeurs numériques de la fonction $\overline{g\,(\gamma)}$ sont consignées sur le tableau 9.1. Pour la commodité nous donnons également l'expression suivante

$$\bar{\mu} = \overline{g\,(\gamma)} \cdot 0{,}019\,(3{,}5 \cdot 10^9)^\gamma K_e H^{1/2(\gamma+2)} \nu^{-1/2(\gamma+4)}\ \text{cm}^{-1}. \quad (9.34)$$

La réabsorption dans un champ inhomogène est décrite dans [126]. La formule de μ pour le cas du spectre monoénergétique des électrons est donnée plus loin (cf. (9.47)).

Une question se pose naturellement sur l'application de ces formules dans le sens de la possibilité de négliger l'influence du plasma froid (concentration électronique N). Pour autoriser une négligence de cette sorte il faut, premièrement, que le plasma froid n'intervienne pas sur le rayonnement des électrons relativistes. On est donc amené à la condition (cf. (6.75) et plus loin dans ce chapitre)

$$\nu \gg \frac{4ecN}{3H_\perp} = \frac{4\omega_p^2}{3\pi\omega_H \sin\chi} \approx 20\,\frac{N}{H_\perp} = 20\,\frac{N}{H \sin\chi}. \quad (9.35)$$

Deuxièmement, la rotation du plan de polarisation par le plasma froid doit être faible, ce qui conduit à la condition (cf., par exemple, [38] *)

$$\nu \gg 10^2 \sqrt{NHL \cos \chi}. \tag{9.36}$$

Cette condition est inutile, certes, si la polarisation des ondes normales est définie par les particules relativistes (ceci a lieu si l'on respecte l'inégalité inverse à (9.41)). Troisièmement, les ondes normales sont polarisées linéairement seulement si l'on observe cette même inégalité inverse à (9.41). Ces trois conditions suffisent pour négliger totalement l'action du plasma. Mais dans tels ou tels cas, cette négligence est possible même sous des conditions moins restrictives.

Lorsque le domaine émetteur contient un plasma froid, il faut évaluer l'action de ce dernier, premièrement, sur le rayonnement, et deuxièmement, sur la propagation des ondes. En calculant l'émission sous les conditions

$$\left.\begin{aligned} \omega \gg \omega_H = \frac{eH}{mc} = 1{,}76 \cdot 10^7 H, \\ \omega \gg \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}} = 5{,}64 \cdot 10^4 \sqrt{N} \end{aligned}\right\} \tag{9.37}$$

on peut admettre en général que le plasma soit isotrope; de plus

$$n_e = n_o = n = 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}, \quad |1 - n| \ll 1. \tag{9.38}$$

Dans ce cas l'influence exercée par le plasma est déjà traduite, par exemple, par les formules (9.19)-(9.21).

Pour ce qui est de la propagation des ondes, les conditions (9.37) ne suffisent assurément pas pour autoriser la négligence de l'anisotropie. Toutefois, si ces inégalités sont observées, une simplification notable peut être obtenue si on admet que dans la plupart des cas la propagation des ondes soit quasi longitudinale; par ailleurs **)

$$\left.\begin{aligned} n_e = 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega - \omega_L)}, \quad n_o = 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega + \omega_L)}, \\ n_e - n_o = \frac{\omega_p^2 \omega_L}{\omega^3}, \quad \omega_L = \omega_H \cos \chi. \end{aligned}\right\} \tag{9.39}$$

*) Puisqu'ici et dans ce qui suit il s'agit du rayonnement synchrotron, l'angle α entre **H** et **k** est égalisé à l'angle χ entre **H** et la vitesse **v** de l'électron.

**) Pour plus de détails sur toutes les conditions et formules de n_e et n_o, cf. [64].

Nous avons supposé ici que $|n_{e,o} - 1| \ll 1$. Les ondes e et o sont toutes les deux polarisées circulairement, les sens de rotation des vecteurs du champ étant opposés; pour l'onde extraordinaire, ces vecteurs tournent dans le même sens qu'un électron dans un champ magnétique. Voici les restrictions d'application de l'approximation quasi longitudinale (9.39) dans les conditions qui nous intéressent :

$$\frac{\omega_H^2 \sin^4 \chi}{4\omega^2 \cos^2 \chi} \ll 1, \quad \frac{\omega_H^2}{2\omega^2} \sin^2 \chi \ll 1. \tag{9.40}$$

On voit sans peine que dans la radioastronomie, les formules (9.39) sont pratiquement toujours applicables si l'action exercée par les particules relativistes sur l'indice de réfraction est faible par rapport à celle du plasma froid évaluée par (9.39).

L'intervention des particules relativistes donne [119, 122]

$$|n-1| \sim \frac{c}{2\omega} \mu(\chi) = \frac{\lambda}{4\pi} \mu(\chi),$$

où $\mu(\chi)$ est le coefficient de réabsorption (9.24) ou (9.33), (9.34). Par conséquent, si $(n_o - n_e) \gg c\mu/2\omega$, en calculant n on peut négliger l'influence des particules relativistes; il vient

$$N_e \gg mc^2 \left(\frac{3e}{2\pi m^3 c^5}\right)^{1/2\gamma} \frac{(\sin\chi)^{1/2(\gamma+2)}}{\cos\chi} K_e H^{1/2\gamma} \nu^{-1/2\gamma} \sim$$

$$\sim 10^{-6} (3{,}5 \cdot 10^9)^{\gamma} \frac{(\sin\chi)^{1/2(\gamma+2)}}{\cos\chi_1} K_e H^{1/2\gamma} \nu^{-1/2\gamma} \ \mathrm{cm}^{-3}. \tag{9.41}$$

Si les formules (9.39) sont applicables, le problème de transfert du rayonnement devient bien plus simple. Dans ces conditions, la forme des tenseurs $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ et $\mathcal{K}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est très simple et telle qu'en passant aux paramètres de Stokes l'équation (9.3) s'écrit

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dI}{dz} &= \varepsilon_I - 1/2\,(\mu_e + \mu_o)\, I + 1/2\,(\mu_e - \mu_o)\, V, \\
\frac{dV}{dz} &= \varepsilon_V - 1/2\,(\mu_e + \mu_o)\, V + 1/2\,(\mu_e - \mu_o)\, I, \\
\frac{dQ}{dz} &= \varepsilon_Q - 1/2\,(\mu_e + \mu_o)\, Q + (k_e - k_o)\, U, \\
\frac{dU}{dz} &= \varepsilon_U - 1/2\,(\mu_e + \mu_o)\, U - (k_e - k_o)\, Q.
\end{aligned}\right\} \tag{9.42}$$

Ici $k_{e,o} = (\omega/c)\, n_{e,o}$ et $\varepsilon_{I,V,Q,U}$ sont les combinaisons de $\varepsilon_{\alpha\beta}$ associées au passage du tenseur $I_{\alpha\beta}$ aux paramètres de Stokes (cf. (9.1); par exemple, $\varepsilon_I = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$). L'effet Faraday est défini par la

différence $n_e - n_o = (c/\omega)(k_e - k_o)$ et n'intervient pas sur les équations de l'intensité I et la polarisation circulaire $\Pi_c = V/I$, mais influe sur le degré de polarisation linéaire $\Pi_l = \sqrt{Q^2 + U^2}/I$ et l'orientation de l'ellipse $\tilde{\chi}$ (rappelons que tg $2\tilde{\chi} = U/Q$). Il est commode d'introduire les intensités des rayonnements extraordinaire et ordinaire

$$I_e = {}^1/_2\,(I - V), \quad I_o = {}^1/_2\,(I + V). \tag{9.43}$$

D'après (9.42) et (9.43) on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dI_{e,o}}{dz} = \varepsilon_{e,o} - \mu_{e,o} I_{e,o}, \\ &\varepsilon_e = 1/2\,(\varepsilon_I - \varepsilon_V), \quad \varepsilon_o = 1/2\,(\varepsilon_I + \varepsilon_V). \end{aligned}\right\} \tag{9.44}$$

Le résultat (9.44) pouvait être prévu dès le début: dans le milieu linéaire considéré l'intensité (flux d'énergie) de chacune des ondes normales ne dépend pas de l'intensité d'une autre onde. Cette dernière conclusion concerne toutes les ondes normales, mais si leur polarisation est arbitraire (elliptique), l'expression des intensités I_e et I_o à travers les paramètres de Stokes est compliquée et il n'est pas clair quel avantage peut présenter leur utilisation. D'ailleurs, dans le cas de la propagation quasi longitudinale aussi, pour obtenir une caractéristique complète du rayonnement il faut utiliser tous les quatre paramètres de Stokes (pour la résolution des équations (9.42) cf. [117]).

Cependant, dans ce qui suit nous ne nous bornerons qu'à la discussion de la question sur la variation de l'intensité des ondes e et o, c.-à-d. nous nous guiderons sur les équations (9.44). En présence des ondes d'un seul mode la polarisation est donnée et le rayonnement est complètement décrit par l'équation (9.44). Cette situation est celle, par exemple, de la réabsorption négative d'une couche suffisamment épaisse. En effet, dans le cas de réabsorption négative, lorsque les ondes traversent une couche, leur intensité croît exponentiellement en fonction de l'épaisseur de la couche. C'est pourquoi à la sortie d'une couche épaisse, le rayonnement qui prédomine est celui qui se compose d'ondes normales dont le coefficient de réabsorption μ est plus grand en valeur absolue.

Comme nous l'avons dit, l'influence exercée par le plasma sur le rayonnement est évaluée dans les conditions (9.37) par les formules (9.19)-(9.21). De plus, la moitié de la puissance totale du rayonnement $q(\nu, \mathscr{E}) \equiv p(\nu, \mathscr{E})$ définie par la formule (9.21) « passe », aux termes d'ordre $mc^2/\mathscr{E}$ près, dans chaque onde normale polarisée

circulairement. Ainsi $q_{e,o} = {}^1/_2 p(\nu, \mathscr{E})$ et d'après (9.17) on a

$$\left.\begin{aligned} \mu_e = \mu_o &= -\frac{c^2}{8\pi\nu^2}\int\limits_0^\infty \mathscr{E}^2 \frac{d}{d\mathscr{E}}\left(\frac{N_e(\mathscr{E})}{\mathscr{E}^2}\right) p(\nu, \mathscr{E})\, d\mathscr{E} = \\ &= \frac{c^2}{8\pi\nu^2}\int\limits_0^\infty \frac{N_e(\mathscr{E})}{\mathscr{E}^2}\frac{d}{d\mathscr{E}}\{\mathscr{E}^2 p(\nu, \mathscr{E})\}\, d\mathscr{E}, \\ p(\nu, \mathscr{E}) &= \sqrt{3}\,\frac{e^3 H_\perp}{mc^2}\left[1 + \frac{\nu_p^2}{\nu^2}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2\right]^{-1/2} \frac{\nu}{\nu_c}\int\limits_{\nu/\nu_c}^\infty K_{5/3}(z)\, dz, \\ \nu_c &= \frac{3eH_\perp}{4\pi mc}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2\left[1 + \frac{\nu_p^2}{\nu^2}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2\right]^{-3/2}. \\ \frac{\nu_p^2}{\nu^2} &= 1 - n^2, \quad \nu_p^2 = \frac{\omega_p^2}{4\pi^2} = \frac{e^2 N}{\pi m}. \end{aligned}\right\} \quad (9.45)$$

Pour mieux comprendre ces formules et les comparer aux autres expressions, notons que

$$1 + \frac{\nu_p^2}{\nu^2}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 = \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2\left(\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) =$$
$$= \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 \eta^2 \approx \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2\left(1 - n^2\frac{v^2}{c^2}\right).$$

(9.45) rend clair que sous la condition

$$\frac{\nu_p^2}{\nu^2}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 \ll 1 \qquad (9.46a)$$

l'influence du plasma sur le rayonnement synchrotron et sa réabsorption est peu importante. Cette condition conduit (cf. (6.74)) à l'inégalité susmentionnée (9.35). Dans le domaine (9.46a) l'expression sous le signe d'intégration de (9.45) relative à $\mu_{e,o}$ est toujours positive; il s'ensuit que $\mu_{e,o} > 0$. Puisque la condition (9.46a) est toujours remplie, dans le vide μ est toujours positif *). Mais si

$$\frac{\nu_p^2}{\nu^2}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 \gg 1, \qquad (9.46b)$$

alors, l'action du plasma est déterminante; qui plus est, dans le cas du choix convenable du spectre des électrons $N_e(\mathscr{E})$, le coefficient $\mu_{e,o}$ peut être négatif [122-125, 127-129]. Pour le spectre puissance des électrons $N_e(\mathscr{E}) = K_e\mathscr{E}^{-\gamma}$ il est immédiat de (9.45)

*) Cette remarque est valable seulement pour une fonction $N_e(\mathscr{E})$ à variation assez lisse, lorsque les expressions utilisées pour μ (cf. (9.17) et (9.45)) sont vraies. Pour les fonctions $N_e(\mathscr{E})$ très « pointues » et des distributions anisotropes des vitesses, une valeur négative de μ peut se présenter déjà pour le vide (cf. [124] et sa bibliographie).

que les valeurs négatives de $\mu_{e,0}$ ne sont possibles que pour $\gamma < -2$, c.-à-d. pour une fonction $N_e(\mathcal{E})$ qui dans un certain domaine croît plus vite que $\mathcal{E}^2$. Dans le cas contraire, la fonction sous le signe d'intégration de (9.45) est partout positive (la fonction $p(\nu, \mathcal{E})$ est positive). Le domaine où la fonction $N_e(\mathcal{E})$ croît avec $\mathcal{E}$ ne peut en général être très grand, en tout cas, avec la croissance ultérieure de $\mathcal{E}$ il doit être remplacé par le domaine où $N_e(\mathcal{E})$ diminue. C'est pourquoi dans le cas discuté de réabsorption négative, le spectre puissance ne présente aucun intérêt particulier (le spectre de la forme $N_e(\mathcal{E}) = K_e\mathcal{E}^{-\gamma'}$, $\gamma' > 2$ pour $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E} < \mathcal{E}_2$ et $N_e(\mathcal{E}) = 0$ pour $\mathcal{E} > \mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E} < \mathcal{E}_1$ a été examiné dans [127]). Une grande importance revêt le spectre au maximum assez « pointu » relatif à une certaine énergie $\mathcal{E}_i$ (la largeur du spectre doit vérifier la condition $\frac{\Delta\mathcal{E}}{mc^2} \ll \frac{3eH_\perp \nu^2}{4\pi mc\nu_p^3}$, ce qui est parfaitement compatible avec l'inégalité (9.12)). Pour un tel spectre [127]

$$\mu = \mu^{\mathrm{I}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \frac{e}{H_\perp} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_i}\right)^5 N_e K_{5/3}(Z_i), \quad Z_i = \frac{4\pi mc\nu}{3eH_\perp} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_i}\right)^2 \tag{9.47}$$

avec $\mathcal{E}_i^2 \ll \mathcal{E}_*^2 \equiv (mc^2\nu/\nu_p)^2$ (cf. (9.45), (9.46)). Mais si $\mathcal{E}_i^2 \gg \mathcal{E}_*^2$ (cf. (9.46)), alors

$$\left.\begin{aligned} &\mu = \mu^{\mathrm{II}} = \frac{\sqrt{3}\, e^3 H_\perp}{8\pi m\nu\nu_p} \frac{mc^2}{\mathcal{E}_i^2} N_{e,i} \Phi(Z_i), \\ &\Phi(Z) = 2Z \int_Z^\infty K_{5/3}(u)\, du - Z^2 K_{5/3}(Z), \quad Z_i = \frac{4\pi mc\nu_p^3}{3eH_\perp \nu^2} \frac{\mathcal{E}_i}{mc^2}. \end{aligned}\right\} \tag{9.48}$$

$N_{e,i}$ de (9.47) et (9.48) est la concentration des électrons à énergie considérée $\mathcal{E}_i \gg mc^2$.

L'expression (9.47) est toujours positive; en l'absence de plasma elle est vraie pour toutes les énergies, ce qui s'accorde avec l'exposé précédent. La fonction $\Phi(Z_i)$ peut être négative et dans le domaine correspondant des valeurs Z_i le coefficient $\mu^{\mathrm{II}} < 0$. Il est négatif dans le domaine d'ordre (0,7 à 1,3) $\nu_{\max}$, où $\nu_{\max}$ est la fréquence qui correspond à la valeur maximale de $|\mu^{\mathrm{II}}|$. Pour cette fréquence

$$\left.\begin{aligned} &\mu_{\max}^{\mathrm{II}} \approx -10^{-2} \frac{e^2}{mc} \frac{\nu_p^3}{\nu_{\max}^4} N_{e,i} = -8{,}5\cdot 10^{-5} \frac{\nu_p^3}{\nu_{\max}^4} N_{e,i}\ \mathrm{cm}^{-1}, \\ &\nu_{\max} \approx \left(0{,}24 \frac{2\pi mc\nu_p^3}{eH_\perp} \frac{\mathcal{E}_i}{mc^2}\right)^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{9.49}$$

Par ailleurs, le coefficient μ^{I} associé au maximum du spectre fréquentiel (à la fréquence ν_m ; cf. (5.40)) vaut

$$\mu_{\mathrm{I}}(\nu_m) \approx 2{,}4 \cdot 10^{-8} \frac{N_{e,\,l}}{H_\perp} \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}_l}\right)^5 \mathrm{cm}^{-1}, \quad \nu_m \approx 0{,}07 \frac{eH_\perp}{mc} \left(\frac{\mathscr{E}_l}{mc^2}\right)^2. \tag{9.50}$$

Dans [127, 129] on trouve plusieurs estimations du coefficient de réabsorption négatif relatives aux sources cosmiques différentes.

Nous avons examiné plus haut seulement le cas de propagation quasi longitudinale, en négligeant la différence entre les coefficients $\mu_e - \mu_o$. Dans [123] les auteurs examinent la propagation transversale (angle $\chi = {}^1/_2\pi$) dans le plasma ; il s'avère que la réabsorption négative est également possible. Dans [125] les auteurs ont obtenu des expressions pour μ_e et μ_o pour tout angle χ entre le champ et le rayon visuel. Les coefficients μ_e peuvent être négatifs pour tout χ, mais bien sûr, seulement pour des spectres $N_e(\mathscr{E})$ d'un type défini et non pas dans toute la gamme des fréquences. D'autre part, les auteurs de [125] ont obtenu l'expression de la différence $\mu_e - \mu_o$ pour la propagation quasi longitudinale des ondes. Cette différence est faible, étant donné que

$$|\mu_e - \mu_o| \sim \left\{ a \frac{\omega_H \omega_p^2}{\omega^3 (1 - n^2 v^2/c^2)} + b \frac{\omega_H}{\omega} + d \sqrt{1 - n^2 \frac{v^2}{c^2}} \right\} \mu_{e,\,o}, \tag{9.51a}$$

où a, b et d sont les coefficients de l'ordre de l'unité. Au maximum du rayonnement

$$\omega \sim \omega_H \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \left(1 - n^2 \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \approx \omega_H \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \eta^{-3},$$

$$\eta = \sqrt{\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx \sqrt{1 - n^2 \frac{v^2}{c^2}}$$

et par conséquent, dans ces conditions

$$|\mu_e - \mu_o| \sim \left\{ a \frac{\omega_p^2 \mathscr{E}}{\omega^2 mc} \eta + b \frac{\mathscr{E}}{mc^2} \eta^3 + d\eta \right\} \mu_{e,\,o}. \tag{9.51b}$$

Les conditions (9.46a) et (9.46b) montrent clairement que dans le domaine où l'action du plasma est importante sans être trop grande, $(\omega_p^2/\omega^2)(\mathscr{E}/mc^2)^2 \sim 1$, $\eta \sim mc^2/\mathscr{E}$, et par conséquent, $|\mu_e - \mu_o| \sim mc^2/\mathscr{E}$. Dans une plage bien large qui est aussi la plus importante des valeurs des paramètres, où $\omega_p^2/\omega^2 \lesssim mc^2/\mathscr{E}$, on a

$$|\mu_e - \mu_o| \sim \eta = \sqrt{\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}.$$

Dans la plupart des cas le facteur η est petit, de sorte qu'il est peu probable que la condition $|\mu_e - \mu_o| L \gg 1$ soit observée même pour $|\mu_{e,o}| L \gg 1$. Mais si, pour autant, cette condition est observée avec $\mu_{e,o}$ négatif, alors l'une des ondes sera dominante dans le rayonnement synchrotron de la source, c.-à-d. on sera en présence d'une polarisation circulaire totale (l'expression générale du degré de polarisation circulaire sous la condition $|\mu_{e,o}| L \gg 1$ est donnée dans [117]).

L'approximation suivant laquelle $\mu_e = \mu_o$ et les pouvoirs émissifs $\varepsilon_e = \varepsilon_o$ rend impossible la polarisation circulaire. Pourtant, la polarisation linéaire peut varier même dans le cas où la présence d'un plasma n'intervient pas dans l'absorption et l'émission des ondes. Plus précisément, si la condition (9.36) n'est pas respectée, on observe non seulement la rotation du plan de polarisation, mais encore la dépolarisation du rayonnement. Le fait est que si la rotation de Faraday intervient à elle seule, la polarisation linéaire diminue de facteur

$$\sin [{}^1/_2 (k_e - k_o) L] \cdot [{}^1/_2 (k_e - k_o) L]^{-1},$$

où $k_{e,o} = (\omega/c)\, n_{e,o}$ et L est la dimension de la région émettrice le long du rayon visuel (cf., par exemple, [44, 117]). La polarisation circulaire du rayonnement définie par une couche épaisse de $\mu > 0$ est égale à (cf. [117])

$$\Pi_c = \frac{V}{I} = \frac{\mu_e - \mu_o + (\mu_o + \mu_e)\,\Pi_c^{(0)}}{\mu_e + \mu_o + (\mu_e - \mu_o)\,\Pi_c^{(0)}} \approx \frac{\mu_e - \mu_o}{2\mu} + \Pi_c^{(0)}, \tag{9.52}$$

où pour passer à la dernière expression on admet que

$$|\mu_e - \mu_o| \ll \mu_{e,o} \approx \mu \quad \text{et} \quad \Pi_c^{(0)} = \frac{\varepsilon_o - \varepsilon_e}{\varepsilon_o + \varepsilon_e} \ll 1.$$

Nous avons déjà évalué $|\mu_e - \mu_o|$ (cf. (9.51)); (9.17), (9.18) et (9.28) rendent clair que dans le domaine d'application de ces formules $(\mu_e - \mu_o)/2\mu \sim \Pi_c^{(0)}$. D'autre part, la formule de μ_e (9.17) a été obtenue elle-même sous l'hypothèse que le rayonnement ait un caractère unidirectionnel, c.-à-d. en négligeant les termes d'ordre $mc^2/\mathscr{E}$. Or, on sait que même dans le vide $\Pi_c^{(0)} \sim mc^2/\mathscr{E}$ (cf. chapitre 5). En combinant les estimations différentes on aboutit à la conclusion que dans les cas courants (pour $\mu > 0$) les degrés de polarisation circulaire $\Pi_c^{(0)}$ ou Π_c sont petits, de l'ordre de $mc^2/\mathscr{E}$ ou de $\eta = \sqrt{(mc^2/\mathscr{E})^2 + \omega_p^2/\omega^2}$. Ainsi, l'apparition d'une polarisation circulaire ou elliptique du rayonnement synchrotron est significative, puisque dans les cas les plus simples sa polarisation est linéaire. La polarisation circulaire ou elliptique du rayonnement synchrotron à distribution quasi isotrope de l'ensemble des électrons émetteurs peut apparaître soit dans le cas des énergies relativistes

pas trop grandes, soit sous l'effet de l'anisotropie du plasma. La situation change s'il s'agit du rayonnement synchrotron Compton (cf. la fin du chapitre 5 et la bibliographie qui s'y rapporte).

Dans les conditions de réabsorption négative, outre les variations de polarisation, peut intervenir sensiblement la dépendance des coefficients de réabsorption $\mu_{\perp, \parallel}$ ou $\mu_{e, o}$ de l'angle χ entre le champ et le rayon visuel. Il s'ensuit que si le champ de la source est inhomogène sans être complètement chaotique, alors pour $\mu < 0$ le rayonnement s'amplifiera essentiellement dans les directions de $|\mu|$ maximal. C'est pourquoi pour $|\mu| L > 1$ et surtout pour $|\mu| L \gg 1$ certaines régions d'une source inhomogène auront un éclat anomal.

Dans ce qui précède nous n'avons pu examiner qu'une partie relativement petite du problème de l'influence qu'exerce un plasma froid sur le rayonnement synchrotron et sa réabsorption. Dans ce domaine, il reste encore à étudier toute une série de problèmes et d'éventualités (il s'agit en premier lieu de la réabsorption négative et des relations de polarisation dans les conditions différentes relatives aux sources de types divers; le dernier tour d'horizon sur ce sujet est donné dans [124]).

CHAPITRE 10

ELECTRODYNAMIQUE DES MILIEUX À DISPERSION SPATIALE

Appréciation de la dispersion spatiale. Ondes normales dans un milieu anisotrope. Certains effets de la dispersion spatiale dans l'optique des cristaux

En appliquant l'électrodynamique des milieux continus nous avons adopté précédemment que la permittivité était soit constante. soit dépend seulement de la fréquence (si l'on tient compte de la dispersion fréquentielle). Il existe pourtant un assez grand nombre de phénomènes (surtout en physique du plasma, mais aussi en physique des métaux et en optique), dont l'étude doit tenir compte encore de la dispersion spatiale, de la relation entre la permittivité et le vecteur d'onde. Le présent chapitre traite tant des questions générales de l'électrodynamique des milieux à dispersion spatiale que de certains effets de la dispersion spatiale en optique (pour plus de détails, cf. [57] ; dans ce qui suit nous nous inspirons dans une grande mesure de l'article [130]). La question du rôle de la dispersion spatiale dans le plasma sera étudiée au chapitre 11.

La dispersion spatiale est due au fait que l'induction **D** en un point donné quelconque **r** est définie par le champ électromagnétique **E** et **B** non seulement en ce point, mais aussi dans son voisinage. Un peu plus loin nous expliquerons ceci avec plus de détails, après qu'auront été données à nouveau par commodité, les équations de départ du champ et écrit la relation générale qui associe **D** et **E** dans l'électrodynamique linéaire.

Ainsi, les équations initiales du champ sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{ext}, & \operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi\rho_{ext}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (10.1)$$

où **E** est l'intensité du champ électrique ; **D** et **B**, les inductions des champs électrique et magnétique (nous ne distinguons pas les champs **B** et **H**, mais à la différence des autres sections, nous utilisons la notation **B** comme il est d'usage dans l'électrodynamique des milieux à dispersion spatiale) ; $\mathbf{j}_{ext}$ et ρ_{ext}, la densite de courant et la

densité de charge des sources extérieures. L'induction **D** est définie par la relation

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}=\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+4\pi \mathbf{j},$$

où **j** est la densité de courant induit par les champs **E** et **B**; quelquefois il est également commode d'introduire la polarisation **P**, avec $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$.

Lorsque les interfaces sont bien marquées, il faut utiliser les conditions aux limites déduites de (10.1) par la transition limite. Ces conditions sont de la forme (**n** est la normale à l'interface, dirigée du milieu 1 vers le milieu 2; les indices *n* et *t* correspondent aux composantes normale et tangentielle)

$$\left.\begin{aligned} E_{1t}&=E_{2t}, & [\mathbf{n}(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)]&=\frac{4\pi}{c}(\mathbf{i}+\mathbf{i}_{ext}),\\ B_{1n}&=B_{2n}, & D_{2n}-D_{1n}&=4\pi(\sigma+\sigma_{ext}).\end{aligned}\right\} \qquad (10.2)$$

Ici $\mathbf{i}_{ext}$ et σ_{ext} sont respectivement les densités superficielles des courants extérieurs et des charges, et les densités **i** et σ peuvent être exprimées notamment à travers **D** par l'intégration sur l'épaisseur de la couche superficielle. Par exemple, $\mathbf{i}=-\frac{1}{4\pi}\int_1^2\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,dl$ et $\sigma=\frac{1}{4\pi}\int_1^2 \operatorname{div}[\mathbf{n}[\mathbf{Dn}]\,dl$; (cf. [143c, 139]). Les densités **i** et σ sont différentes de zéro justement dans le cas où l'on tient compte de la dispersion spatiale, lorsque dans la relation entre **D** et **E** figurent des dérivées par rapport aux coordonnées (cf. plus loin). Sous ce rapport, si en négligeant la dispersion spatiale on admet ordinairement que $\mathbf{i} = 0$ et $\sigma = 0$, dans le cas où cette dispersion est prise en considération on n'a aucune raison d'adopter l'hypothèse considérée. Constatons également qu'en déduisant les conditions aux limites (10.2) nous avons supposé qu'à l'interface les champs physiques **E** et **B** ne pouvaient devenir infinis, alors que l'induction **D** le pouvait (ceci est possible, par exemple, lorsque la valeur de **D** est déterminée par les dérivées par rapport à **E** suivant la normale à l'interface).

Pour obtenir les relations (10.1) à partir des équations de Maxwell relatives au domaine microscopique il faut réaliser la mise en moyenne statistique de ces dernières. Ainsi les vecteurs **E**, **D** et **B** de (10.1) sont les moyennes statistiques. Pour un milieu en équilibre thermodynamique le sens de ces moyennes est parfaitement clair. Pourtant on peut aussi prendre la moyenne dans un cas plus général (par exemple, dans celui des états métastables associés à la surchauffe, au surrefroidissement, etc.). La mise en moyenne de (10.1) fait que

les fluctuations ne sont pas prises en considération, mais les champs moyens **E**, **D** et **B** peuvent changer de façon arbitraire dans l'espace et le temps: toute mise en moyenne supplémentaire par rapport à **r**, outre la mise en moyenne statistique, est non seulement inutile mais en général impossible en électrodynamique des milieux, conséquente dans son évaluation de la dispersion spatiale. D'une façon analogue, quand il s'agit de la dispersion fréquentielle la mise en moyenne par rapport à t est en général impossible.

Le système d'équations (10.1) n'est pas complet, et si l'on veut, dénué de sens tant qu'on n'indique pas la relation permettant d'exprimer la quantité $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 2\pi\mathbf{P}$ à travers **E**. Dans le cadre de l'électrodynamique linéaire cette relation, appelée parfois équation matérielle ou de liaison, s'écrit sous la forme générale

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\varepsilon}_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(\mathbf{r}', t'). \tag{10.3}$$

La relation (10.3) tient compte du principe de causalité suivant lequel l'induction à l'instant t n'est définie par le champ qu'au passé et à présent, c.-à-d. aux instants $t' \leqslant t$. Si les propriétés du milieu sont invariables dans le temps, le noyau $\hat{\varepsilon}_{ij}$ ne peut dépendre que de la différence $\tau = t - t'$. D'une façon analogue, si on peut admettre que le milieu est spatialement homogène, $\hat{\varepsilon}_{ij}$ dépend seulement de la différence $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Dans ces milieux, l'écriture de la relation (10.3) est particulièrement simple pour les champs de la forme des ondes planes, c.-à-d. de la forme

$$E_i(\mathbf{r}, t) = E_i(\omega, \mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]. \tag{10.4}$$

En portant (10.4) dans (10.3) on trouve

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \tag{10.5}$$

où

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{R} \exp[-i(\mathbf{kR} - \omega\tau] \hat{\varepsilon}_{ij}(\tau, \mathbf{R}). \tag{10.6}$$

Il est manifeste que pour les champs dont la dépendance de **r** et de t est arbitraire, les quantités $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$ et $\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k})$ ont le sens de composantes de Fourier correspondantes; par exemple,

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int E_i(\mathbf{r}, t) \exp[-i(\mathbf{kr} - \omega t)] \, d\mathbf{r} \, dt.$$

Le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ décrit complètement non seulement les propriétés électriques, mais encore les propriétés magnétiques du milieu, c.-à-d. rend compte de l'action de l'induction **B** sur **D**

(ou ce qui revient au même, sur le courant induit $\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} - \mathbf{E})$). En effet, pour les composantes de Fourier l'équation du champ

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

est de la forme

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{c}{\omega}[\mathbf{k}\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})];$$

aussi peut-on considérer que si l'on tient compte de la dispersion spatiale, (10.3) et donc (10.5), (10.6) rendent compte également de l'action de **B** sur **D**. Mais si la dispersion spatiale est négligée, c.-à-d. si on admet que $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k} \to 0) = \varepsilon_{ij}(\omega)$, il faut considérer que pour les non-ferromagnétiques dans la plage optique du spectre $B_i = \mu_{ij}$, $H_j = H_i$, c.-à-d. $\mu_{ij} = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$). Pour les ferromagnétiques, même dans l'optique, sans parler des basses fréquences, le tenseur $\mu_{ij}(\omega)$ ne se ramène plus nécessairement à δ_{ij}. Aux basses fréquences, pour $k \to 0$, l'introduction du tenseur de perméabilité magnétique μ_{ij}, s'impose également pour des para et diamagnétiques. Cette question, ainsi que presque toutes les autres traitées dans le présent chapitre, est soit exposée plus en détail dans [57], soit ce dernier ouvrage indique les références correspondantes (pour des références plus récentes, cf. [130, 131]). Parfois au lieu du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ il est plus commode d'utiliser le tenseur inverse, c.-à-d. le tenseur $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$. Dans ce cas il est évident que

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})\,\mathbf{D}_j(\omega, \mathbf{k}). \tag{10.7}$$

Dans le cadre de la théorie phénoménologique, le tenseur de permittivité $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ est supposé connu. Son calcul pour un cristal, de même que pour tout autre milieu condensé, est un problème de la théorie du microcosme.

Les expressions (10.3), (10.5) et (10.6) montrent immédiatement que la relation entre le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et **k**, c.-à-d. la dispersion spatiale, est précisément liée au fait que l'induction en un point **r** est définie par la valeur de l'intensité du champ électrique non seulement en **r**, mais aussi dans un certain voisinage de ce point. Autrement dit, la dispersion spatiale est définie par la liaison non localisée de **D** et **E**. D'une façon analogue, la relation entre $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et ω (dispersion temporelle ou fréquentielle) est conditionnée par la liaison (10.3) non localisée dans le temps. Puisque les fréquences propres ω_i du milieu appartiennent habituellement à l'intervalle des fréquences considéré ω, le rapport ω_i/ω est de l'ordre de l'unité et la dispersion temporelle est en général grande. Il en est tout autrement dans le cas de la dispersion spatiale dans les diélectriques. Ceci est dû au fait que pour les diélectriques les longueurs d'onde

$\lambda = \lambda_0/n = 2\pi c/n\omega$ dans la gamme optique (sans parler des fréquences plus basses) dépassent sensiblement la dimension caractéristique du voisinage du point **r**, dont l'apport dans l'intégrale (10.3) est le plus grand. En effet, dans les diélectriques cette dimension est de l'ordre des dimensions atomiques ou de la constante du réseau $a \sim 10^{-8}$ à 10^{-7} cm, de sorte que le rapport $a/\lambda \sim 10^{-3}$, c.-à-d. il est très petit. Par ailleurs, dans un plasma isotrope, par exemple, la dimension caractéristique a déterminant la dispersion spatiale est le rayon de Debye $r_D = \sqrt{\varkappa T/8\pi e^2 N}$; pour un milieu conducteur, lorsqu'on tient compte des collisions, c'est aussi le libre parcours l. C'est pourquoi pour ces milieux la dispersion spatiale n'est en général faible que si $r_D \ll \lambda$ et $l \ll \lambda$, ce qui dans plusieurs cas parfaitement réels pourrait ne pas être respecté (cf., en particulier, chapitre 11). La dispersion spatiale étant faible, l'étude des phénomènes optiques qu'elle conditionne se trouve bien simplifiée et nous en profiterons dans ce qui suit.

Voici maintenant quelques remarques sur les propriétés générales du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ qui, généralement parlant, est complexe, même si ω et **k** ne le sont pas. D'autre part, dans un milieu un champ réel **E** amène, certes, une induction réelle **D**. Il s'ensuit que le noyau $\hat{\varepsilon}_{ij}(\tau, \mathbf{R})$ de (10.6) est réel, et par conséquent, dans le cas général (pour ω et **k** complexes)

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^*_{ij}(-\omega^*, -\mathbf{k}^*) \tag{10.8}$$

ou ce qui revient au même,

$$\varepsilon_{ij}(\omega^*, \mathbf{k}^*) = \varepsilon^*_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}). \tag{10.9}$$

L'utilisation du principe de la symétrie des coefficients cinétiques (cf. §§ 82, 88 de [27]) conduit à une autre relation

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{B}_{ext}) = \varepsilon_{jl}(\omega, -\mathbf{k}, -\mathbf{B}_{ext})\,; \tag{10.10}$$

ici $\mathbf{B}_{ext}$ est l'induction du champ magnétique constante dans le temps, différente de zéro en présence d'un champ magnétique extérieur ou d'une structure magnétique (des ferro et antiferromagnétiques). Pour simplifier dans ces deux cas, appelons $\mathbf{B}_{ext}$ induction du champ magnétique extérieur, ce qui traduisent précisément les notations.

La démonstration de la relation (10.10) pour les tenseurs $\varepsilon_{ij}(\omega)$ et $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{B}_{ext})$ est donnée dans [27]. La généralisation au cas d'une dispersion spatiale n'impose pas en principe le recours aux éléments nouveaux (les vecteurs **k** et $\mathbf{B}_{exp}$ se comportant de la même façon avec le changement du signe du temps, le passage de la relation $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{B}_{ext}) = \varepsilon_{ij}(\omega, -\mathbf{B}_{ext})$ à (10.10) peut être considéré comme quasi évident). Remarquons seulement que dans les cas courants les relations (10.10) ne se démontrent que pour ω et **k** réels. Pourtant,

dans le domaine analytique dont il sera question plus loin, ces relations se conservent également pour les ω et $\mathbf{k}$ complexes.

Un milieu est dit non gyrotrope si, quels que soient ω et $\mathbf{k}$.

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k}). \tag{10.11}$$

Dans (10.11) l'argument $\mathbf{B}_{ext}$ est omis du fait qu'en toute rigueur dans le champ magnétique extérieur le tenseur ε_{ij} est toujours asymétrique (il n'est égal à ε_{ji} que si $\mathbf{B}_{ext}$ est remplacé par $-\mathbf{B}_{ext}$; ici il s'agit précisément du champ extérieur et nous ne traitons pas le cas des antiferromagnétiques en l'absence de champ extérieur, lorsque le tenseur ε_{ij} peut rester symétrique même sans remplacer $\mathbf{B}_{ext}$ par $-\mathbf{B}_{ext}$). C'est pourquoi on pourrait parler d'une gyrotropie due au champ magnétique. Mais pour éviter la confusion, appelons cette gyrotropie activité magnétique, et disons que le milieu correspondant est magnétiquement actif (cf. chapitre 11). Quant à l'adjectif gyrotrope, nous l'attribuerons à un milieu tel que le tenseur ε_{ij} soit asymétrique seulement dans le cas où on fait intervenir la dispension spatiale.

D'après (10.10), (10.11), pour un milieu non gyrotrope,

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, -\mathbf{k}). \tag{10.12}$$

Ainsi, dans un milieu gyrotrope il doit exister au moins une direction non équivalente à la direction opposée. Autrement dit, un milieu peut être gyrotrope seulement s'il ne possède pas de centre de symétrie. Mais la réciproque n'est pas vraie: un milieu peut être privé de centre de symétrie tout en étant non gyrotrope, l'observation de la relation (10.12) pouvant être assurée par d'autres éléments de symétrie.

En l'absence de dispersion spatiale la condition (10.12) est satisfaite automatiquement et le milieu est toujours non gyrotrope. Ainsi, la gyrotropie est un effet de la dispersion spatiale, l'effet le plus important et connu depuis longtemps comme un effet optique de cette nature. Pourtant, même en l'absence de la dispersion spatiale mais avec $\mathbf{B}_{ext} \neq 0$, l'activité magnétique apparaît quand même, puisque, étant donné que

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{B}_{ext}) = \varepsilon_{ji}(\omega, -\mathbf{B}_{ext}), \tag{10.13}$$

et en général, pour les ω et $\mathbf{B}_{ext}$ donnés, le tenseur ε_{ij} est asymétrique (dans certains cas $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{B}_{ext}) = \varepsilon_{ij}(\omega, -\mathbf{B}_{ext})$, ce qui peut avoir lieu dans les antiferromagnétiques en l'absence de champ magnétique extérieur; dans les antiferromagnétiques $\mathbf{B}_{ext}$ est la magnétisation statistique moyenne du microvolume donné du cristal, qui ne disparaît qu'en moyenne suivant toute la maille élémentaire de la structure magnétique du cristal).

La définition d'un milieu gyrotrope comme d'un milieu à tenseur asymétrique $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ est, certes, quelque peu formelle. Cependant

ce qui suit rend clair que c'est précisément l'asymétrie du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ qui conduit aux particularités physiques (par exemple, à la rotation du plan de polarisation dans les ondes normales en l'absence d'absorption) qui distinguent les milieux gyrotropes des milieux non gyrotropes.

Il est souvent commode de diviser le tenseur ε_{ij} en parties réelle $\mathrm{Re}\,\varepsilon_{ij}$ et imaginaire $\mathrm{Im}\,\varepsilon_{ij}$, ainsi qu'en deux tenseurs hermitiens ε'_{ij} et ε''_{ij}

$$\varepsilon_{ij} = \mathrm{Re}\,\varepsilon_{ij} + i\,\mathrm{Im}\,\varepsilon_{ij}, \tag{10.14}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}, \quad \varepsilon'_{ij} = (\varepsilon'_{ji})^*, \quad \varepsilon''_{ij} = (\varepsilon''_{ji})^*, \tag{10.15}$$

où l'astérisque traduit la conjugaison complexe; notons qu'au lieu de ε''_{ij} on introduit parfois le tenseur hermitien de conductivité σ_{ij}, défini comme

$$\varepsilon''_{ij} = \frac{4\pi\sigma_{ij}}{\omega}. \tag{10.16}$$

Il est vrai qu'on utilise également le tenseur de conductivité complexe $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + i\sigma''_{ij} = -i\omega(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij})/4\pi$, mais alors dans (10.16) doit figurer la quantité σ'_{ij}.

Si on néglige la dispersion spatiale, il est clair d'après (10.12) et (10.13) qu'en l'absence de champ magnétique constant le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega)$ est symétrique

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ji}(\omega). \tag{10.17}$$

Aussi bien dans ce cas-là que dans le cas (10.11) plus général, il est évident que

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,\varepsilon_{ij} = \varepsilon''_{ij}.$$

Les prescriptions associées au principe de causalité entraînent que dans un milieu équilibré (ou pour le moins, dans un milieu stable), dans le demi-plan supérieur et sur l'axe réel de la variable complexe ω les fonctions $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ n'ont aucune propriété particulière. Cette dernière circonstance permet de révéler toute une série de relations et de propriétés générales des fonctions $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Les plus importantes d'entre elles sont les relations de dispersion qui associent $\mathrm{Re}\,\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et $\mathrm{Im}\,\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. L'apport de la dispersion spatiale est ici très faible: tout se ramène ordinairement aux mêmes relations que pour les fonctions $\varepsilon_{ij}(\omega)$, où on introduit comme paramètre le vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Nous n'allons donc pas nous attarder aux relations de dispersion: pour un milieu isotrope et en l'absence de la dispersion spatiale ceci est fait avec force détails dans [27]. La généralisation aux milieux anisotropes et aux milieux à dispersion spatiale est décrite au § 1 de [57].

Une branche importante de l'électrodynamique des milieux continus est consacrée à l'étude de la propagation des ondes électro-

magnétiques issues des sources extérieures au milieu concerné. En particulier, en optique cristalline on discute précisément de problèmes de ce type; le plus souvent il s'agit même d'un problème plus restreint, de la propagation des ondes planes monochromatiques dont le champ électrique est de la forme

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp [i (\mathbf{kr} - \omega t)]; \qquad (10.18)$$

ici $\mathbf{E}_0$ est le vecteur complexe ne dépendant pas des coordonnées $\mathbf{r}$ et du temps t; $\mathbf{k}$, le vecteur d'onde et ω, la fréquence.

Il faut avoir en vue que l'expression (10.18) à $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ n'est pas la plus générale; quelquefois il faut examiner également les champs du type (10.18) mais à $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{00} (\mathbf{k}, \mathbf{r})$. Toutefois, cette nécessité est bien rare (cas des axes optiques singuliers des cristaux des syngonies inférieures et certains autres; cf. § 2 de [57]). C'est pourquoi dans ce qui suit nous nous bornons aux expressions de la forme (10.18).

Les solutions de la forme (10.18) vérifient les équations homogènes du champ électrique, c.-à-d. les équations (10.1) sans courants extérieurs (donnés) et charges $\mathbf{j}_{ext}$ et ρ_{ext}, seulement si $\mathbf{k}$ et ω sont liés entre eux. Cette liaison est donnée par l'équation de dispersion et permet, par exemple, d'exprimer $\mathbf{k}$ à l'aide de ω:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \tilde{n} (\omega, \mathbf{s}) \mathbf{s}. \qquad (10.19)$$

Ici $n = n + i\varkappa$ est l'indice de réfraction complexe; n, l'indice de réfraction; $\varkappa$, l'indice d'absorption ($\mu = (2\omega/c) \varkappa$, le coefficient d'absorption par rapport à l'intensité) et $\mathbf{s}$, le vecteur unité réel (nous n'examinons ici que les ondes planes homogènes telles que $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2$ aux vecteurs colinéaires $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$; par ailleurs, conformément à la position du problème en optique, on admet que la fréquence ω soit réelle). L'équation de dispersion détermine la fonction $\tilde{n}$ à travers les coefficients qui figurent dans les équations du champ, c.-à-d. à travers le tenseur de permittivité ε_{ij}; de plus, à chaque valeur de ω et $\mathbf{s}$ correspondent plusieurs valeurs de $\tilde{n} = \tilde{n}_l$, où l'indice l correspond à telle ou telle solution, c'est-à-dire à une onde normale. Les ondes normales (ω et $\mathbf{s}$ étant données mais l sont différents) diffèrent aussi par leur polarisation, c.-à-d. par le vecteur $\mathbf{E}_{0l}$ de (10.18) qui se calcule à facteur constant près à partir des équations du champ.

Formellement, l'objet de l'optique cristalline *) est ainsi l'étude en premier lieu des fonctions $\tilde{n}_l (\omega, \mathbf{s})$ et $\mathbf{E}_{0l} (\omega, \mathbf{s})$. A son tour, si on ne parle pas des équations du champ, toute l'information sur ces fonctions est contenue dans le tenseur de permittivité complexe

*) Nous utilisons ici ce terme pour abréger et aussi pour le cas plus général où il s'agit de la propagation des ondes dans un milieu arbitraire (anisotrope).

ε_{ij} (ω, **k**). Si de plus on néglige la dispersion spatiale en adoptant que $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\omega)$ tout se ramène à l'optique des cristaux « classique » telle qu'elle est enseignée. Ceci signifie que l'optique des cristaux classique est un cas limite particulier de l'optique des cristaux à dispersion spatiale.

En optique des cristaux pratiquement non absorbants ou peu absorbants la dispersion spatiale est faible dans ce sens que sa grandeur est définie comme nous l'avons dit, par le petit paramètre

$$ka \sim \frac{a}{\lambda} = \frac{an}{\lambda_0} \ll 1. \qquad (10.20)$$

C'est pour cette raison justement que dans l'optique des cristaux on peut négliger généralement la dispersion spatiale s'il ne s'agit pas d'effets qualitativement nouveaux (gyrotropie, anisotropie optique des cristaux cubiques, apparition des ondes normales supplémentaires, vitesse de groupe différente de zéro pour les ondes longitudinales, etc.). D'autre part, la petitesse du paramètre permet de simplifier sensiblement et de concrétiser l'étude de l'influence de la dispersion spatiale.

La dispersion spatiale n'est pas inconnue en principe de l'optique des cristaux et en général de l'électrodynamique, on l'appliquait depuis le XIXe siècle. Toutefois l'optique des cristaux envisagée à la lumière de la dispersion spatiale ne compte en tant que branche d'étude plus ou moins indépendante que 10 ou 15 ans. En même temps, la dispersion spatiale fait maintenant partie intégrante de l'électrodynamique des milieux continus moderne, de la physique du plasma, de la théorie du corps solide, de la théorie des métaux, etc. Il s'ensuit donc qu'une rédaction et un exposé modernes de l'optique des cristaux, sans parler de la physique du plasma, doivent se baser sur une électrodynamique qui tient compte de la dispersion spatiale. Autrement dit, il faut partir des liaisons (10.5), obtenir toute une série de résultats généraux et seulement après passer à l'exposé de l'optique des cristaux classique, cas particulier, bien que le plus important. Mais en règle générale, dans les ouvrages consacrés à l'optique, on procède toujours comme par le passé, en développant d'abord et parfois exclusivement, l'optique des cristaux classique. C'est précisément la raison pour laquelle il nous semble avantageux d'exposer dans le présent ouvrage l'optique des cristaux envisagée à la lumière de la dispersion spatiale.

Passons à la recherche de toutes les ondes électromagnétiques normales de la forme (10.18) dans un milieu homogène illimité caractérisé par le tenseur ε_{ij} (ω, **k**). Ces ondes satisfont aux équations (10.1) avec $\mathbf{j}_{ext} = 0$, $\rho_{ext} = 0$, d'où l'on tire l'équation d'onde

$$\text{rot rot}\, \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0. \qquad (10.21)$$

Pour les ondes planes (10.18) l'équation (10.21) devient

$$\mathbf{D}=\frac{c^2}{\omega^2}\{k^2\mathbf{E}-\mathbf{k}(\mathbf{kE})\}. \qquad (10.22)$$

Portons dans (10.22) la relation (10.5) pour obtenir

$$\left\{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})-k^2\delta_{ij}+k_ik_j\right\}E_j=0. \qquad (10.23)$$

Ce système d'équations algébriques possède une solution non triviale $\mathbf{E}\neq 0$ si son déterminant est nul, c.-à-d. si

$$\left|\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})-k^2\delta_{ij}+k_ik_j\right|=0. \qquad (10.24)$$

L'équation (10.24) s'appelle souvent équation de dispersion : elle établit la relation entre ω et $\mathbf{k}$ pour les ondes normales ; sa solution peut se mettre sous la forme

$$\omega_l = \omega_l(\mathbf{k}); \quad l = 1, 2, 3, \ldots \qquad (10.25)$$

ou sous la forme (10.19), c.-à-d. en exprimant $\mathbf{k}$ par ω

$$\mathbf{k}=\frac{\omega}{c}\tilde{n}_l(\omega, \mathbf{s})\,\mathbf{s}, \quad \tilde{n}_l^2=\frac{c^2k^2}{\omega^2}, \qquad (10.26)$$

où l'indice l correspond aux ondes normales différentes. L équation (10.24) peut également s'écrire sous la forme de l'équation pour $\tilde{n}^2(\omega, \mathbf{s})$

$$(\varepsilon_{ij}s_is_j)\,n^4-\{(\varepsilon_{ij}s_is_j)\,\varepsilon_{kk}-(\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}s_is_j)\}\,\tilde{n}^2+|\varepsilon_{ij}|=0, \quad (10.27)$$

où

$$\varepsilon_{kk}=\mathrm{Sp}\,\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}.$$

Lorsqu'on néglige la dispersion spatiale, c.-à-d. lorsque $\varepsilon_{ij} \Rightarrow = \varepsilon_{ij}(\omega)$, l'équation (10.27) s'appelle souvent équation de Frensnel ; cette équation est à la base de l'optique des cristaux classique. Dans ce cas (10.27) n'a toujours que deux solutions $\tilde{n}_1^2$ et $\tilde{n}_2^2$; il est donc clair que lorsque ω et $\mathbf{s}$ sont arbitraires, dans un milieu peuvent se propager seulement deux ondes normales dont le vecteur $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{s})$ possède une composante transversale $\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E} - (\mathbf{sE})\,\mathbf{s}$, $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$. Les ondes à $E_\perp = 0$, c.-à-d. les ondes longitudinales peuvent exister dans ces conditions seulement pour un ensemble discret des fréquences ω. En effet, pour ces ondes $\mathbf{D} = 0$ (cf. (10.22)) et comme on a la relation $D_i = \varepsilon_{ij}E_j$, on aboutit à la conclusion qu'avec $\mathbf{D} = 0$ et $\mathbf{E} \neq 0$ pour les ondes longitudinales dans le cas général les grandeurs ω et $\mathbf{k}$ vérifient l'équation

$$|\,\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})\,| = 0. \qquad (10.28)$$

Il faut pourtant avoir en vue que l'observation de cette égalité n'est que nécessaire, sans être encore suffisante pour qu'apparaissent des ondes longitudinales. Si on ne tient pas compte de la dispersion spatiale, l'équation (10.28) tirée également de (10.24) devient

$$|\varepsilon_{ij}(\omega)| = 0. \tag{10.29}$$

Les fréquences $\omega \equiv \omega_{\parallel}$ vérifiant l'équation (10.29) sont les fréquences que peuvent posséder les ondes longitudinales. Pour un milieu isotrope on obtient de (10.29) la condition

$$\varepsilon(\omega) = 0. \tag{10.30}$$

Bien entendu, cette condition très importante peut s'obtenir immédiatement en examinant le milieu isotrope sans dispersion spatiale, lorsque $\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}(\omega)$. Puisque par définition, dans une onde longitudinale $\mathbf{E}_{\parallel} = E\mathbf{k}/k$, pour cette onde $\mathbf{D} = 0$ (cf. (10.22)) et le champ $\mathbf{E}$ est différent de zéro seulement à la condition (10.30). Mais si l'on tient compte de la dispersion spatiale, l'équation (10.28) fournit la relation de dispersion des ondes longitudinales $\omega_{\parallel} = \omega_{\parallel}(\mathbf{k})$.

Dans l'optique des cristaux le rôle principal revient aux ondes à $\mathbf{E}_{\perp} \neq 0$, l'excitation de ces ondes par la lumière étant la plus intense. Pour de telles ondes, si l'on tient compte de la dispersion spatiale, l'équation (10.27) peut avoir dans certaines plages spectrales plus que deux solutions. Pourtant même dans le cas où de nouvelles solutions (« ondes complémentaires ») n'apparaissent pas la dispersion spatiale conduit à plusieurs phénomènes nouveaux, parmi lesquels les plus importants sont l'activité optique naturelle (la gyrotropie), ainsi que l'anisotropie optique des cristaux cubiques (on sait que si l'on ne tient pas compte de la dispersion spatiale, les cristaux cubiques sont optiquement isotropes). Tous ces phénomènes ont été déjà discutés et leur étude se poursuit dans ce qui suit; pour les examiner dans le cadre d'une théorie phénoménologique il faut connaître la relation entre le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et $\mathbf{k}$ pour de petits $\mathbf{k}$.

Avant d'aborder cette question, faisons quelques remarques. Ainsi, il faut rappeler qu'en examinant la dépendance entre $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et $\mathbf{k}$, il convient de retenir que la relation (10.5) qui associe les grandeurs $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$ pour la même valeur de $\mathbf{k}$, a été obtenue dans ce qui précède sous l'hypothèse d'un milieu spatialement homogène. Or, les cristaux ne constituent pas des milieux spatialement homogènes, puisque, par exemple, les nœuds d'un réseau ne sont pas équivalents aux autres points. C'est pourquoi dans le cas des cristaux l'application du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, introduit sous l'hypothèse d'un milieu homogène, doit être limitée à l'avance. L'analyse de cette question (cf. [57] permet de déduire que la relation (10.5) ne peut être utilisée pour les cristaux que si le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est petit

par rapport aux vecteurs de base d'une maille élémentaire du réseau réciproque, c.-à-d. si $k \ll 1/a$ on $\lambda \gg a$, où a est le pas du réseau. Ces inégalités rendues évidentes déjà par les considérations purement qualitatives sont observées à l'avance dans la plage optique des longueurs d'onde, où $a/\lambda \sim 10^{-3}$. C'est pourquoi dans ce qui suit nous ne limitons pas dans l'optique cristalline l'utilisation de tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$.

Une autre question parfaitement indépendante sur les conditions d'application de l'équation matérielle (10.5) en présence d'une dispersion spatiale se pose lorsqu'on passe des cristaux infinis, ce qui est certes une abstraction, nécessaire pourtant, pour passer de (10.3) à (10.5) et (10.6), aux cristaux de dimensions finies. Puisque (10.3) est une relation intégrale, elle rend compte des frontières d'un cristal et comporte les conditions limites exactes des champs. Si la distance du point $\mathbf{r}$ à la surface du cristal est sensiblement supérieure à la dimension R du voisinage dont l'apport à l'induction est le plus grand, le noyau $\hat{\varepsilon}_{ij}$ devient égal au noyau $\hat{\varepsilon}_{ij}$ de (10.6) relatif au cristal infini. Il est évident que pour de tels points le champ électrique sous la forme de (10.4) détermine l'apparition de l'induction $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$ qui est également de la forme d'une onde plane, la relation entre les amplitudes de $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$ étant définie précisément par l'expression (10.5). Ainsi, ce qui vient d'être dit entraîne que l'équation matérielle peut être utilisée sous la forme (10.5) si l'épaisseur du cristal est grande par rapport à R. Pour les diélectriques, dans les cas courants, la quantité $R \sim a$, où a est la constante du réseau.

D'autre part il faut remarquer que pour l'étude des ondes complémentaires et l'utilisation du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et non de la relation intégrale générale (10.3), les conditions aux limites (10.2) ne suffisent pas. Les conditions aux limites supplémentaires peuvent s'obtenir à partir de (10.3) mais ordinairement on les introduit en se guidant par des considérations moins rigoureuses (cf. § 10 de [57]). La question des conditions aux limites de l'électrodynamique des milieux à dispersion spatiale impose encore une remarque dont il faut tenir compte même en l'absence des ondes complémentaires. Il s'agit des dérivées des ordres supérieurs dont il faut apprécier le rôle éventuel pour concrétiser les conditions aux limites (10.2). Explicitons-le sur l'exemple de l'équation $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$. Pour obtenir la condition aux limites à l'interface des milieux 1 et 2, on effectue la transition limite en intégrant l'équation

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

suivant la direction perpendiculaire à l'interface floue. En prenant cette direction pour l'axe des z et en passant à une interface bien

nette, on obtient la condition

$$D_{2z} - D_{1z} = \varepsilon_2 E_{2z} - \varepsilon_1 E_{1z} = 0, \tag{10.31}$$

où pour passer à la deuxième expression on a posé $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$; de plus, dans le premier milieu, $\varepsilon = \varepsilon_1$, et dans le deuxième, $\varepsilon = \varepsilon_2$. Supposons maintenant que

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \delta_{\mathrm{I}} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \operatorname{rot} (\delta_{\mathrm{II}} \mathbf{E}), \tag{10.32}$$

et que, bien sûr, dans un milieu homogène, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + (\delta_{\mathrm{I}} + \delta_{\mathrm{II}}) \times \operatorname{rot} \mathbf{E}$; l'équation matérielle (10.32) correspond à la relation entre $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$ dans le cas du milieu gyrotrope (isotrope) le plus simple.

En procédant maintenant comme d'ordinaire, on obtient la condition limite

$$D_{2n} - D_{1n} = \delta_{\mathrm{II},\,2} \operatorname{rot}_n \mathbf{E}_2 - \delta_{\mathrm{II},\,1} \operatorname{rot}_n \mathbf{E}_1 \tag{10.33}$$

ou

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} + \delta_{\mathrm{I},\,2} \operatorname{rot}_n \mathbf{E}_2 - \delta_{\mathrm{I},\,1} \operatorname{rot}_n \mathbf{E}_1 = 0, \tag{10.34}$$

où au lieu de l'indice z on emploie l'indice n plus général qui caractérise la direction de la normale. Les termes supplémentaires de (10.33), (10.34) par rapport à (10.31) s'expliquent évidemment par le fait qu'il est inadmissible en utilisant la relation (10.32) de négliger les intégrales $\int_0^l \frac{\partial D_x}{\partial x} dz$ et $\int_0^l \frac{\partial D_y}{\partial y} dz$ même si l'épaisseur de la couche intermédiaire entre les milieux $l \to 0$.

Dans la gamme optique où la dispersion spatiale est faible (pour (10.32) cela signifie que $\delta \sim a \ll \lambda$), la généralisation des conditions limites de la forme (10.33) ne présente apparemment pas d'intérêt particulier, puisque même en négligeant la dispersion spatiale il faut compliquer légèrement les conditions limites (10.31) pour rendre compte de l'imprécision de la surface de séparation des deux milieux, de la présence sur cette surface des inclusions, etc. (pour plus de détails cf. [131] et sa bibliographie). Pourtant en principe et pratiquement pour les milieux à forte dispersion il faut tenir compte de la variation éventuelle même des conditions limites habituelles de la forme (10.31). Si les conditions limites de l'électrodynamique s'écrivent sous la forme (10.2), ce qui vient d'être dit peut être exprimé en formulant la nécessité de mettre au point les expressions des densités superficielles $\mathbf{i}$ et σ, puisqu'en appréciant la dispersion spatiale il est impossible en général d'admettre que $i = 0$ et $\sigma = 0$ (cf. (10.2) et (10.33), (10.34)).

Voici encore une remarque de caractère méthodologique suggérée par la question qui suit et qu'on pose souvent. L'équation de dispersion associe $\mathbf{k}$ et ω et par conséquent, $\varepsilon_{ij} (\omega, \mathbf{k})$ ne dépend réellement que de ω. Comment faire alors pour distinguer la dispersion spatiale de la dispersion fréquentielle? La réponse consiste dans le

fait qu'en introduisant le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ (disons dans (10.5)) on le fait nullement pour les ondes normales pour lesquelles $\mathbf{k}$ et ω sont liés entre eux, mais pour un champ électromagnétique arbitraire muni de sources (cf. (10.1)). Dans un tel champ, le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et la fréquence ω sont parfaitement indépendants. Examinons par exemple, le milieu dans le champ de la forme $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{kr})$ à $\mathbf{k}$ arbitraire et à $\omega = 0$. Un tel champ produit l'induction $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 \exp(i\mathbf{kr})$ liée au champ $\mathbf{E}$ par la relation (10.5), où $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(0, \mathbf{k})$. La situation est analogue pour toute fréquence ω. Ceci rend clair, entre autres, que c'est le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et non pas l'indice de réfraction $\tilde{n}(\omega, \mathbf{s})$, qui est précisément la grandeur fondamentale déterminante des propriétés électrodynamiques du milieu.

Dans les cas courants, l'optique des cristaux ne recourt pas aux considérations énergétiques, ou en tous cas leur intérêt est secondaire. Nous ne nous attarderons donc pas à cet aspect des choses (cf. § 3 de [57]; cf. également chapitre 12 ci-dessous) en nous bornant à la discussion d'une seule question.

On déduit de la façon ordinaire de l'équation du champ (10.1) le théorème de Poynting

$$\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}[\mathbf{EB}] - \mathbf{j}_{\text{ext}}\mathbf{E}. \tag{10.35}$$

Si l'on tient compte de la dispersion fréquentielle et surtout de la dispersion spatiale, ainsi que de l'absorption, il n'est nullement évident de quelle manière il faut utiliser la relation (10.35) et comment il faut l'interpréter. Or, la simplicité devenue familière par le fait qu'on néglige la dispersion et l'absorption (en admettant, par exemple, que $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ pour obtenir l'expression de la densité d'énergie $\varepsilon E^2/8\pi$) est bien trompeuse, puisque l'évaluation de la dispersion et (ou) de l'absorption modifie sensiblement la situation. Comme nous l'avons déjà dit, cette question est étudiée en détails au § 3 de la monographie [57] (cf., par exemple, [27, 64]). En l'occurrence, nous allons donner un exemple d'un milieu sans dispersion fréquentielle. Plus précisément, examinons le milieu gyrotrope où $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$ sont associés par la relation (10.32), ε et $\delta_{\text{I, II}}$ ne dépendant pas de la fréquence. Alors (10.35) se met sous la forme ($\delta = \delta_{\text{I}} + \delta_{\text{II}}$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\varepsilon E^2 + B^2 + \delta(\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E})}{8\pi}\right\} = -\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}\left\{[\mathbf{EB}] - \frac{\delta}{2c}\left[\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right]\right\} + \\ + \operatorname{grad}(2\delta_{\text{II}} - \delta)\left[\frac{\mathbf{E}}{8\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right] - \mathbf{j}_{\text{ext}}\mathbf{E}. \tag{10.36}$$

Cette expression montre premièrement, qu'en introduisant la dispersion spatiale pour $\delta \neq 0$ dans l'expression de la densité de l'énergie on fait apparaître le terme complémentaire $\frac{\delta(\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E})}{8\pi}$

et, dans l'expression de la densité du flux d'énergie, le terme $-\frac{\delta}{2c}\left[\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right]$. Deuxièmement, dans (10.36) figure le terme $A = \frac{1}{8\pi}$ grad $(2\delta_{II} - \delta)\left[E\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right]$ proportionnel au grad $(2\delta_{II} - \delta) =$ $=$ grad $(\delta_{II} - \delta_I)$ et donc différent de zéro (localisé) seulement près de l'interface des milieux. Si $A \neq 0$, ce qui aurait lieu pour $\delta_I \neq \delta_{II}$, sur l'interface l'énergie est dégagée ou absorbée. Ce résultat, certes, sort de l'ordinaire, mais il est possible en principe, par exemple, dans le cas de l'excitation des ondes superficielles quelconques. Pourtant, l'apparition du terme A est suspecte et on se demande si, dans le cas général, il ne disparaît pas du tout, en vertu de la condition

$$\delta_I = \delta_{II} = 1/2\delta. \tag{10.37}$$

L'article [132] et les autres articles que cite son auteur, considèrent que la condition (10.37) et la condition qui la généralise au cas du milieu anisotrope, se déduisent de la prescription qui impose à la relation de Poynting (10.36) d'avoir la forme de la loi de conservation de l'énergie sous sa forme habituelle

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0,$$

où w est la densité d'énergie et S, la densité du flux d'énergie. Cependant, si l'on tient compte de la dispersion et de l'absorption, une telle argumentation ne suffit pas. C'est pourquoi il semblait [131] qu'il n'était pas obligatoire d'introduire la condition (10.37). Il s'avère pourtant que sous sa forme générale elle est vraie du fait qu'elle se déduit du principe de la symétrie des coefficients cinétiques [133]. Cet exemple est assez instructif et utile (quoi qu'il en soit, l'auteur a cru nécessaire de le donner, puisque lui-même avait fait preuve à cet égard d'une certaine incompréhension).

L'exploration des problèmes limites et des conditions limites concrètes dans des milieux à dispersion spatiale est encore loin d'être achevée. Cette circonstance n'empêche pas heureusement l'utilisation du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ ou des tenseurs apparentés pour étudier toute une série de questions. Ainsi, puisque pour les ondes normales (et en général, en l'absence de sources) div $\mathbf{D} = 0$, l'optique des cristaux recourt parfois non pas au tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ mais à celui qu'on appelle tenseur transversal de permittivité $\varepsilon_{\perp, ij}(\omega, \mathbf{k})$. Ce tenseur associe dans les ondes normales le vecteur d'induction à la composante transversale $\mathbf{E}_\perp$ du champ $\mathbf{E}$, c.-à-d.

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{\perp, ij}(\omega, \mathbf{k}) E_{\perp, j}(\omega, \mathbf{k}). \tag{10.38}$$

Nous n'utiliserons plus *) le tenseur $\varepsilon_{\perp, ij}$, sa liaison avec le tenseur ε_{ij} étant élucidée, par exemple, dans [57, 130].

La dispersion spatiale des cristaux dans la gamme optique étant faible (la condition (10.20 est verifiée), au lieu de la fonction relativement complexe de **k**, qui d'habitude est le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$), on peut, pratiquement dans tous les cas connus, utiliser le développement des tenseurs $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ ou $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ en série par rapport à **k** en conservant deux ou trois termes. Cette circonstance est connue depuis longtemps des opticiens; qui plus est, il suffit en général de ne garder dans le développement que les termes linéaires par rapport à **k**, de sorte que **)

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega) + i\gamma_{ijl}(\omega) k_l. \qquad (10.39)$$

Dans une étude plus générale, au lieu de (10.39) on peut faire appel aux développements

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega) + i\gamma_{ijl}(\omega) k_l + \alpha_{ijlm}(\omega) k_l k_m \qquad (10.40)$$

ou, d'une façon analogue, pour le tenseur inverse

$$\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega) + i\delta_{ijl}(\omega) k_l + \beta_{ijlm}(\omega) k_l k_m, \qquad (10.41)$$

où $\mathbf{k} = (\omega/c)\tilde{n}\mathbf{s}$, $\tilde{n} = n + i\varkappa$ est l'indice de réfraction complexe des ondes à fréquence ω qui se propagent dans la direction $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$.

L'utilisation des tenseurs ε_{ij} et ε_{ij}^{-1} tant sous la forme générale que sous la forme des développements (10.40), (10.41) est équivalente dans de larges limites, et le choix de l'un d'eux est défini par la commodité. L'exception est présentée par le cas où certaines composantes des tenseurs $\varepsilon_{ij}(\omega)$ ou $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega)$ tendent vers l'infini (augmentent rapidement). Par exemple, si l'une quelconque des composantes de $\varepsilon_{ij}(\omega)$ tend vers l'infini, le développement (10.40) de la composante correspondante de $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ perd son sens si dans ces conditions les coefficients $\gamma_{ijl}(\omega)$, $\alpha_{ijlm}(\omega)$, etc. deviennent également infinis. Dans ce cas il convient évidemment d'appliquer le développement du tenseur $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ qui devient surtout efficace avec la di-

*) Les quantités longitudinales et transversales sont notées par les indices affectés ici d'indices $\parallel$ et $\perp$ respectivement. Nous utilisons aussi souvent les indices l et tr (nous le ferons en particulier au chapitre 11); dans le présent chapitre ce serait incommode, les indices étant trop nombreux).

**) Pour certains cristaux (classes cristallines C_{3v}, C_{4v}, C_{3h}, D_{3h}), malgré l'absence du centre d'inversion, le tenseur $\gamma_{ijl} = 0$. Dans ces cas toute la rotation du plan de polarisation est définie par les termes du développement de la forme $i\gamma_{ijlmn}k_l k_m k_n$ omis dans (10.39). De plus, au voisinage des raies d'absorption quadripolaires, les coefficients $\gamma_{ijl}(\omega)$ n'ont pas le caractère des résonances, alors que la dépendance des coefficients $\gamma_{ijlmn}(\omega)$ par rapport à ω peut avoir l'allure des résonances. Dans ce cas le rôle des termes omis dans (10.39) augmente. La recherche des composantes du tenseur γ_{iljmn} différentes de zéro fait l'objet de [134].

minution de $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega)$. D'une façon analogue, dans le domaine du fort accroissement des composantes $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega)$, il faut utiliser le développement (10.40) et non (10.41).

Illustrons ce qui vient d'être dit par un exemple élémentaire en prenant le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ sous la forme

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega, \mathbf{k})\,\delta_{ij},$$

où

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_0 - \frac{a}{\omega^2 - \omega_i^2 + \mu k^2}.$$

Si cette fonction $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ est développée en série par rapport à k^2, ce sera en fait le développement en puissance du rapport $\mu k^2/(\omega^2 - \omega_i^2)$. Puisque dans le cas considéré

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{a}{\omega^2 - \omega_i^2},$$

alors, avec $\omega \to \omega_i$, $\varepsilon(\omega) \to \infty$ les autres facteurs du développement (10.40) deviennent aussi infiniment grands. Pour ce qui est du tenseur $\varepsilon^{-1}(\omega, \mathbf{k})$, son développement (10.41) s'effectue en fait suivant les puissances du rapport $\mu k^2/\{(\omega^2 - \omega_i^2)\,\varepsilon - a\}$, de sorte que pour $\omega \to \omega_i$ les facteurs du développement (10.41) restent finis.

Dans ce qui suit nous allons envisager les effets de la dispersion spatiale optique des cristaux en utilisant les développements (10.39)-(10.41). C'est pourquoi, en plus de ce qui vient d'être dit sur les conditions de leur utilisation, constatons que puisque pour tous les milieux réels le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ est fonction non seulement de ω mais encore de $\mathbf{k}$, l'existence même d'un domaine où l'optique des cristaux classique est applicable se fonde en fait sur l'hypothèse de l'existence pour $\mathbf{k} \to 0$ des limites vers lesquelles tendent dans ce cas les tenseurs $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$; de plus, les limites elles-mêmes (c.-à-d. les tenseurs $\varepsilon_{ij}(\omega)$ et $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega)$ (respectivement) ne dépendent pas pour $\mathbf{k} \to 0$ de la direction de $\mathbf{k}$. Autrement dit, l'optique des cristaux repose sur l'hypothèse que pour des $\mathbf{k}$ petits, les tenseurs $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ sont des fonctions analytiques de $\mathbf{k}$. La validité de cette hypothèse résulte dans une grande mesure déjà du fait que dans le cadre de l'optique des cristaux classique on parvient à expliquer le vaste ensemble des faits expérimentaux. La démonstration rigoureuse de l'analyticité des tenseurs $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ en tant que fonctions de $\mathbf{k}$, les $\mathbf{k}$ étant petits, peut s'obtenir dans le cadre d'une théorie du microcosme qui pour tels ou tels cristaux permet de trouver ces tenseurs sous une forme explicite. Pour les cristaux, les tenseurs $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ ont été calculés à plus d'une reprise (cf., par exemple, [57]). Dans tous les cas connus, tant au voisinage des résonances que hors de leurs domaines, mais compte tenu de l'amortissement, avec $\mathbf{k} \to 0$ il s'avérait

que les tenseurs $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ étaient des fonctions analytiques de $\mathbf{k}$. Apparemment il n'y a aucune raison de douter que pour $\mathbf{k} \to 0$ les fonctions $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ ne soient analytiques.

Enfin, une remarque encore, relative à nos hypothèses de départ. Si on ne tient pas compte de l'amortissement, il se peut que les développements de la forme (10.40) et (10.41) où on n'a conservé que quelques termes ne suffisent plus dans les circonstances particulières suivantes. Soit, par exemple, $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega, \mathbf{k})\,\delta_{ij}$, de plus

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega) + \frac{\rho k^2}{(\omega - \omega_i)/\omega_i - \mu k^2} \qquad (10.42)$$

(bien entendu, l'indice i de ω_i n'a rien à voir avec les indices i, j, etc. des tenseurs). Une telle expression décrit quelquefois la marche approximative de $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ près de la fréquence de la raie d'absorption quadripolaire.

Tant que le terme μk^2 de (10.42) est peu important, il s'agit ici du développement de la forme (10.40). Mais dans le cas général

$$[\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon(\omega)]^{-1} = \frac{(\omega - \omega_i)/\omega_i - \mu k^2}{\rho k^2},$$

ce qui tranche tant sur (10.40) que sur (10.41). Il est pourtant facile de généraliser l'expression (10.42) pour un cristal quelconque dans l'esprit du développement phénoménologique (10.40):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \varepsilon_{ij}(\omega) + i\gamma_{ijl}(\omega)\,k_l + \alpha_{ijlm}(\omega, \mathbf{k})\,k_l k_m, \\ \alpha_{ijlm}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) &= \xi_{ijlm}(\omega) + i\eta_{ijlmn}(\omega) k_n + \xi_{ijlmnp}(\omega)\,k_n k_p. \end{aligned}\right\} \qquad (10.43)$$

D'une façon analogue dans (10.40) on peut remplacer $\gamma_{ijl}(\omega)$ par $\gamma_{ijl}(\omega, \mathbf{k})$, etc. Pour un cristal cubique non gyrotrope, les expressions (10.43) et (10.42) sont équivalentes; en outre

$$\alpha_{ijlm} k_l k_m = \frac{\rho(\omega)\,k^2}{(\omega - \omega_i)/\omega_i - \mu k^2}\,\delta_{ij}.$$

Si on généralise quelque peu l'expression (10.42) en l'écrivant

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega) + \frac{\alpha_{ijlm}(\omega)\,k_l k_m}{(\omega - \omega_i)/\omega_i + i\nu + \mu_{lm} k_l k_m}, \qquad (10.44)$$

alors, pour la résonance, c.-à-d. pour $\omega \to \omega_i$ et $\nu = 0$, avec $\mathbf{k} \to 0$, le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ en général, dépend de $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$, c.-à-d. il devient une fonction non analytique de $\mathbf{k}$. Or, en fait, ν diffère toujours de zéro et la dépendance de $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ par rapport à $\mathbf{k}$, pour $\mathbf{k} \to 0$, reste analytique même dans une résonance. Ainsi, le développement de la forme (10.43) peut devenir nécessaire seulement au voisinage d'une résonance ou en négligeant l'amortissement. Mais si on introduit l'amortissement, l'utilisation des développements de la for-

me (10.43) ne peut en général être justifiée que pour l'étude des effets de la dispersion spatiale d'un ordre plus élevé.

Les tenseurs qui figurent dans les formules (10.39) à (10.41) vérifient plusieurs relations qui résultent des propriétés générales de la symétrie du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ discutées dans ce qui précède. Ainsi, en vertu de (10.10)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega) &= \varepsilon_{ji}(\omega), & \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega) &= \varepsilon_{ji}^{-1}(\omega), \\ \gamma_{ijl}(\omega) &= -\gamma_{jil}(\omega), & \delta_{ijl}(\omega) &= -\delta_{jil}(\omega), \\ \alpha_{ijlm}(\omega) &= \alpha_{jilm}(\omega), & \beta_{ijlm}(\omega) &= \beta_{jilm}(\omega). \end{aligned}\right\} \qquad (10.45)$$

Par ailleurs, les tenseurs α_{ijlm} et β_{ijlm} peuvent toujours être choisis tels que $\alpha_{ijlm} = \alpha_{ijml}$ et $\beta_{ijlm} = \beta_{ijml}$, on le suppose dans ce qui suit. Rappelons également qu'on admet partout, sauf mention du contraire, que l'induction magnétique du champ extérieur $\mathbf{B}_{ext}$ est nulle.

Si le centre de symétrie existe et, en général pour un milieu non gyrotrope, (10.12) entraîne que

$$\gamma_{ijl} = 0, \quad \delta_{ijl} = 0. \qquad (10.46)$$

En l'absence de l'absorption et avec un $\mathbf{k}$ réel, le tenseur $\operatorname{Im} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ et par conséquent, le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \operatorname{Re} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ est hermitien. Dans ce cas, en vertu de (10.45) tous les tenseurs $\varepsilon_{ij}(\omega)$, $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega)$, $\gamma_{ijl}(\omega)$, $\delta_{ijl}(\omega)$, $\alpha_{ijlm}(\omega)$ et $\beta_{ijlm}(\omega)$ sont réels. Nous avons mentionnés plus haut les raies d'absorption dipolaires et quadripolaires. En effet, au voisinage des raies dipolaires il suffit ordinairement d'utiliser les développements (10.39), (10.40) ou (10.41), alors que les expressions (10.42)-(10.44) peuvent se présenter en premier lieu dans le cas des raies quadripolaires. Par contre, il faut souligner que les développements en série par rapport à $\mathbf{k}$ mentionnés ne sont pas eux des développements par rapport aux multipôles. Qui plus est, l'utilisation des expressions (10.39)-(10.41) n'est pas limitée du tout par le domaine des raies quelconques. Il faut également retenir que dans un milieu optiquement anisotrope arbitraire et pour une direction arbitraire de la propagation de la lumière, l'apparition d'une raie d'absorption (ou si on néglige l'absorption, l'apparition d'un pôle de la fonction $\tilde{n}^2 = n^2$) n'est pas liée à l'augmentation des composantes $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ dues à une résonance, comme le rendent déjà clair les formules de l'optique des cristaux classique (cf., par exemple, (10.27)).

Les tenseurs $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ et, bien entendu, les tenseurs $\varepsilon_{ij}(\omega)$, $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega)$, γ_{ijl}, δ_{ijl}, α_{ijlm} et β_{ijlm} qui figurent dans (10.40) et (10.41) deviennent sensiblement plus simples si le cristal a des éléments de symétrie. Ainsi, en présence d'un centre de symétrie $\gamma_{ijl} = \delta_{ijl} = 0$ (cf. (10.46)) et dans un milieu isotrope non gyro-

trope le tenseur α_{ijlm} ne compte que deux composantes indépendantes, de sorte que dans ce cas (cf. également chapitre 11)

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega)\delta_{ij} + \alpha_{tr}(\omega)(\delta_{ij} - s_i s_j)k^2 + \alpha_l(\omega)s_i s_j k^2. \quad (10.47)$$

Les conséquences résultant de l'introduction de la symétrie des cristaux sont bien connues pour les tenseurs qui nous intéressent $\varepsilon_{ij}(\omega)$, $\gamma_{ijl}(\omega)$, $\alpha_{ijlm}(\omega)$ et les autres tenseurs et sont décrites en détail dans [57, 135]. Aussi, ne donnerons-nous ici que quelques exemples.

Comme il s'ensuit de la relation (10.45), le tenseur γ_{ijl} (et δ_{ijl}) jouit des propriétés suivantes:

$$\gamma_{xx,l} = \gamma_{yy,l} = \gamma_{zz,l} = 0, \quad \gamma_{xy,l} = -\gamma_{yx,l},$$
$$\gamma_{yz,l} = -\gamma_{zy,l}, \quad \gamma_{zx,l} = -\gamma_{xz,l} \quad (l = 1, 2, 3 \equiv x, y, z).$$

Ainsi, dans le cas général, les tenseurs γ_{ijl} et δ_{ijl} ont neuf composantes indépendantes, et on peut les écrire sous la forme

$$\gamma_{ijl} = e_{ijm}g'_{ml}, \quad \delta_{ijl} = e_{imj}f'_{ml}, \quad (10.48)$$

où e_{ijm} est le pseudotenseur unité d'ordre trois ($e_{123} = 1$, $e_{213} = -1$, $e_{112} = 0$, etc.; dans la réflexion spéculaire, e_{ijl} ne change pas) et g'_{ml} et f'_{ml} sont des pseudotenseurs d'ordre deux.

Avec les tenseurs g'_{ml} et f'_{ml} on introduit parfois les vecteurs de gyration $\mathbf{g}'$ et $\mathbf{f}'$ définis par les relations

$$g'_m = g'_{ml}k_l, \quad f'_m = f'_{ml}k_l, \quad \mathbf{k} = k\mathbf{s}. \quad (10.49)$$

Si on néglige les termes quadratiques en k de (10.40) et (10.41), ces relations, à l'aide des vecteurs de gyration, peuvent être mises sous la forme

$$D_i = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})E_j = \varepsilon_{ij}(\omega)E_j - i[\mathbf{g}'\mathbf{E}]_i, \quad (10.50a)$$
$$E_i = \varepsilon^{-1}_{ij}(\omega, \mathbf{k})D_j = \varepsilon^{-1}_{ij}(\omega)D_j - i[\mathbf{f}'\mathbf{D}]_i. \quad (10.50b)$$

La petitesse de la dispersion spatiale fait que dans la plupart des cas, les relations (10.50) pour les milieux gyrotropes sont parfaitement suffisantes. C'est pourquoi dans ce qui suit nous envisagerons non pas les développements généraux (10.40), (10.41), mais les expressions (10.50) pour les milieux gyrotropes, ainsi que les expressions suivantes pour un milieu non gyrotrope

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \alpha_{ijlm}(\omega)\tilde{n}^2 s_l s_m, \quad (10.51a)$$

$$\varepsilon^{-1}_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^{-1}_{ij}(\omega) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \beta_{ijlm}(\omega)\tilde{n}^2 s_l s_m. \quad (10.51b)$$

Bien entendu, le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ peut toujours être ramené à la forme diagonale en choisissant convenablement les axes prin-

cipaux *). Pour s arbitraire, la direction de ces axes ne coïncide ni avec s ni avec les axes du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega)$; dans les cas où les axes du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega)$ sont fixés, (c.-à-d. en l'absence de la dégénérescence propre aux cristaux cubiques et uniaxes), les axes du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ sont proches des axes de $\varepsilon_{ij}(\omega)$ par suite de la petitesse des termes de (10.50) et (10.51) dépendant de s.

En l'optique cristalline à dispersion spatiale, le plus grand intérêt présentent naturellement ceux des axes principaux de $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ dont la direction coïncide avec s. Pour les cristaux rhombiques ces axes sont x, y, z. Si, par exemple, le vecteur s est dirigé suivant l'axe des x, les valeurs principales du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ sont égales à (cf. ici et plus loin tableau III de [57])

$$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_{xx}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{xx}(\omega) + \left(\frac{\omega}{c}\tilde{u}\right)^2 \alpha_{xxxx},$$
$$\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_{yy}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{yy}(\omega) + \left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 \alpha_{yyxx},$$
$$\varepsilon_3 \equiv \varepsilon_{zz}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{zz}(\omega) + \left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 \alpha_{zzxx}.$$

Dans les cristaux tétragonaux des classes D_4, C_{4v}, D_{2d} et D_{4h} pour le vecteur s dirigé suivant les axes des x et des y, le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ est ramené aux axes principaux, les valeurs principales étant différentes. Mais si le vecteur s est dirigé suivant l'axe des z (suivant l'axe d'ordre quatre), on a

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_\perp(\omega) + \left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 \alpha_{xxzz}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_\parallel(\omega) + \left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 \alpha_{zzzz}.$$

Sans nous attarder à l'examen des cristaux d'autres systèmes, passons aux cristaux cubiques. Dans ce cas

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 = \alpha_{xxxx} = \alpha_{yyyy} = \alpha_{zzzz}, \quad \alpha_2 = \alpha_{xxzz} = \alpha_{yyxx} = \alpha_{zzyy},\\
&\alpha_3 = \alpha_{xyxy} = \alpha_{yzyz} = \alpha_{zxzx}, \quad \alpha_4 = \alpha_{zzxx} = \alpha_{xxyy} = \alpha_{yyzz},\\
&\varepsilon_{xx} = \varepsilon + \left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 (\alpha_1 s_x^2 + \alpha_4 s_y^2 + \alpha_2 s_z^2),\\
&\varepsilon_{xy} = 2\left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 \alpha_3 s_x s_y, \quad \varepsilon_{xz} = 2\left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 \alpha_3 s_x s_z,\\
&\varepsilon_{yy} = \varepsilon + \left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 (\alpha_2 s_x^2 + \alpha_1 s_y^2 + \alpha_4 s_z^2),\\
&\varepsilon_{zz} = \varepsilon + \left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 (\alpha_4 s_x^2 + \alpha_2 s_y^2 + \alpha_1 s_z^2),\\
&\varepsilon_{yz} = 2\left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 \alpha_3 s_y s_z
\end{aligned}\right\} \quad (10.52)$$

*) Si le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ n'est pas hermitien, alors il faut examiner indépendamment les tenseurs hermitiens ε'_{ij} et ε''_{ij}, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}$; de plus, les axes principaux (ou plus précisément, les vecteurs propres qui dans le cas général sont complexes) de ces tenseurs peuvent ne pas coïncider. Sauf mention du contraire, dans le texte on traite seulement du tenseur ε'_{ij} que nous considérons comme réel.

(d'autre part, pour les classes O, T_d et O_h, on a $\alpha_2 = \alpha_4$; le 2 dans les expressions de ε_{xy}, ε_{xz} et ε_{yz} est dû à la sommation dans (10.51) des termes proportionnels à $s_x s_y$ et $s_y s_x$). Ceci rend évident que les axes du cube x, y, z sont les axes principaux du tenseur, si le vecteur s est dirigé suivant l'un des axes x, y, z. Dans ces conditions, pour $\alpha_2 = \alpha_4$, la quadrique correspondante dégénère en surface de révolution (ellipsoïde ou paraboloïde). Si le vecteur s est dirigé suivant les diagonales spatiales du cube ($|s_x| = |s_y| = |s_z| = 1/\sqrt{3}$), on a

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon + 1/3 \left(\frac{\omega}{c} \tilde{n}\right)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)$$

et

$$|\varepsilon_{xy}| = |\varepsilon_{xz}| = |\varepsilon_{xz}| = |\varepsilon_{yz}| = 2 \left(\frac{\omega}{c} \tilde{n}\right)^2 \frac{\alpha_3}{3}.$$

Considérons maintenant certains effets de la dispersion spatiale dans les conditions de l'optique des cristaux. Nous avons déjà noté que la dispersion spatiale étant petite, par exemple en optique, l'intérêt porte surtout sur les problèmes dans lesquels la dispersion spatiale conduit à des effets qualitativement nouveaux, ou, en tous cas, ne détermine pas que des corrections infimes des formules de l'optique des cristaux classique. Conformément à ce qui vient d'être dit, l'exposé qui suit est fragmentaire et se ramène essentiellement à la discussion des phénomènes dont l'analyse nécessite l'estimation de la dispersion spatiale. Nous avons souligné plus haut que l'effet le plus important de ce type est la gyrotropie (activité optique naturelle). Son étude phénoménologique, le plus souvent sans recours explicite aux notions de la dispersion spatiale *), se poursuit depuis bien longtemps; c'est donc un domaine suffisamment mis en lumière dans la littérature (cf., par exemple, [27, 57, 135]). Un autre effet important dû à la dispersion spatiale (existence de la vitesse de groupe des ondes longitudinales différente de zéro), est bien connu surtout dans l'étude du plasma; on en reparlera au chapitre 11. C'est pourquoi nous n'évoquerons ici que deux effets de la dispersion spatiale: l'anisotropie optique des cristaux cubiques et la production des ondes normales complémentaires (nouvelles) au voisinage d'une résonance (dans le domaine de la dispersion anomale).

L'anisotropie optique des cristaux cubiques a été prédite par Lorentz dès le XIX[e] siècle, mais sa découverte dans le domaine de la transition quadripolaire de longueur d'onde $\lambda = 6125$ Å dans Cu_2O ne date que de 1960 (cf. les références de [57, 130, 131]).

*) Pour décrire un milieu gyrotrope, on peut formellement négliger les prescriptions imposées par la symétrie des coefficients cinétiques et examiner le tenseur asymétrique $\varepsilon_{ij}(\omega)$.

Si l'on tient compte de la dispersion spatiale, l'anisotropie optique des cristaux cubiques est immédiate d'après les relations (10.51). Ainsi, pour ces cristaux, l'expression (10.51a) devient (10.52). Au-dehors du domaine de la résonance de la fonction $\varepsilon(\omega)$, on peut utiliser avec la même raison n'importe quelle des relations (10.51). Mais si on envisage le domaine de la résonance de $\varepsilon(\omega)$, la dispersion spatiale ne peut être évaluée correctement qu'en recourant au développement du tenseur $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$.

Si on ne tient pas compte de la dispersion spatiale, le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega)$ des cristaux cubiques se ramène à un scalaire; il s'ensuit qu'on obtient le coefficient de réfraction $\tilde{n}^2 = \varepsilon(\omega)$, ce qui correspond à l'indépendance totale des propriétés optiques du cristal par rapport à la direction de la propagation de la lumière et à sa polarisation. Mais si on tient compte de cette dispersion, le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ ne se ramène plus à un scalaire (cf. (10.52)). En portant ce tenseur dans l'équation (10.27) on obtient les valeurs de $\tilde{n}^2$ qui dépendent tant de la direction de la propagation de la lumière que de sa polarisation, ce qui correspond précisément à l'anisotropie optique du cristal. Puisque les coefficients α_{ijlm} et β_{ijlm} sont de l'ordre du carré du pas du réseau $a \sim 10^{-8} - 10^{-7}$ cm, l'anisotropie est faible (pour $\varepsilon_{ij} \sim 1$, $\tilde{n} \sim 1$, cet effet est de l'ordre de $(\omega a/c)^2 = (2\pi a/\lambda_0)^2 \sim 10^{-4} - 10^{-5}$). Pour les cristaux cubiques de différentes classes la dépendance de $\tilde{n}^2$ par rapport à la direction $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$ et la polarisation, est examinée en détail dans [57].

Passons à la question des ondes nouvelles (complémentaires) qui apparaissent si l'on tient compte de la dispersion spatiale. La possibilité de leur apparition est rendue évidente par l'équation de dispersion générale (10.27). En effet, si on néglige la dispersion spatiale, cette équation devient équation quadratique par rapport à l'indice de réfraction $\tilde{n}^2$ (c.-à-d. équation biquadratique par rapport à l'indice $\tilde{n}$). C'est pourquoi, comme nous l'avons noté, l'équation de dispersion admet seulement deux solutions $\tilde{n}_1^2$ et $\tilde{n}_2^2$ associées à deux ondes normales (les oscillations longitudinales n'entrent pas ici en ligne de compte; les solutions $\tilde{n}_{1,2}$ et $-\tilde{n}_{1,2}$ correspondent à deux directions opposées de la propagation des ondes, mais non pas à des modes d'onde différents). Mais si on tient compte de la dispersion spatiale, les coefficients de l'équation de dispersion (10.27) dépendent eux-même de $\tilde{n}$ à travers $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}(\omega))$, $\mathbf{k}(\omega) = \frac{\omega}{c}\tilde{n}(\omega)\,\mathbf{s}$, puisque pour les ondes normales, ω et $\mathbf{k}$ sont précisément liés entre eux par l'équation de dispersion. Il en résulte que cette équation peut en principe avoir autant de solutions que l'on veut. Cependant en fait, le nombre de racines, en tous cas, des racines à amortissement peu fort, est en général relativement petit. Ce qui vient d'être

dit est vrai à l'avance dans le cas d'une dispersion spatiale faible, lorsqu'il s'agit seulement d'une ou de deux ondes (racines) nouvelles. Qui plus est, en optique, il est difficile d'observer même de telles ondes et jusqu'à présent elles n'ont été décelées que par le biais, à travers la diffusion de combinaison (diffusion Raman) de la lumière (cf. [136]). Pourtant l'étude des ondes nouvelles qui apparaissent, si l'on tient compte de la dispersion spatiale, présente certainement de l'intérêt.

En se proposant d'étudier dans ce qui suit la propagation des ondes, en particulier au voisinage des bandes d'absorption, utilisons le développement du tenseur inverse de la permittivité qui dans le cas le plus général peut s'écrire

$$\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \tilde{\varepsilon}_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) + i\delta_{ijl}(\omega, k)\frac{\omega\tilde{n}}{c}s_l, \tag{10.53}$$

où $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et $\delta_{ijl}(\omega, \mathbf{k})$ sont des tenseurs qui sont des fonctions paires de $\mathbf{k}$ ($\tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega, -\mathbf{k}) = \tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, $\delta_{ijl}(\omega, -\mathbf{k}) = \delta_{ijl}(\omega, \mathbf{k})$, de plus, le tenseur $\delta_{ijl} \neq 0$ seulement dans les cristaux qui ne possèdent pas de centre d'inversion. La dispersion spatiale étant petite (ce qui est supposé) on ne retient dans le développement de $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et δ_{ijl} en série par rapport à $\mathbf{k}$ que les premiers termes. L'expression (10.53) est utilisée ainsi sous la forme équivalente à celle examinée plus haut.

Pour des ondes non longitudinales dans un milieu le vecteur d'induction $\mathbf{D} \neq 0$. C'est pourquoi il est commode d'étudier ces ondes dans un système de coordonnées où l'axe des z est dirigé suivant $\mathbf{k}$ et où, en vertu de la relation $(\mathbf{kD}) = 0$, le vecteur d'induction vérifie l'égalité $D_z \equiv D_3 = 0$. Dans ce système, les équations vérifiées par les composantes du vecteur d'induction différentes de zéro (équations équivalentes à l'équation vectorielle principale (10.22) sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{\tilde{n}^2} - \tilde{\varepsilon}_{xx}^{-1}\right)D_x - \tilde{\varepsilon}_{xy}^{-1}D_y &= i\frac{\omega}{c}\tilde{n}\delta_{123}D_y, \\ -\tilde{\varepsilon}_{yx}^{-1}D_x + \left(\frac{1}{\tilde{n}^2} - \tilde{\varepsilon}_{yy}^{-1}\right)D_y &= -i\frac{\omega}{c}\tilde{n}\delta_{123}D_x. \end{aligned}\right\} \tag{10.54}$$

Choisissons les axes x et y de façon qu'ils soient dirigés suivant les axes principaux du tenseur bidimensionnel $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega, 0) = \varepsilon_{ij}(\omega)$ et désignons les valeurs principales de ce tenseur par $1/\tilde{n}_{01}^2$ et $1/\tilde{n}_{02}^2$. Ce choix des axes ramène les composantes $\tilde{\varepsilon}_{xy}^{-1}$ et $\tilde{\varepsilon}_{yx}^{-1}$ aux petites grandeurs d'ordre k^2. En égalant le déterminant du système (10.54) à zéro, on obtient l'équation permettant de déterminer les valeurs

éventuelles de $\tilde{n}^2$. Si dans cette équation on omet les termes d'ordre k^3, k^4, etc., on obtient

$$\left(\frac{1}{\tilde{n}^2} - \tilde{\varepsilon}_{xx}^{-1}\right)\left(\frac{1}{\tilde{n}^2} - \tilde{\varepsilon}_{yy}^{-1}\right) = \delta_{123}^2(\omega, \mathbf{k})\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{n}^2. \qquad (10.55)$$

Si dans l'équation (10.55) on pose $\delta_{123} = 0$ et $\mathbf{k} = 0$, alors ses solutions $\tilde{n}_{1,2}^2 = \tilde{n}_{01,2}^2$ coïncident, certes, avec les solutions de l'équation de Fresnel de $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\omega)$. Mais si $\delta_{123} \neq 0$ et $\mathbf{k} \neq 0$, alors, pour la direction donnée s, l'équation (10.55) détermine déjà pour $\tilde{\varepsilon}_{xx}^{-1} = \varepsilon_{xx}^{-1}(\omega)$ et $\tilde{\varepsilon}_{yy}^{-1} = \varepsilon_{yy}^{-1}(\omega)$ non pas deux mais, en général, plusieurs valeurs de l'indice de réfraction (dans cette approximation, pour les ondes non longitudinales l'équation (10.55) coïncide, comme il se doit, avec (10.27).

L'exploration de l'équation (10.55) devient particulièrement simple pour les milieux qui sont optiquement isotropes lorsque la dispersion spatiale est éliminée.

Pour un milieu isotrope $\tilde{\varepsilon}_{xx}^{-1}(\omega, 0) = \tilde{\varepsilon}_{yy}^{-1}(\omega, 0) = 1/\varepsilon(\omega)$. Dans ce cas, comme on le voit aisément de (10.55), lorsque $\delta_{123} \neq 0$, la dépendance des grandeurs $\tilde{\varepsilon}_{xx}^{-1}$, $\tilde{\varepsilon}_{yy}^{-1}$ et δ_{123} de $\mathbf{k}$ lorsque $\delta_{123} \neq 0$, peut être négligée, de sorte que pour déterminer les grandeurs $\tilde{n}^2$ au lieu de (10.55) on obtient l'équation

$$\left(\frac{1}{\tilde{n}^2} - \frac{1}{\varepsilon(\omega)}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\delta_{123}^2\tilde{n}^2. \qquad (10.56)$$

Il est évident que la résolution de cette équation par rapport à $\tilde{n}^2$ fournit trois valeurs: $\tilde{n}_1^2$, $\tilde{n}_2^2$, $\tilde{n}_3^2$. Il se peut qu'à toutes les trois racines de (10.56) correspondent des longueurs d'onde relativement grandes, ce qui autorise donc d'examiner toutes les trois solutions dans le cadre d'une approche macroscopique. En particulier, au voisinage de la résonance (c.-à-d. pour $\omega = \omega_i$, où $\varepsilon(\omega_i) \to \infty$,) on peut négliger la dépendance de δ_{123} par rapport à ω et admettre que dans cette plage de fréquences la fonction $\varepsilon(\omega)$ est connue; alors en résolvant l'équation (10.56) nous trouverons dans le domaine de la résonance toutes les trois valeurs de $\tilde{n}^2(\omega)$ pour contrôler la validité de la condition $an/\lambda_0 \ll 1$ (cf. (10.20)). L'analyse des résultats obtenus est exposée en détail au § 6.3 de [57]. Nous ne donnerons donc ici que quelques résultats relatifs au cas où l'absorption n'est pas prise en considération. Les grandeurs δ_{123} et $\varepsilon(\omega)$ sont alors réelles et dans le domaine $\omega \approx \omega_i$ on peut poser

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{2A\omega_i^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \approx \varepsilon_0 - \frac{A}{\xi}, \qquad (10.57)$$

où $\xi = (\omega - \omega_i)/\omega_i$, $A = 2\pi e^2 N_{eff}/m\omega_i^2$; ici e et m sont la charge et la masse d'un électron libre; N_{eff}/N est la force de l'oscillateur, où N est le nombre total d'électrons dans une unité de volume et N_{eff}, la partie des électrons qui déterminent « efficacement » les propriétés optiques du milieu dans le domaine du spectre considéré.

L'allure des courbes $n(\xi)$ obtenues par résolution de l'équation (10.56) est matérialisée pour ce cas par la figure 10.1. Les courbes de dispersion de cette figure présentent cette particularité qu'à droite du point $\xi_m = (\omega_m - \omega_i)/\omega_i$ il n'existe qu'une seule solution réelle, alors qu'à gauche de ce point, il y en a trois. Notons qu'aux racines multiples (c.-à-d. au point ξ_m correspond la valeur de la fréquence ω_m qui satisfait à l'équation

$$\varepsilon(\omega_m) = {}^1/_3 2^{2/3} \left(\frac{\omega_m}{c}\delta_{123}\right)^{-2/3}. \quad (10.58)$$

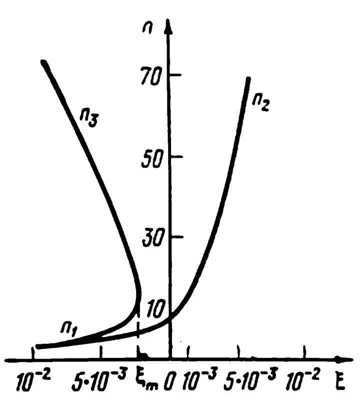


Fig. 10.1. Relation entre les indices de réfraction n_1, n_2, n_3 et $\xi = (\omega - \omega_i)/\omega_i$ près de la fréquence de résonance ω_i dans le cas du milieu gyrotrope, mais isotrope et non absorbant

Dans le cas d'un milieu isotrope non gyrotrope, la solution de l'équation (10.55) est encore plus simple. Puisque ce cas, tout en vérifiant l'égalité $\tilde{\varepsilon}_{xx}^{-1}(\omega, 0) = \tilde{\varepsilon}_{yy}^{-1}(\omega, 0) = 1/\varepsilon(\omega)$, vérifie également la condition $\delta_{123} = 0$, l'équation (10.55) devient

$$\frac{1}{\tilde{n}^2} - \frac{1}{\varepsilon(\omega)} = \frac{\omega^2}{c^2}\beta\tilde{n}^2. \quad (10.59)$$

Cette équation se déduit de (10.55) si l'on admet que

$$\tilde{\varepsilon}_{xx}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \tilde{\varepsilon}_{yy}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\varepsilon(\omega)} + \beta k^2 \equiv \varepsilon^{-1}(\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\beta\tilde{n}^2.$$

L'équation (10.59) définit deux valeurs de l'indice de réfraction $\tilde{n}_{1,2}^2$, qui correspondent à la même polarisation de la lumière; d'autre part

$$\tilde{n}_{1,2}^2 = -\frac{1}{2\varepsilon(\omega)\beta'} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\varepsilon(\omega)\beta'}\right)^2 + \frac{1}{\beta'}}, \quad (10.60)$$

où $\beta' = (\omega^2/c^2)\beta$. Pour $\beta' < 0$, (10.60) entraîne qu'à la fréquence $\omega = \omega_m$ donnée par l'équation

$$\varepsilon(\omega_m) = 1/2(\beta')^{-1/2}, \quad (10.61)$$

les racines $\tilde{n}_1^2$ et $\tilde{n}_2^2$ sont égales. Par conséquent, le point associé à la fréquence ω_m est le point ξ_m. Mais si $\beta' > 0$, le point d'inflexion n'apparaît pas. La dépendance des racines $\tilde{n}_1^2$ et $\tilde{n}_2^2$ par rapport à la fréquence au voisinage de la résonance, avec l'utilisation de l'expression (10.57) et des valeurs de $\beta' = \pm 10^{-5}$, est visualisée sur la figure 10.2. En général, l'amortissement modifie sensiblement le caractère de la relation entre $\tilde{n}_{1,2}^2$ et ω. Notons également que dans le cas d'un milieu anisotrope non gyrotrope, la situation par rapport à la dispersion joue qualitativement le même rôle que pour un milieu isotrope. La seule différence qui présente de l'intérêt

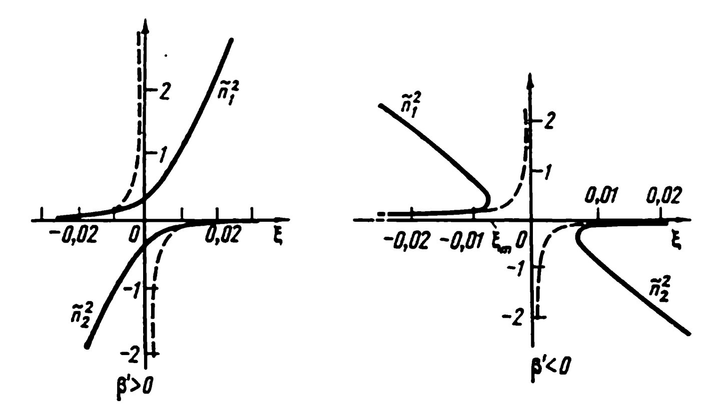


Fig. 10.2. Relation entre $\tilde{n}^2$ et $\xi = (\omega - \omega_i)/\omega_i$ au voisinage de la fréquence ω_i dans le cas d'un milieu isotrope et non absorbant, mais non gyrotrope
Les pointillés correspondent à $\beta' = 0$. En ordonnées, les quantités $10^{-3}\ \tilde{n}^2$

est que pour le milieu anisotrope, où les résonances des quantités n_{01}^2 et n_{02}^2 vérifiant l'équation (10.55) pour $\delta_{123} = 0$ et $\mathbf{k} = 0$ ne coïncident pas en général, la nouvelle onde du mode 1 apparaît près de la résonance n_{01}, et la nouvelle onde du mode 2, près de la résonance n_{02}. L'allure des courbes de dispersion et la polarisation des ondes nouvelles (complémentaires) dans un milieu anisotrope (tant gyrotrope que non gyrotrope) font l'objet de l'article [130]. Nous n'avons aucune raison de nous attarder ici à examiner les détails, puisque les ondes nouvelles se prêtent plutôt mal à l'observation, bien qu'on puisse espérer que dans l'avenir les problèmes expérimentaux correspondants soient tout de même résolus (nous ne parlons pas de la méthode de diffusion de combinaison susmentionnée qui a déjà permis d'observer l'onde nouvelle [136]). Il est quelquefois important d'évaluer la dispersion spatiale dans certains cas de la théorie des ondes superficielles de la gamme optique, ou

comme on dit plus souvent, dans la théorie des excitons superficiels (cf. [57, 137, 138]).

Cependant, il convient de souligner encore une fois la faiblesse des effets de la dispersion spatiale en optique; ceci est dû à la petitesse des coefficients $(\omega/c)\,\delta \sim 2\pi a/\lambda \sim 10^{-2} - 10^{-3}$ et $\beta' = (\omega^2/c^2)\,\beta \approx 4\pi^2 a^2/\lambda^2 \sim 10^{-4} - 10^{-5}$. Il est donc clair que dans nombre de problèmes la dispersion spatiale peut être négligée. Mais on comprend aussi bien pourquoi de nos jours, lorsque la technique des mesures se perfectionne, lorsque les phénomènes et les objets mis à l'étude sont de plus en plus nombreux, l'intérêt de la dispersion spatiale en optique (même sans parler de la physique du plasma) devient de plus en plus grand.

16—0406

CHAPITRE 11

PERMITTIVITÉ ET PROPAGATION DES ONDES DANS LE PLASMA

Permittivité du plasma (théorie élémentaire et cinétique). Propagation des ondes dans le plasma isotrope homogène et dans le magnétoplasma homogène

Le plasma typique est un gaz fortement ou complètement ionisé. On donne souvent aussi le nom de plasma au gaz faiblement ionisé et au gaz électronique ou au liquide électronique des semi-conducteurs et des métaux (dans les deux derniers cas relatifs aux corps solides on dit qu'il s'agit de plasma de l'état solide). Les plasmas différents ont assurément des traits communs. Dans ce qui suit, nous traiterons pourtant seulement du plasma de gaz non relativiste; pour sa description il suffit de faire appel à l'approximation classique en appliquant l'équation cinétique non relativiste classique. C'est précisément ce plasma qui dans la plupart des cas fait l'objet de l'étude en astrophysique, en physique de l'ionosphère, dans l'exploration de la fusion thermonucléaire qui recourt à un plasma peu dense (la situation se complique avec le chauffage et la compression des grains d'hydrogène lourd condensé par le rayonnement laser ou par les faisceaux électroniques intenses).

Le nombre de travaux consacrés au plasma et notamment à la propagation des ondes dans ce milieu, est immense: il s'agit de dizaines de milliers d'articles. Les questions et les problèmes qui se posent dans ce domaine ainsi que dans divers cas particuliers sont si multiples que leur description demanderait une grande série d'ouvrages. Ces ouvrages existent déjà et nous mentionnerons entre autres les monographies [45, 64, 129, 139-142] et les tours d'horizon [143-146] qui comportent également d'abondantes bibliographies. Aussi n'aborderons-nous dans notre livre que quelques questions relatives à la physique du plasma en le faisant pour deux raisons. La première, c'est que l'exemple du plasma permet d'illustrer et d'expliquer plusieurs résultats concernant la théorie des milieux dispersifs (cf. chapitre 10). La deuxième est définie par le fait que le plasma est un objet d'importance exceptionnelle pour l'astrophysique et la physique de l'ionosphère. Or, la part qui lui est réservée dans les cours classiques de l'électromagnétisme est, dans les cas courants, tout à fait insuffisante, alors que les cours

spéciaux de la physique du plasma ne sont pas l'apanage de tous les étudiants, loin de là. Par conséquent, même la discussion dans le présent chapitre de quelques-unes des questions relatives à la physique du plasma peut être utile, ou au moins commode, pour les lecteurs (certains résultats et remarques sur la physique du plasma sont donnés dans les chapitres précédents, surtout au chapitre 7, mais de même que dans les autres cas, nous ne craignons pas les répétitions). Pour plus de détails sur les questions envisagées, on peut consulter les références indiquées (il va de soi que le présent chapitre s'apparente surtout aux monographies [64, 139]).

Dans ce qui suit, nous n'envisageons que deux problèmes: le calcul du tenseur de permittivité du plasma $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et l'étude de la propagation de différentes ondes normales dans un plasma homogène. Si l'on tient compte de l'agitation thermique et en présence d'un champ magnétique extérieur $\mathbf{H}_0 \equiv \mathbf{B}_0$, le calcul du tenseur ε_{ij} et l'exploration ultérieure des ondes normales sont généralement assez compliqués ou tout au moins lourds. Comme nous nous proposons de mettre en évidence le sens, le fond physique et non pas les détails multiples, nous progresserons des problèmes simples aux problèmes plus compliqués.

Voici la position la plus simple du problème: examinons un plasma isotrope (c.-à-d. posons $\mathbf{H}_0 = 0$) et négligeons l'agitation thermique. Alors, (ainsi, qu'avec $\mathbf{H}_0 \neq 0$ mais toujours en négligeant l'agitation thermique) pour calculer ε_{ij} il suffit d'appliquer ce qu'on appelle « théorie élémentaire » qui se ramène à l'examen du mouvement ordonné des particules isolées (électrons et ions) dans un champ électrique de fréquence ω.

Admettons pour simplifier que la charge des ions est simple (pour l'hydrogène cette condition est remplie automatiquement), éliminons la présence éventuelle des ions négatifs et, enfin, utilisons la condition de quasi-neutralité $N \equiv N_e = N_i$ (ici N_e et N_i sont les concentrations respectives des électrons et des ions; la charge de l'électron $e < 0$). Il est évident que dans les conditions de quasi-neutralité le plasma ne possède pas de charge volumique, la densité de charge étant $\rho = e(N - N_i)$. Bien sûr, la condition de quasi-neutralité peut être violée, mais lorsqu'il s'agit de grands volumes, cas typique des problèmes astrophysiques et ionosphériques, la différence $|N - N_i| \ll N$. Ceci est confirmé par les estimations qui font appel à l'équation du champ

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho = 4\pi e(N - N_i) \tag{11.1}$$

et qui tiennent compte du courant qui apparaît dans le plasma en présence d'un champ; dans la plupart des cas sous l'action de ce courant la charge volumique disparaît assez vite (ceci ne se rapporte pas à la charge spatiale au voisinage des charges extérieures appor-

tées dans le plasma ou aux champs au voisinage des charges isolées constitutives du plasma; cf. plus loin).

La densité de courant d'un plasma isotrope s'écrit

$$\mathbf{j}=e\sum_{n=1}^{N}(\dot{\mathbf{r}}_n-\dot{\mathbf{r}}_n^{(i)})=-\frac{i\omega\mathbf{D}-\mathbf{E}}{4\pi}=\mathbf{j}_{\text{cond}}-i\omega\mathbf{P}=$$

$$=\left(\sigma-i\frac{\varepsilon'-1}{4\pi}\omega\right)\mathbf{E}=-\frac{i\omega}{4\pi}(\varepsilon-1)\mathbf{E}. \tag{11.2}$$

Ici $\mathbf{j}_{\text{cond}}=\sigma\mathbf{E}$ est la densité de courant de conductivité; $\mathbf{P}=\frac{\varepsilon'-1}{4\pi}\mathbf{E}$ est la polarisation; $\varepsilon\equiv\varepsilon'+i\varepsilon''\equiv\varepsilon'+i4\pi\sigma/\omega$, la permittivité complexe ($\varepsilon'=\operatorname{Re}\varepsilon$; σ est la conductivité) et le champ électrique $\mathbf{E}$ est considéré comme un champ monochromatique ($\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\exp(-i\omega t)$). Cette forme de l'expression (11.2) est choisie pour expliquer les notations qu'on trouve dans la littérature *). La quasi-neutralité de (11.2) n'est appliquée que pour la sommation suivant le nombre de particules (il est évident que dans (11.2) $\mathbf{r}_n$ est le rayon vecteur du n-ième électron et $\mathbf{r}_n^{(i)}$, le rayon vecteur du n-ième ion).

En l'absence du champ magnétique extérieur $\mathbf{H}_0$, si on ne tient pas compte des collisions et si l'étude est localisée (c.-à-d. si on néglige la dispersion spatiale en admettant que le champ $\mathbf{E}$ est homogène), les équations du mouvement des électrons et des ions s'écrivent

$$m\ddot{\mathbf{r}}_n=e\mathbf{E}_0\exp(-i\omega t),\quad M\ddot{\mathbf{r}}_n^{(i)}=-e\mathbf{E}_0\exp(-i\omega t), \tag{11.3}$$

où m et M sont la masse des électrons et la masse des ions respectivement.

On en tire, par exemple,

$$\mathbf{r}_n=-\frac{e\mathbf{E}}{m\omega^2}+\mathbf{r}_n^{(0)},$$

où $\mathbf{r}_n^{(0)}$ est le rayon vecteur de l'électron en l'absence de champ. On voit aisément qu'en vertu de (11.2) et (11.3)

$$\mathbf{P}=\frac{\varepsilon'-1}{4\pi}\mathbf{E}=-\frac{e^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)N\mathbf{E},$$

et les termes $\mathbf{r}_n^{(0)}$ et $\mathbf{r}_n^{(i,\,0)}$ disparaissent, puisque par hypothèse, sans champ, $\mathbf{P}=0$. L'apport des ions n'est qu'une correction d'ordre $m/M\lesssim 10^{-3}$; il sera donc omis.

*) Il faut encore avoir en vue qu'on utilise souvent les champs sous la forme $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\exp(i\omega t)$ ce qui détermine l'apparition des grandeurs complexes conjuguées. D'autre part, le courant de conductivité $\mathbf{j}_{\text{cond}}$ se note plus souvent $\mathbf{j}$, alors que le courant total $i\omega\mathbf{D}-\mathbf{E}/4\pi$ n'est pas introduit ou se note $\mathbf{j}'$ (cf. [69]).

Ainsi,

$$\varepsilon=\varepsilon'=1-\frac{4\pi eN}{m\omega^2}\equiv 1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}=$$
$$=1-3{,}18\cdot 10^9\frac{N}{\omega^2}=1-8{,}06\cdot 10^7\frac{N}{\nu^2},\qquad (11.4)$$

où $\omega_{pe}\equiv\omega_p=\sqrt{4\pi e^2N/m}$ est la fréquence des électrons du plasma; $\nu=\omega/2\pi$ et où on a introduit les grandeurs connues de l'électron ($e=4{,}8\cdot 10^{-10}$ CGSE, $m=9{,}1\cdot 10^{-28}$ g).

Il est bien clair que sous les hypothèses avancées la conductivité est nulle: sans collisions, les électrons et les ions ne transmettent pas leur énergie à d'autres électrons, ions et molécules et ne font qu'osciller sous l'action du champ. Dans le cadre d'une théorie élementaire, l'influence des collisions peut être évaluée en introduisant une force de freinage $m\nu_{\text{eff}}\dot{\mathbf{r}}_n$ égale à la variation moyenne de l'impulsion de la particule par unité de temps. Si l'on admet qu'à chaque collision avec un ion ou une molécule l'électron perd en moyenne l'impulsion tout entière du mouvement ordonné $m\dot{\mathbf{r}}_n$, alors ν_{eff} est le nombre de collisions par seconde. En fait, les variations de l'impulsion diffèrent suivant les collisions différentes; ν_{eff} joue donc le rôle d'un certain nombre de collisions (fréquence) efficace. En toute rigueur, la quantité ν_{eff} n'est pas encore définie de cette façon et on ne fait que supposer que la force de freinage moyenne soit proportionnelle à $\dot{\mathbf{r}}_n$. En fait, d'après les principes de la théorie cinétique des gaz, on sait, par exemple, que dans les collisions avec les molécules, $\nu_{\text{eff}}=\pi a^2N_m\bar{v}$, où a est le rayon efficace des molécules (leur concentration est N_m) et $\bar{v}$, une certaine vitesse thermique moyenne des électrons. Des expressions plus définies de ν_{eff} pour les collisions des électrons avec les molécules et les ions sont fournies par une étude cinétique, mais la quantité ν_{eff} peut être aussi utilisée, elle, dans la théorie élémentaire. En résumé, en tenant compte des collisions

$$m\ddot{\mathbf{r}}_n+m\nu_{\text{eff}}\dot{\mathbf{r}}_n=e\mathbf{E}_0\exp(-i\omega t)\qquad (11.5)$$

et en procédant comme précédemment

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon=1-\frac{4\pi e^2N}{m\omega(\omega+i\nu_{\text{eff}})}\equiv\varepsilon'+i\varepsilon''\equiv\varepsilon'+i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega},\\&\varepsilon'=1-\frac{4\pi e^2N}{m(\omega^2+\nu_{\text{eff}}^2)},\quad \sigma=\frac{1-\varepsilon'}{4\pi}\,\nu_{\text{eff}}=\frac{e^2N\nu_{\text{eff}}}{m(\omega^2+\nu_{\text{eff}}^2)}.\end{aligned}\right\}\qquad (11.6)$$

Dans les cas limites importants on a

$$\varepsilon' = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \quad \sigma = \frac{e^2 N \nu_{eff}}{m\omega^2} = 2{,}53 \cdot 10^8 \frac{N\nu_{eff}}{\omega^2}, \quad \omega^2 \gg \nu_{eff}^2, \qquad (11.7)$$

$$\varepsilon' = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\nu_{eff}^2}, \quad \sigma = \frac{e^2 N}{m\nu_{eff}}, \qquad \omega^2 \ll \nu_{eff}^2. \qquad (11.8)$$

Au domaine de basses fréquences (11.8) la conductivité coïncide, certes, avec la conductivité statistique fournie par la théorie élémentaire ($1/\nu_{eff} = \tau_{eff}$, où τ_{eff} est le temps efficace du libre parcours qu'on utilise de pair avec ν_{eff}).

Pour déduire l'expression de ε, nous avons admis que le champ $\mathbf{E}_a$ appliqué à l'électron est égal au champ macroscopique (moyen) $\mathbf{E}$, du fait que c'était ce champ-là précisément que nous avons porté dans les équations du mouvement (11.3) et (11.5). Or, comme on le sait de la théorie des diélectriques, les champs $\mathbf{E}_a$ et $\mathbf{E}$ ne sont pas en général égaux entre eux et pour les plus simples modèles de diélectriques (cf., par exemple, [147]), $\mathbf{E}_a = \mathbf{E} + {}^4/_3\pi\mathbf{P} = {}^1/_3(\varepsilon + 2)\mathbf{P}$. Pour le plasma et, en général, pour un milieu bon conducteur, cette formule est inapplicable et, par ailleurs, il n'est pas bien simple d'établir la liaison rigoureuse entre $\mathbf{E}_a$ et $\mathbf{E}$ (cf. [64] et sa bibliographie). On peut admettre avec une grande précision que dans un plasma de gaz

$$\mathbf{E}_a = \mathbf{E}, \qquad (11.9)$$

comme nous l'avons adopté dans ce qui précède et comme nous le supposerons dans ce qui suit. Remarquons, pourtant, que dans son application au domaine du plasma de l'état solide (métallique) ainsi que pour évaluer les effets non linéaires, la question du champ actif mérite une analyse plus poussée. Pour ce qui est de cette dernière remarque, soulignons que nous nous bornons partout ici à l'approximation linéaire, c.-à-d. à l'électrodynamique linéaire du plasma. Dans des champs forts (et il faut une analyse spéciale pour définir quand un champ peut être considéré comme fort *), les choses se compliquent sensiblement et c'est là un domaine qui n'a cessé de faire l'objet de nombreuses études (cf. [140, 141, 143, 145, 146]).

Peut-être, il ne serait non plus superflu d'expliquer pourquoi ci-dessus l'une des équations du champ est mise sous la forme (11.1) et non sous la forme $\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \varepsilon\mathbf{E} = 4\pi\rho_{ext}$ (cf., par exemple, (10.1)). C'est que tout simplement on considère qu'il n'y a pas de

*) Par exemple, sans collisions, l'approximation linéaire d'un plasma convient en général tant que la vitesse du mouvement ordonné des électrons est faible devant la vitesse de l'agitation thermique, c.-à-d. $\dot{r} \sim eE_0/m\omega \ll \overline{v} \sim \sim \sqrt{\varkappa T/m}$.

charges extérieures et on utilise l'équation $\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{E} + 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P} = 0$. Ensuite, on adopte comme source de polarisation seulement les électrons et ions concernés; il en résulte que $\operatorname{div} \mathbf{P} = e(N - N_i)$. Autrement dit, le fait que la permittivité diffère de l'unité est déterminé par les électrons et les ions; donc si nous avions mis l'équation sous la forme $\operatorname{div} \varepsilon\mathbf{E} = 4\pi e(N - N_i)$ qui peut à première vue sembler naturelle nous aurions deux fois tenu compte du même effet.

Puisque le domaine d'application des formules élémentaires (11.6)-(11.8) est très large, donnons ici certaines expressions de la fréquence efficace des collisions ν_{eff} (cf. [64]). Le calcul exact des collisions des électrons sur les molécules est en général impossible; on recourt donc largement aux données fournies par les expériences. Mais si une molécule est considérée comme une petite bille solide de rayon a, alors

$$\nu_{eff,m} = \frac{4}{3}\pi a^2 \bar{v} N_m = 8,3 \cdot 10^5 \pi a^2 \sqrt{T} N_m, \quad \omega^2 \gg \nu_{eff}^2, \quad (11.10)$$

$$\nu_{eff,m} = \frac{3\pi}{8}\pi a^2 \bar{v} N_m, \quad \omega^2 \ll \nu_{eff}^2, \quad (11.11)$$

où $\bar{v} = \sqrt{8\varkappa T/\pi m}$ est la vitesse arithmétique moyenne des électrons pour le cas de la distribution équilibrée des vitesses à la température T. La différence entre les expressions (11.10) et (11.11) est négligeable ($4/3 = 1,33$; $3\pi/8 = 1,18$), surtout si l'on songe qu'il s'agit du modèle « limite » de billes solides. Pour autant, cet exemple montre déjà clairement que les formules de la théorie élémentaire sont approximatives et que le nombre efficace de collisions est en fait fonction de la fréquence.

Pour les collisions des électrons sur les ions (avec $N = N_i$)

$$\nu_{eff,i} = \pi \frac{e^4}{(\varkappa T)^2} \bar{v} N \ln\left(0,37 \frac{\varkappa T}{e^2 N^{1/3}}\right) = \frac{5.5N}{T^{3/2}} \ln\left(220 \frac{T}{N^{1/3}}\right), \quad \omega^2 \gg \nu_{eff}^2, \quad (11.12)$$

$$\nu_{eff,i} = \frac{1.6N}{T^{3/2}} \ln\left(324\gamma \frac{T}{N^{1/3}}\right), \quad \gamma \sim 1, \quad \omega^2 \ll \nu_{eff}^2. \quad (11.13)$$

L'expression (11.13) vaut environ un tiers de (11.12) mais une différence aussi grande est, dans une certaine mesure, illusoire. Sous la condition $\omega^2 \gg \nu_{eff}^2$ les collisions interélectroniques ne jouent aucun rôle et l'expression (11.12) reste en vigueur. Pour ce qui est du cas $\omega^2 \ll \nu_{eff}^2$, les collisions interélectroniques interviennent dans $\nu_{eff,i}$ et pour en tenir compte il faut multiplier (11.13) par 1,73. Il en résulte que si l'on tient compte des collisions interélectroniques, la fréquence efficace des collisions des électrons sur

les ions dans le cas haute fréquence vaut à peu près le double du nombre de collisions dans le cas basse fréquence.

Si les expressions exactes (11.12) et (11.13) s'obtiennent seulement par calcul détaillé, leur structure s'établit sans peine à partir des considérations bien simples. La collision d'un électron sur un ion modifie sensiblement la direction de la vitesse de l'électron, si cet électron passe à la distance d'impact $p \sim e^2/\varkappa T$ du ion, lorsque l'énergie coulombienne $e^2/p \sim \varkappa T$, c.-à-d. lorsqu'elle est de l'ordre de l'énergie cinétique de l'électron. On en tire la section correspondante des collisions « proches » $q \sim \pi p^2 \sim \pi e^4/(\varkappa T)^2$. Pourtant, la fréquence des collisions $\nu_{\text{eff},\, i}$ est définie non seulement par des collisions proches mais aussi par des collisions « lointaines » dont l'estimation conduit précisément à l'apparition dans (11.12), (11.13) du facteur logarithmique noté ordinairement L. Ce facteur est typique de la physique du plasma; il est défini par le fait que le champ coulombien décroît lentement (comme $1/r$) avec la distance seulement jusqu'à longueur de Debye de l'effet d'écran qui vaut

$$r_D = \sqrt{\frac{\varkappa T}{8\pi e^2 N}} = 4{,}9\sqrt{\frac{T\,(^\circ\mathrm{K})}{N}}\ \mathrm{cm}. \qquad (11.14)$$

Plus précisément, la répulsion des électrons et l'attraction d'autres ions fait que l'ion donné, de charge e, produit dans le plasma un champ de potentiel $(e/r)\exp(-r/r_D)$ qui ne coïncide avec le champ coulombien e/r que dans le domaine $r \ll r_D$. Avec $r \gg r_D$ le champ n'existe pratiquement pas et dans les collisions entre un électron et un ion dans le plasma c'est précisément la longueur d'ordre r_D qui joue le rôle de paramètre d'impact maximal $p_{\max}$. Le logarithme coulombien se met généralement sous la forme

$$L = \ln\left\{\frac{p_{\max}}{p_{\min}}\right\} = \ln\left\{\frac{3\varkappa T}{2e^2}\left(\frac{\varkappa T}{8\pi e^2 N}\right)^{1/2}\right\} \approx$$

$$\approx \frac{3}{2}\ln\left(220\,\frac{T}{N^{1/3}}\right), \qquad (11.15)$$

où on a posé $p_{\max} = r_D$ et $p_{\min} = 2e^2/{}^3/{}_2\varkappa T$; l'effet d'écran et l'expression (11.14) sont étudiés plus loin (pour une autre méthode cf., par exemple § 4 de [64]).

Outre les réserves déjà faites et qui déterminent le domaine d'application des formules obtenues, il faut également indiquer les limites imposées à l'utilisation de la théorie classique. En l'absence de collisions, la limite quantique de l'étude de l'interaction entre le rayonnement et les électrons libres est définie par la condition

$$\hbar\omega \ll mc^2 = 0{,}51\cdot 10^6\ \mathrm{eV}. \qquad (11.16)$$

Si cette prescription est observée, quels que soient les angles, la diffusion des ondes électromagnétiques sur les électrons libres peut être décrite par le mode classique. Ensuite, l'indice de réfrac-

tion $n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon'}$ (admettons que $\omega^2 \gg \nu_{eff}^2$) est déterminé en fait par la diffusion des ondes sur les particules du milieu, d'où résulte finalement la validité de l'expression (11.14). On peut s'en convaincre également par d'autres moyens. Si l'on tient compte des collisions et calcule l'absorption (c.-à-d. la conductivité $\sigma = \omega\varepsilon''/4\pi$), il faut également avoir en vue la condition

$$\hbar\omega \ll \varkappa T = 1{,}38\cdot 10^{-16} T \ (^\circ\mathrm{K}). \qquad (11.17)$$

Cette condition traduit la petitesse de l'énergie des photons devant l'énergie cinétique des électrons (pour plus de détails sur cette condition cf., par exemple, § 3 de [64]). Puisqu'il s'agit du plasma non relativiste tel que

$$\varkappa T \ll mc^2, \qquad (11.18)$$

l'inégalité (11.17) est bien plus serrée que la condition (11.16) mais, comme nous l'avons dit, la prescription (11.17) ne joue aucun rôle dans le calcul de la quantité ε' (pour $\omega^2 \gg \nu_{eff}^2$).

Une application inconditionnelle de la théorie classique impose également que le gaz électronique reste non dégénéré ; ceci est équivalent à la prescription

$$T \gg T_0 \sim \hbar^2 N^{2/3}/m\varkappa. \qquad (11.19)$$

Voici le sens de la température de dégénérescence T_0 ; à cette température, l'énergie $\varkappa T_0$ est de l'ordre de l'énergie nulle

$$\frac{\hbar^2}{m\bar{r}^2} \sim \frac{\hbar^2}{m} N^{2/3}$$

associée à la localisation de l'électron dans un volume d'ordre $\bar{r}^3 \sim \sim 1/N$.

Dans la plupart des cas (bien qu'il ne soit pas toujours ainsi, loin de là) les conditions (11.16)-(11.19) sont remplies; il s'avère alors que les contraintes associées à la non-estimation de la dispersion spatiale sont beaucoup plus importantes. D'après le sens même de la dispersion spatiale (cf. chapitre 10) celle-ci n'est négligeable que dans le cas où le champ (disons, le champ d'onde de fréquence ω et de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$) varie peu sur la distance responsable de la production de la « réponse » du milieu, par exemple, à la polarisation **P** due à l'action du champ **E**. Si on tient compte de l'agitation thermique, l'électron passe dans le plasma en une période $\tau = 2\pi/\omega$ la distance $\xi \sim \tau\bar{v} \sim \sqrt{\varkappa T/m}\tau$. Ce qui vient d'être dit rend clair que la dispersion spatiale peut être négligée sous la condition $\xi \ll \lambda$, c.-à-d.

$$\omega \gg k\bar{v} \approx \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}. \qquad (11.20)$$

Pour une onde qui se propage dans un milieu

$$E \sim \exp i\,(kz - \omega t) \sim \exp i\omega\,(z/v_{\text{ph}} - t),$$

et il est évident que la vitesse de phase de l'onde est égale à

$$v_{\text{ph}} = \omega/k. \tag{11.21}$$

Ceci ainsi que (11.20) rend clair que la dispersion spatiale des ondes qui se propagent librement dans un plasma peut être négligée si

$$v_{\text{ph}} \gg \bar{v} \sim \sqrt{\varkappa T/m}. \tag{11.22}$$

La négligence de la dispersion spatiale a été traduite par le fait que le champ de (11.3), au lieu d'être mis sous la forme

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\,[i\,(\mathbf{k}\mathbf{r}_n\,(t) - \omega t)],$$

s'est écrit $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$.

Puisque négliger la dispersion spatiale équivaut à négliger l'agitation thermique des particules du plasma, on évoque l'approximation du plasma « froid». Autrement dit, le plasma envisagé sans l'agitation thermique s'appelle plasma froid.

En anticipant quelque peu, remarquons que pour les ondes du champ transversal d'un plasma non relativiste la prescription (11.22) est toujours satisfaite. Dans le cas du champ longitudinal, au contraire, cette prescription est facilement compromise. Le meilleur moyen d'établir exactement et sûrement les conditions qui permettent d'ignorer la dispersion spatiale, consiste assurément à effectuer l'analyse de la situation qui se présente, à partir des expressions générales qui ont servi pour évaluer cette dispersion. Nous envisagerons ici seulement la méthode la plus usitée et la plus générale, celle de l'équation cinétique, qui permet d'évaluer la dispersion fréquentielle et spatiale.

Décrivons l'état d'un plasma par la fonction de distribution $f\,(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ telle que le nombre moyen de particules dN dans le volume $d\mathbf{r}\,d\mathbf{v} = dx\,dy\,dz\,dv_x\,dv_y\,dv_z$ soit $dN = f\,(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}$, où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur et $\mathbf{v}$, la vitesse des particules. Alors, par définition (c'est la condition de normalisation)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\,(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})\,d\mathbf{v} = N, \tag{11.23}$$

où N est la concentration des particules (pour simplifier là et plus loin il s'agit des électrons, c.-à-d. $f \equiv f_e$ et $N \equiv N_e$; dans le cas des ions ou des molécules l'indice e doit être remplacé par i ou m respectivement).

L'équation cinétique qui détermine la fonction f est de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}}f+\frac{e}{m}\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right)\nabla_{\mathbf{v}}f+\mathscr{S}=0, \qquad (11.24)$$

où e et m sont la charge et la masse des particules concernées; **E** et **H**, les intensités des champs électrique et magnétique appliqués aux particules (pratiquement, on peut admettre que ce sont des champs macroscopiques moyens) et

$$\nabla_{\mathbf{r}}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

$$\nabla_{\mathbf{v}}f=\frac{\partial f}{\partial v_x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial v_y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial v_z}\mathbf{k}$$

(bien entendu, les coordonnées retenues peuvent aussi bien être autres que cartésiennes qui ne servent qu'à des buts de concrétisation); la quantité $\mathscr{S}$ de (11.24) est ce qu'on appelle intégrale des collisions (des chocs) qui rend compte de la variation de la fonction f sous l'effet des collisions dans le domaine $d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}$ des particules de la sorte donnée (par exemple, des électrons) avec les particules d'autres sortes, ainsi qu'avec les autres particules du même type se trouvant dans les autres domaines de l'espace de phase). On peut inclure également dans $\mathscr{S}$ les termes qui définissent la variation de la fonction f sous l'effet d'ionisation, de recombinaison, etc.

En l'absence des champs à l'état d'équilibre, les fonctions de distribution des électrons et des ions sont des fonctions maxwelliennes (on peut en dire autant des molécules, mais nous ne les envisageons pas ici)

$$\left.\begin{aligned} f_e&\equiv f=f_{00}(v)=N\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2\varkappa T}\right),\\ f_i&=f_{i,00}(v)=N_i\left(\frac{M}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{Mv^2}{2\varkappa T}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (11.25)$$

Nous admettons que les températures des électrons et des ions sont les mêmes. A l'état d'équilibre total il en sera assurément ainsi *). Il faut pourtant avoir en vue que, dans le plasma, l'échange

*) A l'état d'équilibre total, non seulement les particules doivent avoir la même température T, mais encore le rayonnement électromagnétique doit être de nature thermique (rayonnement du corps noir) et avoir la même température T. Toutefois, dans les cas courants, cette dernière prescription n'est pas respectée: pourtant souvent ceci ne joue aucun rôle, vu la faiblesse relative de l'interaction entre les particules et le rayonnement. Mais, bien entendu, dans chaque cas concret, il faut voir s'il est possible de négliger l'influence du rayonnement sur la fonction de distribution des particules. A titre d'exemple d'une situation où la fonction de distribution ne sera pas celle d'un état d'équilibre dans les conditions où le rayonnement n'est non plus à l'état d'équilibre, donnons le gaz des électrons relativistes placé dans un champ magnétique fort (par exemple au voisinage des pulsars). Alors, les grandes pertes par rayonnement de freinage magnétique font que la fonction de distribution des électrons doit être en général fortement anisotrope (cf., par exemple, chapitre 4 et [129b]).

d'impulsion (relaxation suivant l'impulsion) est bien plus rapide que l'échange d'énergie (il en est ainsi du fait de la petitesse du paramètre $m/M \leqslant 10^{-3}$; pour les détails, cf. [64]). C'est pourquoi parfois on peut examiner le plasma non isothermique à distribution maxwellienne (11.25), mais de températures électronique T_e et ionique T_i respectivement (il arrive même que $T_e \gg T_i$).

Si nous nous intéressons aux problèmes de la théorie linéaire (en particulier, à l'électrodynamique linéaire), nous pouvons admettre que le champ électrique **E** est faible *), et conformément à ce fait envisager la variation de la fonction de distribution comme une perturbation. Autrement dit, nous chercherons la fonction de distribution sous la forme

$$f = f_{00}(\mathbf{v}) + f'(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad |f'| \ll f_{00}, \tag{11.26}$$

où pour calculer le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ dans le plasma à l'état d'équilibre, nous choisirons comme fonction non perturbée f_{00} la distribution maxwellienne (11.25); ci-dessous nous allons nous borner à ce cas.

Alors, en l'absence du champ magnétique extérieur $\mathbf{H}_0$ on obtient en première approximation

$$\frac{\partial f'}{dt} + \mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} f' + \frac{e}{m}\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{v}} f_{00} + \mathcal{S} = 0. \tag{11.27}$$

La forme de l'intégrale des collisions $\mathcal{S}$ en général et dans le plasma en particulier a fait l'objet d'une analyse détaillée (cf. [139] et sa bibliographie). Ici nous allons nous borner au cas le plus simple lorsque dans l'équation de la fonction de distribution des électrons, on peut poser $\mathcal{S} = \{\nu_m(v) + \nu_i(v)\} f'$, où ν_m traduit la contribution des collisions des électrons sur les molécules, et ν_i de leurs collisions sur les ions (une interprétation bien simple de cette expression pour $\mathcal{S}$ est donnée au § 4 de [64]). En examinant ensuite le champ $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$ et la fonction $f' = f'_{\omega, k}(\mathbf{v}) \times \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$, on obtient de (11.27)

$$-i(\omega - \mathbf{kv}) f' + \frac{e}{m}(\mathbf{Ev})\frac{1}{v}\frac{\partial f_{00}(v)}{\partial v} + \nu(v) f' = 0, \tag{11.28}$$

qui rend compte du fait que $\nabla_{\mathbf{v}} f_{00} = \frac{\partial f_{00}}{\partial v}\frac{\mathbf{v}}{v} = -\frac{mv}{\varkappa T} f_{00}\frac{\mathbf{v}}{v}$ et où on a posé $\nu = \nu_m + \nu_i$. On en tire

$$f' = -i\frac{e}{m}\frac{(\mathbf{Ev})}{(\omega - \mathbf{kv} + i\nu(v))}\frac{1}{v}\frac{\partial f_{00}}{\partial v} = i\frac{e}{\varkappa T}\frac{(\mathbf{Ev}) f_{00}}{(\omega - \mathbf{kv} + i\nu(v))}. \tag{11.29}$$

*) Dans un champ constant homogène $\mathbf{H}_0$, la fonction de distribution à l'état d'équilibre reste maxwellienne, bien que la trajectoire des particules isolées dans un champ et sans champ soient différentes (cf. également plus loin). Par ailleurs, le terme de (11.24) contenant le champ magnétique compte le facteur v/c. C'est pourquoi les contraintes imposées au champ magnétique diffèrent de celles imposées au champ électrique.

Ensuite, par définition, pour la densité de courant ou, plus précisément, pour la composante de Fourier correspondante, on a

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i\omega}{4\pi}(\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - \delta_{ij}) E_j(\omega, \mathbf{k}) = e \int v_i f'_{\omega, \mathbf{k}}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{v}. \quad (11.30)$$

En portant (11.29) dans (11.30), on obtient

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi e^2}{m\omega} \int \frac{v_i v_j}{\omega - \mathbf{kv} + i\nu(v)} \frac{1}{v} \frac{\partial f_{00}}{\partial v} \, d\mathbf{v}. \quad (11.31)$$

Mais en tenant compte tant des électrons (charge $e = e_1$, masse $m = m_1$) que des ions de différentes sortes (charges e_α, masses m_α, $\alpha = 2, \ldots, l$), on trouve

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + 4\pi \sum_{\alpha=1}^{l} \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha \omega} \int \frac{v_i v_j}{\omega - \mathbf{kv} + i\nu_\alpha(v)} \frac{1}{v} \frac{\partial f_{00.\alpha}}{\partial v} \, d\mathbf{v}. \quad (11.32)$$

(11.28)-(11.32) rendent tout de suite évident que négliger la dispersion spatiale, c.-à-d. la dépendance par rapport à $\mathbf{k}$ équivaut à négliger le terme $\mathbf{kv}$ par rapport à $\omega + i\nu(v)$. Par là même, si on ne tient pas compte de collisions, comme il fallait s'attendre, on aboutit à la condition (11.20).

Pour établir la correspondance avec la théorie élémentaire négligeons dans le dénominateur de (11.31) les termes $-\mathbf{kv} + i\nu(v)$ par rapport à ω. Alors, on obtient immédiatement le résultat (11.4)

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij}, \quad \varepsilon = 1 - 4\pi e^2 N/m\omega^2,$$

puisque

$$\int v_i v_j \frac{m}{\varkappa T} f_{00} \, d\mathbf{v} = \delta_{ij} N.$$

Mais si on néglige le terme $\mathbf{kv}$ tout en tenant compte du terme $i\nu(v)$, on obtient les expressions de la théorie élémentaire données précédemment avec les valeurs correspondantes de la fréquence efficace de collisions ν_{eff} (pour les calculs détaillés, cf. § 6 de [64]). Admettons maintenant que les collisions ne soient pas essentielles, mais tenons compte de la dispersion spatiale. Une question se pose alors, il est vrai, à savoir, comment calculer les intégrales de (11.31) et (11.32) au voisinage du pôle

$$\omega = \mathbf{kv}. \quad (11.33)$$

Le plus simple est de lever cette difficulté en admettant au début que la fréquence de collisions ν tout en étant petite n'est pourtant pas nulle. Le pôle, dans le plan de la variable complexe $u = \mathbf{kv}/k$ se déplace alors en un point $u_0 = (\omega + i\nu)/k$ au-dessus du contour d'intégration (ce qui importe ici c'est que $\nu > 0$), c.-à-d. au-dessus de l'axe des réels u (l'intégration sur $d\mathbf{v}$ dans (11.31) et (11.32) se ramène à l'intégration sur du et sur les projections de la vitesse

perpendiculaires au vecteur **k**). Il s'ensuit que l'intégration peut se faire en utilisant la relation

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{x+i\delta}=\frac{\mathcal{P}}{x}-i\pi\delta(x), \qquad (11.34)$$

où $\mathcal{P}$ signifie que l'intégrale sur le domaine dans le voisinage de la singularité $x=0$ est prise dans le sens de la valeur principale. En appliquant cet artifice, on déduit de (11.31) pour $\nu\to 0$

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})=$$
$$=\delta_{ij}+\frac{4\pi e^2}{m\omega}\int v_i v_j \frac{1}{v}\frac{\partial f_{00}}{\partial v}\left\{\frac{\mathcal{P}}{\omega-\mathbf{kv}}-i\pi\delta(\omega-\mathbf{kv})\right\}d\mathbf{v}. \qquad (11.35)$$

Il en résulte que l'absorption existe également même en l'absence de collisions (la partie imaginaire de ε_{ij} est différente de zéro); de plus, la responsabilité de cette absorption incombe seulement aux particules dont la vitesse vérifie la condition (11.33). Mais la condition (11.33) n'est rien d'autre que la condition du rayonnement Tchérenkov (cf. (6.55)). Par là même, la raison physique de l'absorption, même en l'absence de collisions, devient tout de suite évidente (à première vue, ce résultat peut sembler paradoxal, par exemple, à la lumière de la théorie élémentaire exposée dans ce qui précède). En effet, sous la condition (11.33) une particule (un électron, par exemple) émet des ondes Tchérenkov (pour ces ondes $\omega/k=v_{\text{ph}}=$ $=v\cos\theta$, où θ est l'angle entre **k** et **v**). Mais tout processus de rayonnement peut être inversé; par conséquent, sous la même condition imposée à ω et **k** l'onde doit provoquer l'effet inverse, celui de l'absorption Tchérenkov associée au transfert, de l'onde à la particule, de l'énergie et de l'impulsion correspondantes. Ce qui vient d'être dit n'est, certes, qu'une répétition de l'interprétation de l'amortissement sans collisions, dans un plasma isotrope, que nous avons étudiée au chapitre 7. L'absorption sans collisions des ondes de plasma s'appelle souvent amortissement Landau, puisque [93] l'a mise en évidence en résolvant le problème cinétique aux conditions initiales. Outre l'« interprétation Tchérenkov », l'absorption sans collisions se prête également à une autre interprétation bien simple surtout avec $\cos\theta=1$, lorsque $\omega/k=v_{\text{ph}}=v$; l'onde et la particule se déplacent alors dans le même sens, et la phase de l'onde « sur la particule » est invariable; il s'ensuit que la particule est sans cesse accélérée et donc reçoit de l'énergie fournie par l'onde.

Dans un milieu isotrope (et non gyrotrope), l'expression générale de $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ peut se mettre sous la forme

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})=\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\varepsilon_{tr}(\omega, k)+\frac{k_ik_j}{k^2}\varepsilon_l(\omega, k). \qquad (11.36)$$

En effet, dans ce cas, nous disposons seulement de deux tenseurs δ_{ij} et k_ik_j, alors que le groupement des termes est défini par la pres-

cription imposant que ce ne soit que le tenseur $\varepsilon_l(\omega, k)$ qui « travaille » le long du champ longitudinal. Pour un champ longitudinal le vecteur **E** est dirigé, par définition, le long du vecteur d'onde **k**, c.-à-d. $\mathbf{E}_l \equiv E_{\parallel} = E\mathbf{k}/k$. Dans le cas (11.36), pour un tel champ

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_l(\omega, h)\,\mathbf{E}_l. \tag{11.37}$$

Par contre, pour le champ transversal $\mathbf{E}_{tr} \equiv \mathbf{E}_{\perp}$ vérifiant la condition $(\mathbf{k}\mathbf{E}_{tr}) = 0$,

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{tr}(\omega, k)\,\mathbf{E}_{tr}. \tag{11.38}$$

Les conditions générales (cf. chapitre 10) aussi bien que les expressions de ε_{ij} rendent clair que

$$\varepsilon_{tr}(\omega, 0) = \varepsilon_l(\omega, 0) = \varepsilon(\omega), \tag{11.39}$$

où $\varepsilon(\omega)$ est la permittivité du milieu isotrope, lorsqu'on ne tient pas compte de la dispersion spatiale (cf., par exemple (11.4) ou (11.6)). Les expressions générales de ε_{tr} et ε_l du plasma se basant sur (11.31) et (11.32) sont données, par exemple, dans la monographie [139]. Ici nous n'indiquerons que quelques formules relatives aux cas limites importants (on admet que le plasma est fortement ionisé).

Pour les fréquences « élevées », lorsque

$$\omega \gg kv_{T,\,e,\,i}, \quad \omega \gg \nu_{eff} \tag{11.40}$$

on a *)

$$\varepsilon_{tr} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left[1 - i\frac{\nu_{eff}}{\omega^2} - i\sqrt{1/2\pi}\,\frac{\omega}{kv_{Te}}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2v_{Te}^2}\right)\right], \tag{11.41}$$

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left[1 - i\frac{\nu_{eff}}{\omega^2} + 3\frac{k^2v_{Te}^2}{\omega^2} - \right.$$
$$\left. - i\sqrt{1/2\pi}\,\frac{\omega^3}{k^3v_{Te}^3}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2v_{Te}^2}\right)\right]. \tag{11.42}$$

Les facteurs exponentiels ont apparu ici par suite de l'utilisation de la fonction de distribution maxwellienne (11.25); ceci rend déjà clair que pour un plasma en état de déséquilibre, les parties correspondantes des grandeurs ε_{tr} et ε_l peuvent différer radicalement des expressions (11.41) et (11.42).

---

*) Nous avons utilisé ici les notations $v_T = v_{T_e} = \sqrt{\varkappa T/m}$ et $v_{T_i} = \sqrt{\varkappa T/M}$, où M est la masse des ions (admettons qu'il n'y a que des ions d'une seule sorte). Si $T_e \neq T_i$, il faut écrire $v_{T\alpha} = \sqrt{\varkappa T_\alpha/m_\alpha}$, $\alpha = e, i$, etc. Nous négligeons les termes d'ordre m/M et c'est pourquoi, par exemple dans (11.41) et (11.42), l'apport des ions ne figure pas explicitement (dans l'expression de ν_{eff}, il faut, certes, tenir compte des collisions avec les ions).

Comme il se doit, pour $k \to 0$ ces expressions coïncident (sous la condition $\omega \gg \nu_{eff}$) avec (11.6). Soit, maintenant

$$kv_{Te} \gg (\omega, \nu_e), \quad kv_{Ti} \gg (\omega, \nu_i), \tag{11.43}$$

où ν_e est la fréquence des collisions des électrons et ν_i, celle des collisions des ions (il faut tenir compte de toutes les collisions de la particule donnée avec les autres particules; l'écriture $kv_{Ti} \gg \gg (\omega, \nu_i)$ signifie que $kv_{Ti} \gg \omega$ et $kv_{Ti} \gg \nu_i$, etc.). Alors,

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{tr} &= 1 + i\sqrt{1/2\pi}\,\frac{\omega_{pe}^2}{\omega k v_{Te}}, \\ \varepsilon_l &= 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2}\left(1 + i\sqrt{1/2\pi}\,\frac{\omega}{kv_{T\alpha}}\right) \approx 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}. \end{aligned}\right\} \tag{11.44}$$

Ici

$$\omega_{p\alpha}^2 = \frac{4\pi e^2 N_\alpha}{m_\alpha}, \quad \alpha = e, i \tag{11.45}$$

et pour $T_e = T_i = T$, r_D est la longueur de Debye (11.14); dans le cas plus général

$$r_{D\alpha} = \sqrt{\frac{\varkappa T_\alpha}{4\pi e_\alpha^2 N_\alpha}} = \frac{v_{T\alpha}}{\omega_{p\alpha}}. \tag{11.46}$$

Pour $T_e = T_i$ (plasma isothermique) et $N_i = N_e \equiv N$,

$$\frac{1}{r_D^2} = \frac{1}{r_{De}^2}\frac{1}{r_{Di}^2}, \quad r_D = \sqrt{\frac{\varkappa T}{8\pi e^2 N}}. \tag{11.47}$$

Examinons une charge « extérieure » au repos de densité $\rho_{ext} = = e\delta(\mathbf{r})$ apportée dans le plasma. Le potentiel φ du champ de la charge est défini par les équations

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi e\delta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_e = -\nabla\varphi, \\ \mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) &= \varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})\,\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}), \end{aligned}\right\} \tag{11.48}$$

d'où, dans le cas (11.41), on tire les relations

$$\varphi(0, \mathbf{k}) = \frac{4\pi e}{k^2 \varepsilon_l(0, \mathbf{k})}, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \varphi(0, \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})\, d\mathbf{k} =$$
$$= \frac{e \cdot \exp(-r/r_D)}{r}, \quad \varepsilon_l(0, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}. \tag{11.49}$$

Dans un plasma, chaque ion et électron peuvent être considérés, dans certaines limites, comme extérieur par rapport aux autres particules; par conséquent, la formule (11.49) traduit également le fait que, dans un plasma, le champ coulombien de chaque particule subit l'effet d'écran de la part des autres particules. Nous avons déjà dit que cet effet présente de l'intérêt pour l'étude des collisions. C'est pourquoi la question de l'effet d'écran subi par les

particules de la part des autres particules se ramène à la recherche de l'expression de l'intégrale des collisions $\mathcal{S}$ et à la résolution de l'équation cinétique (cf. [139, 146]).

L'exemple du cas limite (11.43) ou, grosso modo, de la limite statique $\omega \to 0$ montre avec une clarté particulière le rôle de la dispersion spatiale dans le plasma. Si nous utilisons dans ce cas la formule de la théorie élémentaire $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, nous aboutirons simplement au résultat $\varepsilon \to -\infty$, $E_l \to 0$, alors qu'en réalité le champ pénètre dans le plasma à la distance de l'ordre de r_D.

Une autre particularité tout aussi importante du plasma en tant que milieu de dispersion spatiale, est l'apparition des ondes longitudinales que nous allons étudier avec d'autres ondes normales susceptibles de se propager dans un plasma isotrope.

L'équation de dispersion générale qui détermine la relation entre ω et $\mathbf{k}$ dans les ondes se propageant dans un milieu (en l'absence de charges et de courants extérieurs) est de la forme

$$\left| \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - k^2\delta_{ij} + k_i k_j \right| = 0. \qquad (10.24)$$

Dans un milieu isotrope, lorsque ε_{ij} est déterminé par l'expression (11.36), l'équation de dispersion se décompose en équation des ondes logitudinales (pour $\omega \neq 0$)

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 0 \qquad (11.50)$$

et équation des ondes transversales

$$k^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{n}^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{tr}(\omega, k). \qquad (11.51)$$

Ici $\tilde{n}(\omega) \equiv \tilde{n}_{tr}(\omega)$ est l'indice complexe de réfraction des ondes transversales. La dégénérescence fait que dans un milieu isotrope à deux états indépendants éventuels de polarisation des ondes transversales correspond la même valeur de $\tilde{n}_{tr}(\omega)$; par ailleurs, l'équation (11.51) peut posséder en principe plusieurs racines $\tilde{n}_{tr,j}(\omega)$. Il faut retenir pourtant que la relation entre k et $\tilde{n}$ est simplement une définition de la grandeur $\tilde{n}$

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \tilde{n}(\omega) = \frac{\omega}{c}(n + i\varkappa),$$

dont le sens est rendu clair par l'expression du champ de l'onde plane

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\left\{i(kz - \omega t)\right\} = \mathbf{E}_0 \exp\left\{i\omega\left(\frac{\tilde{n}}{c} z - t\right)\right\} =$$
$$= \mathbf{E}_0 \exp\left\{-\frac{\omega}{c}\varkappa z + i\omega\left(\frac{n}{c} z - t\right)\right\},$$

où la direction de la propagation de l'onde est choisie comme axe des z.

En résolvant l'équation (11.50) par rapport à k, nous pouvons écrire également cette relation sous la forme $k(\omega) = \frac{\omega}{c}\tilde{n}_l(\omega)$, où $\tilde{n}_l(\omega)$ est l'indice de réfraction de l'onde longitudinale ou des ondes longitudinales, puisque pour une fréquence donnée ω l'équation (11.50) admet en principe plusieurs racines.

Pour aboutir aux résultants (11.50) et (11.51) le plus simple serait non de partir directement de l'équation (10.24) ou (10.27), mais de l'équation d'onde de départ (10.22), (10.23). Alors on obtient tout de suite pour le champ longitudinal $\mathbf{E}_l = E\mathbf{k}/k$ l'équation (avec $\omega \neq 0$)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_l(\omega, k)\,\mathbf{E}_l = 0, \tag{11.52}$$

d'où l'on déduit immédiatement la condition (11.50), car autrement il n'existerait pas de solutions non triviales de E_l. D'une façon analogue, pour le champ transversal

$$\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D} = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{tr}(\omega, \mathbf{k})\,\mathbf{E}_{tr} = k^2\mathbf{E}_{tr}, \tag{11.53}$$

ce qui amène la condition (11.51).

Si on néglige la dispersion spatiale, l'expression (11.51) acquiert la forme bien connue (cf. (11.39))

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{n}^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2}(n^2 - \varkappa^2 + 2in\varkappa) = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega), \tag{11.54}$$

de plus, il n'y a qu'une seule racine multiple $\tilde{n}(\omega) \equiv \tilde{n}_{tr}(\omega) \equiv \tilde{n}_{1,2}(\omega)$; comme nous l'avons déjà dit, la multiplicité de la racine est liée à la dégénérescence de la polarisation dans un milieu isotrope (nous ne distinguons pas ici les racines $\pm\tilde{n}_{1,2}$ qui correspondent aux sens différents de la propagation des ondes).

En vertu de (11.54) et (11.2),

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon' = n^2 - \varkappa^2, \quad 4\pi\sigma/\omega = 2n\varkappa, \\ &n = \sqrt{1/2\varepsilon' + \sqrt{(1/2\varepsilon')^2 + (2\pi\sigma/\omega)^2}}, \\ &\varkappa = \sqrt{-1/2\varepsilon' + \sqrt{(1/2\varepsilon')^2 + (2\pi\sigma/\omega)^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{11.55}$$

où l'on admet que la racine interne est toujours positive (par exemple, pour $\sigma = 0$ et $\varepsilon' < 0$, cette racine est égale à $1/2\ |\varepsilon'| = -1/2\varepsilon'$).

Pour les ondes transversales se propageant dans un plasma, on prend comme $\varepsilon(\omega)$ de (11.54) l'expression (11.6), d'où, dans les cas limites, on déduit des formules bien simples.

Ainsi pour

$$|\varepsilon'| \gg 4\pi\sigma/\omega, \tag{11.56}$$

on a:

si $\varepsilon' > 0$, alors

$$\left.\begin{aligned} n &\approx \sqrt{\varepsilon'} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{eff}^2}}, \\ \varkappa &\approx \frac{2\pi\sigma}{\omega(\varepsilon')} = \frac{\omega_p^2 \nu_{eff}}{2\omega(\omega^2 + \nu_{eff}^2)\sqrt{\varepsilon'}}, \\ \omega_p^2 &= 4\pi e^2 N/m, \end{aligned}\right\} \qquad (11.57)$$

si $\varepsilon' < 0$, alors

$$\left.\begin{aligned} n &\approx \frac{2\pi\sigma}{\omega\sqrt{-\varepsilon'}} = \frac{\omega_p^2 \nu_{eff}}{2\omega(\omega^2 + \nu_{eff}^2)\sqrt{-\varepsilon'}}, \\ \varkappa &\approx \sqrt{-\varepsilon'} = \sqrt{\omega_p^2/(\omega^2 + \nu_{eff}) - 1}; \end{aligned}\right\} \qquad (11.58)$$

mais si

$$|\varepsilon'| \ll 4\pi\sigma/\omega, \qquad (11.59)$$

alors

$$n \approx \varkappa \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} = \sqrt{\frac{\omega_p^2 \nu_{eff}}{2\omega(\omega^2 + \nu_{eff}^2)}}. \qquad (11.60)$$

D'après (11.57), l'indice de réfraction $n < 1$ pour une faible fréquence des collisions, lorsque $\omega^2 \gg \nu_{eff}^2$, ce cas a lieu pratiquement sous la condition

$$\omega > \omega_p = \frac{4\pi e^2 N}{m} = 5{,}64 \cdot 10^4 \sqrt{N}. \qquad (11.61)$$

Si $n < 1$, alors $v_{ph} = c/n > c$ et le rayonnement Tchérenkov, et donc l'absorption des particules isolées, deviennent impossibles. Il est donc clair que pour les ondes transversales l'amortissement dans son ensemble n'est lié qu'aux collisions (on a en vue les ondes qui pour $\nu_{eff} \to 0$ se propagent sans s'amortir dans le milieu; cf. condition (11.61) et la note qui suit). Le résultat (11.41) ne contredit pas ce qui vient d'être dit, puisqu'il s'obtient par approximation non relativiste en utilisant la distribution maxwellienne des vitesses. Cette distribution comporte formellement des particules animées également des vitesses $v > c$, ce qui entraîne un faible évanouissement exponentiel des ondes transversales dans (11.41). Le calcul relativiste conduit, certes, à l'absence totale d'amortissement des ondes transversales dans le plasma sans l'intervention des collisions. Il reste que la formule (11.41) a été écrite tout entière, l'expression de ε_{tr} convenant non seulement pour l'étude des ondes normales (insistons encore une fois sur ce fait important; cf. chapitre 10). Par ailleurs, pour les ondes transversales, le facteur $\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_T^2}\right) =$

$= \exp\left(-\frac{c^2}{2n^2(\omega)v_T^2}\right)$ est si petit que, pratiquement, l'amortissement correspondant est nul.

Ainsi, dans un plasma isotrope la dispersion spatiale ne joue aucun rôle pour les ondes transversales et on peut appliquer les formules (11.57) largement utilisées en radioastronomie et dans la théorie de la propagation des ondes radio dans l'ionosphère.

Même lorsque l'absorption vraie est faible, c.-à-d. sous la condition (11.56), dans un plasma, le champ peut être fortement atténué, ce qui a lieu avec $\varepsilon' < 0$. Ainsi, par exemple, pour $\nu_{eff} \to 0$ (cf. (11.58))

$$n = 0, \quad \varkappa = \sqrt{-\varepsilon'} = \sqrt{\omega_p^2/\omega^2 - 1},$$
$$E = E_0 \exp\left(-\frac{\omega}{c}\sqrt{|\varepsilon'|}\, z\right), \tag{11.62}$$

où E_0 est le champ avec $z = 0$ (à la frontière intérieure du plasma); de plus, le voisinage de la frontière n'est pas envisagé ici en détail. Il est évident que le cas (11.62) est facile à réaliser et la fréquence qui lui correspond est $\omega < \omega_p$. Dans ce cas il s'agit physiquement de la réflexion intérieure totale de l'onde par la couche de plasma (pour plus de détails, cf. [64]). En général, il faut retenir tant pour le plasma que pour les milieux d'un type plus général, que l'absorption des ondes (la transformation de l'énergie des ondes en chaleur ou en mouvement ordonné des particules) et leur amortissement, sont des choses différentes. On peut exprimer la même chose en d'autres termes en remarquant que, pour les ondes données, les milieux non absorbant peuvent être aussi bien transparents (plasma sans collisions pour les ondes transversales avec $\omega > \omega_p$) qu'opaques (le même plasma avec $\omega < \omega_p$).

Il arrive souvent que la loi de dispersion des ondes normales c.-à-d. la relation dans ces ondes entre k et ω, s'exprime directement et non pas en $\tilde{n}$. Pour les ondes transversales dans un plasma sans collisions

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2\omega = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

ou

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2. \tag{11.63}$$

La relation $\omega(k)$ se visualise sans peine par un graphique; pour le cas (11.63) ce graphique a la forme de la figure 11.1. Bien entendu, pour $\omega^2 \gg \omega_p^2$ l'influence du milieu (du plasma) est sans importance et, tout comme dans le vide, $\omega = ck$.

Passons aux ondes longitudinales. A une époque relativement récente on n'envisageait pas une propagation éventuelle des ondes

longitudinales (plus précisément, des ondes électrostatiques) dans le milieu. Pour qu'il en soit ainsi il y avait probablement deux raisons. Premièrement la négligence usuelle de la dispersion spatiale faisait que la condition de l'existence des ondes longitudinales dans un milieu isotrope était de la forme (cf. (11.50) et (11.39))

$$\varepsilon(\omega) = 0. \qquad (11.64)$$

Cette équation détermine les fréquences discrètes ω_l indépendantes de **k**, les ondes longitudinales ne se manifestant donc pas sous une forme explicite. Deuxièmement, pratiquement dans tous les milieux sauf le plasma, les racines ω_l de l'équation (11.64) sont complexes et leur partie imaginaire est assez grande, c.-à-d. les oscillations longitudinales correspondantes s'évanouissent rapidement. C'est pourquoi il s'est avéré que l'étude des ondes longitudinales est liée au développement de la physique de plasma de gaz, bien qu'actuellement on étudie aussi leur propagation dans les milieux condensés.

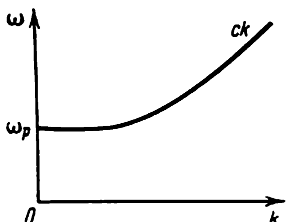


Fig. 11.1. Relation entre ω et k (spectre, dépendance de dispersion) des ondes transversales dans un plasma isotrope sans collisions

Puisque dans le cas des ondes longitudinales pour établir la relation entre ω et k, il faut, même en première approximation, tenir compte de la dispersion spatiale, il est raisonnable de partir de l'équation de dispersion (11.50). Alors, dans le cas (11.40), c.-à-d. dans celui des ondes longitudinales haute fréquence *), on a en utilisant (11.42) et en posant $\omega = \omega' + i\gamma$

$$\left.\begin{aligned} \omega'^2 &= \omega_p^2 + 3v_T^2k^2 = \omega_p^2\,(1 + 3k^2r_{D,e}^2),\\ \gamma &= -\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{\omega_p}{k^3r_{D,e}^3}\exp\left(-\frac{1}{2k^2r_{D,e}^2} - 3/2\right) - 1/2\nu_{eff},\end{aligned}\right\} \qquad (11.65)$$

où l'on admet que l'amortissement est faible, c.-à-d. par hypothèse,

$$\operatorname{Im}\omega \equiv \gamma \ll \omega' = \operatorname{Re}\omega. \qquad (11.66)$$

Pour simplifier, on omet dans ce qui suit le prime de ω' supprimant ainsi en fait la distinction entre ω et ω'.

Constatons que la condition $\omega^2 \gg (kv_T)^2$ (cf. (11.40)) signifie que

$$k^2r_{D,e}^2 = \sqrt{\frac{2\pi r_{D,e}}{\lambda}} \ll 1, \quad r_{D,e} = \sqrt{\frac{\varkappa T}{4\pi e^2N}}. \qquad (11.67)$$

Par conséquent, (11.65) rend clair qu'en approximation nule dans les conditions (11.67) $\omega^2 = \omega_p^2$ et l'amortissement sans colli-

*) Ces ondes s'appellent également ondes Langmuir haute fréquence.

sions est exponentiellement faible. Ceci est dû au fait que, dans ce cas, la condition de l'absorption Tchérenkov (11.33) ne se réalise que dans la « queue » de la distribution maxwellienne des vitesses, où le nombre de particules est exponentiellement petit. Sous l'action de l'onde la répartition des particules change; dans le domaine de la « queue » la marche de cette redistribution est relativement facile. Il en résulte que l'allure de l'absorption sans collisions change et l'absorption peut disparaître tout à fait si l'onde fait changer convenablement la fonction de distribution (l'absorption disparaît si la fonction de distribution f_0 cesse de dépendre de u qui est la projection de la vitesse des particules $\mathbf{v}$ sur le vecteur d'onde $\mathbf{k}$). L'influence de l'onde sur la fonction de distribution et le changement de l'absorption de l'onde que cette action entraîne est évidemment un processus non linéaire. Nous n'allons pas nous attarder ici sur la théorie non linéaire de la propagation des ondes longitudinales (cf., par exemple, [64, 140] et leurs bibliographies).

En termes d'indice de réfraction, les relations (11.65) peuvent se mettre sous la forme (adoptons $\nu_{eff} = 0$)

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{\omega}{c}\tilde{n}_a = \frac{\omega}{c}(n_a + i\varkappa_a), \quad n_a^2 = \frac{1-\omega_p^2/\omega^2}{3v_T^2/c^2}, \\ \varkappa &= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{c^5}{n_a^4 v_T^5}\exp\left(-\frac{c^2}{2n_a^2 v_T^2} - \frac{3}{2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (11.68)$$

Avec l'augmentation de k, c.-à-d. à mesure que les ondes deviennent de plus en plus courtes, l'absorption sans collisions croît, et lorsque la condition (11.67) ou au moins la condition (11.66) est violée, les formules (11.65) et (11.68) deviennent inapplicables. On peut affirmer pourtant, que dans le domaine des hautes fréquences (11.40) tout entier, il existe une branche des ondes longitudinales de plasma dont le comportement lors d'une faible évanescence est déterminé par les formules (11.65). C'est la branche supérieure de la figure 11.2 où le pointillé indique le domaine de forte évanescence des oscillations. La branche inférieure de la figure 11.2 correspond aux ondes longitudinales basse fréquence qui s'amortissent faiblement en l'absence de collisions (condition (11.66)) seulement dans le cas d'un plasma non isothermique de $T_e \gg T_i$ et dans la marge des longueurs d'onde $k^2r^2_{D,i} \ll 1$ (cf. [139]). Par ailleurs, dans le domaine $1/r_{D,e} \lesssim k \ll 1/r_{D,i}$ en approximation nulle $\omega = \omega_{pi}$, où $\omega_{pi} = \sqrt{4\pi e^2 N_i/M}$ est la fréquence ionique de plasma (de Langmuir). Dans le domaine des ondes encore plus longues, lorsque $kr_{D,e} \ll 1$, pour les ondes basse fréquence $\omega \approx \sqrt{\varkappa T_e/M}k$, ce qui correspond au son isothermique dans le gaz de température T_e, mais aux particules de masse M. Si on ne tient pas compte des collisions, dans un plasma isothermique les ondes longitudinales sont toujours

fortement évanouissantes. Dans la gamme des ondes très longues (telles que la longueur du libre parcours moyen $\bar{v}/\nu_{eff}$ soit petite par rapport à la longueur d'onde, c.-à-d. $k\bar{v} \ll \nu_{eff}$), les collisions et surtout un grand nombre de particules neutres (c.-à-d. l'apparition d'un plasma faiblement ionisé) modifient la situation. Dans ce cas, les ondes s'apparentent au son ordinaire qui peut s'amortir faiblement.

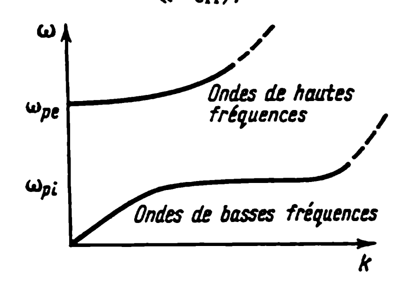


Fig. 11.2. Relation entre ω et k des ondes longitudinales dans un plasma isotrope sans collisions

Schématisation. Le pointillé visualise le domaine des ondes fortement évanouissantes pour des ondes de basses fréquences, un domaine des ondes faiblement évanouissantes n'existe que pour un plasma non isotherme de $T_e \gg T_i$

Passons à l'étude du magnétoplasma et examinons en particulier un plasma homogène plongé dans un champ magnétique $\mathbf{H}_0$ homogène et constant.

Dans le cadre de la théorie élémentaire, l'influence du champ magnétique se ramène à l'introduction dans l'équation (11.5) de la force de Lorentz; donc,

$$m\ddot{\mathbf{r}}_n + m\nu_{eff}\dot{\mathbf{r}}_n = f\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}_n \mathbf{H}_0]. \qquad (11.69)$$

En résolvant cette équation et l'équation analogue des ions on trouve $\dot{\mathbf{r}}_n$ et $\dot{\mathbf{r}}_n^{(i)}$, puis le courant $\mathbf{j} = e\sum_{n=1}^{N}(\dot{\mathbf{r}}_n - \dot{\mathbf{r}}^{(i)})$. D'autre part, par définition, $j_i = -\frac{i\omega}{4\pi}(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij})E_j$ et la comparaison des deux expressions donne ε_{ij}. Les calculs correspondants sont réalisés en détail au § 10 de [64] et nous ne donnons que le résultat

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 - 1/2\omega_p^2\left(\frac{1}{\omega^2 + \omega\omega_H + i\omega\nu_{eff}} + \frac{1}{\omega^2 - \omega\omega_H + i\omega\nu_{eff}}\right) = \\
= 1 - \frac{\omega_p^2(\omega + i\nu_{eff})}{\omega\{(\omega + i\nu_{eff})^2 - \omega_H^2\}}, \\
\varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu_{eff})}. \\
\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = i\frac{\omega_p^2\omega_H}{\omega(\omega + \omega_H + i\nu_{eff})(\omega - \omega_H + i\nu_{eff})}, \\
\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (11.70)$$

Ce qui importe ici c'est qu'on a retenu le système de référence cartésien droit en orientant l'axe des z suivant le champ $\mathbf{H}_0$. De

plus, on admet que la gyrofréquence ω_H des électrons (charge $e < 0$) est positive :

$$\left.\begin{aligned}\omega_H &= \frac{|e| H_0}{mc} = -\frac{eH_0}{mc} = 1{,}76\cdot 10^7 H_0 s^{-1},\\ \lambda_H &= \frac{2\pi c}{\omega_H} = \frac{1{,}07\cdot 10^4}{H_0}\,\text{cm}.\end{aligned}\right\} \tag{11.71}$$

Enfin, (11.70) ne tient pas compte du rôle des ions. Si en l'absence de champ magnétique ceci est toujours possible lorsqu'on néglige les termes d'ordre N_i/M par rapport à N_e/m, dans un magnétoplasma, ordinairement, le rôle des ions est négligeable seulement sous la condition

$$\omega \gg \Omega_H = \frac{|e| H_0}{Mc} = 1{,}76\cdot 10^7 \frac{m}{M} H_0 s^{-1}, \tag{11.72}$$

où Ω_H est la gyrofréquence des ions.

Parfois il arrive que l'inégalité (11.72) ne suffit pas et le rôle des ions peut être important même aux fréquences plus élevées. Par exemple, dans le cas de la propagation transverse par rapport au champ, lorsque les ondes se déplacent sous un angle α entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{H}_0$ égal à $1/2\pi$, l'influence des ions peut être négligée seulement sous la condition $\omega \gg \sqrt{\omega_H \Omega_H} = \sqrt{M/m}\,\Omega_H \gg \Omega_H$.

Les ondes qu'on peut explorer sans tenir compte de l'influence des ions s'appellent ondes haute fréquence. Nous dirons basse fréquence pour les ondes et plus généralement pour les champs de fréquence

$$\omega \ll \Omega_H. \tag{11.73}$$

La cause qui fait que le champ magnétique modifie radicalement à basse fréquence (sous la condition (11.73)) la « réponse » du plasma au champ extérieur $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$ est déjà rendue claire par les équations du mouvement. Dans la théorie élémentaire ces équations se ramènent à (11.69) et à l'équation

$$M\ddot{\mathbf{r}}_n^{(i)} + M\nu_{\text{eff}}^{(i)}\dot{\mathbf{r}}_n^{(i)} = -e\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) - \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}_n^{(i)}\mathbf{H}_0], \tag{11.74}$$

où le terme proportionnel à $\nu_{\text{eff}}^{(i)}$ tient compte des collisions de l'ion donné avec toutes les autres particules (cf. également ci-dessous). Si pour simplifier on néglige les collisions, alors (11.69) et (11.74) rendent évident que sous la condition (11.73) la force de Lorentz devient terme principal. Mais dans l'expression de cette force ne figure pas la masse de la particule et en approximation correspondante les vitesses forcées des électrons $\dot{\mathbf{r}}_n$ et des ions $\dot{\mathbf{r}}_n^{(i)}$ sont les mêmes, et donc la densité de courant $\mathbf{j} = e\sum_n (\dot{\mathbf{r}}_n - \dot{\mathbf{r}}_n^{(i)}) \to 0$. Par ailleurs, si on ne tient pas compte de l'apport des ions, le courant

ne tend pas vers zéro avec $\omega \to 0$ (cf. (11.70)). Pour faire une analyse plus détaillée du rôle des ions, il est commode de recourir surtout à l'expression de ε_{ij}. Par exemple, si on ignore les collisions, on peut écrire pour un mélange d'électrons et d'ions de masse M

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_H^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \Omega_H^2}. \qquad (11.75)$$

On en tire le résultat approché pour le cas haute (11.72) et basse fréquence (11.73)

pour $\omega \gg \Omega_H$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \qquad (11.76)$$

pour $\omega \ll \Omega_H$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \approx 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_H^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_H^2} =$$

$$= 1 + \frac{4\pi Nmc^2}{H_0^2} + \frac{4\pi NMc^2}{H_0^2} = 1 + \frac{4\pi\rho_M c^2}{H_0^2}, \qquad (11.77)$$

où $\rho_M = (mN + MN) \approx NM$ est la densité du plasma considéré ; bien entendu, la valeur de ρ_M est définie par les ions et leur contribution est déterminante.

Il arrive très souvent que

$$\frac{4\pi\rho_M c^2}{H_0^2} \gg 1. \qquad (11.78)$$

Dans ces conditions on peut écrire

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \frac{4\pi\rho_M c^2}{H_0^2} - \frac{c^2}{v_A^2}, \quad v_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_M}}, \qquad (11.79)$$

où v_A est la vitesse magnétohydrodynamique ou la vitesse d'Alfvén qui est la vitesse des ondes dans un milieu de permittivité (11.79) lorsque ces ondes sont polarisées dans le plan xy c.-à-d. le champ électrique $\mathbf{E}$ des ondes est perpendiculaire au champ $\mathbf{H}_0$ (ce qui se déduit aisément ne serait-ce que des expressions générales données dans ce qui suit).

Dans le cas du magnétoplasma, la gamme basse fréquence adhère, et dans des conditions définies coïncide avec le domaine de la magnétohydrodynamique. Pour obtenir les équations magnétohydrodynamiques on peut recourir à la marche qui, sans être très rigoureuse, est au fond suffisamment convaincante et qui consiste simplement à additionner les équations du mouvement (11.69), (11.74) des électrons et des ions. Il faut seulement ne pas perdre de vue que, par exemple, en vertu de l'égalité de l'action et de la réaction, dans un plasma électrons-ions pur, le « frottement » moyen entre électrons

et ions est égal au « frottement » moyen entre ions et électrons (il s'agit au fond de la variation des impulsions moyennes des électrons et des ions; c'est pourquoi dans l'approximation envisagée, les chocs entre les électrons et les ions ne jouent aucun rôle). Pour cette raison, lorsqu'on additionne les équations du mouvement, la force de frottement disparaît, et on obtient après la multiplication par N

$$\rho_M \dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{c}\,[\mathbf{j}\mathbf{H}_0], \quad \mathbf{j} = e\sum_{n=1}^{N} (\dot{\mathbf{r}}_n - \dot{\mathbf{r}}_n^{(i)}), \tag{11.80}$$

où par $\mathbf{v}$ on peut entendre la vitesse du plasma dans « son intégrité », ou pratiquement, la vitesse des ions (en toute rigueur, on examine un régime tel que $m\ddot{\mathbf{r}}_n \ll M\ddot{\mathbf{r}}^{(i)}$); certaines généralisations de (11.80), suffisamment évidentes, conduisent à une équation magnétohydrodynamique plus générale contenant le gradient de pression p

$$\rho_M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{c}\,[\mathbf{j}\mathbf{H}] - \nabla p. \tag{11.81}$$

Il semble inopportun ici de traiter en détail la magnétohydrodynamique et nous ne voudrions qu'ébaucher les liens qui la rattachent au calcul du tenseur de permittivité dans un magnétoplasma (pour plus de détails cf. [27, 64, 139, 140, 146] et leurs bibliographies).

En général, l'influence exercée par un champ magnétique sur un plasma est faible sous la condition

$$\omega \gg \omega_H = 1{,}76\cdot 10^7 H_0 s^{-1}. \tag{11.82}$$

Bien entendu, dans ce cas, la condition (11.72) et même la condition plus serrée $\omega \gg \sqrt{\omega_H \Omega_H}$ sous laquelle le rôle des ions est peu important, sont remplies automatiquement. Dans le cas (11.82) on peut admettre en première approximation que le plasma est isotrope et que le tenseur (11.70) se ramène au tenseur $\varepsilon_{ij} = \varepsilon(\omega)\,\delta_{ij}$, où $\varepsilon(\omega)$ est définie par la formule (11.6).

Il faut pourtant retenir que même si l'inégalité (11.82) est respectée, le rôle du champ magnétique peut être important, surtout s'il s'agit de nouveaux effets inexistants pour $\mathbf{H}_0 = 0$. A titre d'exemple indiquons la rotation du plan de polarisation lors de la propagation des ondes électromagnétiques transversales dans le plasma le long du champ magnétique (effet Faraday; cf. chapitre 9 et ce qui suit). Puisque l'angle de rotation du vecteur de polarisation (c.-à-d. du vecteur électrique du champ de l'onde) dans le champ magnétique à direction donnée, croît avec la distance (effet intégral) la rotation peut être importante même dans un champ parfaitement négligéable d'autres points de vue.

Quand il s'agit du magnétophasma, la théorie élémentaire est vraie seulement dans le cas d'un plasma froid, c.-à-d. lorsqu'on néglige l'agitation thermique des particules, en premier lieu celle

des électrons. Pour un plasma sans collisions cela signifie qu'il faut vérifier les inégalités

$$\frac{k_z v_T}{\omega} \ll 1, \quad \frac{k_\perp v_T}{\omega_H} \ll 1, \tag{11.83}$$

où k_z est la projection du vecteur d'onde **k** sur la direction du champ (axe des z), et $k_\perp$, la projection de **k** sur la direction perpendiculaire au champ $\mathbf{H}_0$ (rappelons que $v_T = \sqrt{\varkappa T/m}$). La première condition au fond a été déjà discutée (cf. (11.20) et (11.40)), puisque le champ $\mathbf{H}_0$ ne modifie pas le mouvement de l'électron le long de ce champ. Quant à la projection de la trajectoire de l'électron sur le plan perpendiculaire à $\mathbf{H}_0$, c'est une circonférence de rayon $r_H = v_\perp/\omega_H$. L'agitation thermique fait que $v_\perp \sim v_T$ et $\bar{r}_H \sim v_T/\omega_H$, ce qui rend clair que la deuxième condition de (11.83) est de la forme $2\pi v_T/\lambda_\perp \omega_H \ll \ll 1$ où $\lambda_\perp = 2\pi/k_\perp$. Ainsi, l'application de la théorie élémentaire qui équivaut à ignorer la dispersion spatiale, est possible si l'on remplit deux conditions: la vitesse de phase des ondes $v_{ph} = \omega/k_z$ doit être sensiblement supérieure à la vitesse thermique v_T, et la longueur d'onde $\lambda_\perp$ doit être grande devant le rayon de Larmor $\bar{r}_H \sim v_T/\omega_H$. Dans l'ionosphère terrestre $T \sim 300\text{-}1000\,°\mathrm{K}$: $v_T \sim \sim 10^7\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$; $\omega_H \sim 10^7\ \mathrm{s^{-1}}$; $\bar{r}_H \sim 1$ cm et pour la gamme des ondes courtes ($\omega \sim 10^8\ \mathrm{s^{-1}}$; $\lambda = 2\pi c/\omega \sim 20$ m) le rapport $v/\omega \sim \sim 0{,}1$ cm. Ceci rend suffisamment clair que dans la gamme des ondes radio, le rôle de la dispersion spatiale dans l'ionosphère est ordinairement peu important. Il est facile d'appliquer ces estimations à la couronne solaire, au milieu interstellaire, etc. Toutefois, une telle concrétisation ne nous semble pas raisonnable puisqu'il est impossible de prévoir toutes les éventualités, alors que dans le cas général, la propagation des ondes dans le magnétoplasma est assez compliquée. Il est plus utile de rappeler qu'en étudiant chaque problème concret de la physique du plasma, les approximations ne peuvent être appliquées qu'avec précaution, leur précision devant être évaluée compte tenu de l'agitation thermique et donc, de la dispersion spatiale.

L'expression du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ d'un magnétoplasma rendant compte de l'agitation thermique, ou du plasma dit « chaud », peut se déduire de l'équation cinétique (11.24). En approximation linéaire, lorsqu'on utilise la théorie des perturbations (cf. (11.26), (11.27)) on est amené tout de suite à l'équation qui diffère de (11.27) seulement par le terme $(e/m)\,[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]\,\nabla_{\mathbf{v}} f'$. Cette équation tient compte du fait que pour la fonction de distribution isotrope non perturbée $f_{00}(v)$ le gradient $\nabla_{\mathbf{v}} f_{00} = (\partial f_{00}/\partial v)\,(\mathbf{v}/v)$ et $[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]\,\nabla_{\mathbf{v}} f_{00} = 0$. A propos, ceci rend clair aussi qu'en présence d'un champ magnétique la distribution maxwellienne des vitesses reste une distribution d'équilibre. A première vue, cette conclusion paraît suspecte, puis-

que dans un champ magnétique un électron se déplace suivant une trajectoire hélicoïdale, et sans le champ, suivant une droite. Il reste qu'il n'y a là aucune contradiction, puisque, dans les deux cas. la probabilité de trouver pour l'ensemble des électrons des valeurs données de la vitesse **v** est la même (ou, en d'autres termes le nombre d'électrons animés de vitesses s'échelonnant dans l'intervalle **v** + + $d_{\mathbf{v}}$, **v** est le même dans les deux cas).

L'expression du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ d'un plasma maxwellien (en équilibre) est donnée, par exemple, dans la monographie [139]. Si on peut négliger l'agitation thermique (à cet effet il faut que dans le cas le plus simple soient respectées les inégalités (11.83)) alors, comme il fallait s'attendre, le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ se ramène au tenseur (11.70). Le trait le plus caractéristique de la théorie cinétique est, peut-être, l'éxistence d'une absorption sans collisions. Elle apparaît sous les conditions (l'axe des z est dirigé suivant $\mathbf{H}_0$)

$$\omega = |s\omega_H + k_z v_z|, \ \omega = |s'\Omega_H + k_z v_z|, \ s, s' = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{11.84}$$

Avec s, $s' = 0$, il s'agit de l'absorption Tchérenkov, alors qu'avec $s \neq 0$ et $s' \neq 0$, de l'absorption de freinage magnétique relative aux électrons ou aux ions respectivement. Cette question a été déjà discutée au chapitre 7 et nous n'allons pas l'examiner plus en détail. Outre l'absorption sans collisions, dans le cas où il s'agit des ondes se propageant à la vitesse comparable à celle de l'agitation thermique v_{Te} et v_{Ti}, il importe surtout de tenir compte de l'agitation thermique du magnétoplasma ainsi que du plasma isotrope.

Déjà pour un plasma froid (c.-à-d. en négligeant l'agitation thermique et, donc, la dispersion spatiale), l'étude de la propagation de différentes ondes dans le magnétoplasma est assez lourde. Nous n'allons examiner que la propagation des ondes dans un plasma froid, et encore nous le ferons en bref (la propagation des ondes tant dans un plasma froid que dans un plasma chaud est examinée en détail dans [64, 139, 146] et les ouvrages indiqués par leurs bibliographies). D'ailleurs, les expressions qui n'imposent pas la concrétisation de la forme du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ sont vraies aussi bien pour un plasma froid que pour un plasma chaud. Ainsi, l'équation de dispersion (10.27) qui détermine l'indice de réfraction $\tilde{n}$ des ondes normales dans un milieu anisotrope, est certainement correcte dans le cas général (il est vrai que ceci sous réserve de l'introduction éventuelle du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$) .Mais pour un magnétoplasma, on peut aller plus loin en recourant à la symétrie du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Par exemple, le cas d'un champ homogène $\mathbf{H}_0$ dirigé suivant l'axe des z permet de réaliser des simplifications rendues claires par (11.70) et valides

également pour un plasma chaud (il s'agit, par exemple, de l'égalité $\varepsilon\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$).

Puisque pour un plasma froid $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega)$, l'équation de dispersion (10.27) est une équation quadratique en $\tilde{n}^2$. Les racines correspondantes $\tilde{n}^2_{1,2}$ sont associées aux ondes ordinaire (indice 2) et extraordinaire (indice 1) susceptibles de se propager dans un plasma froid. D'autre part, un magnétoplasma froid peut être le siège d'une onde longitudinale, ou plutôt d'une oscillation longitudinale (si on ne tient pas compte de la dispersion spatiale, la vitesse de groupe $v_{gr} = d\omega/dk$ de l'onde longitudinale est nulle). Mais si dans un plasma isotrope la direction du vecteur d'onde $\mathbf{k}$ de l'onde longitudinale est arbitraire, dans un magnétoplasma ce vecteur d'onde ne peut être dirigé que suivant le champ $\mathbf{H}_0$. Ainsi, tout se ramène simplement au fait que la présence d'un champ magnétique ne modifie pas l'expression

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu_{eff})}$$

et n'influe donc pas sur l'onde longitudinale (dans cette onde $\mathbf{E} = \mathbf{E}_l = E\mathbf{k}/k$) se propageant le long du champ. La question du passage limite du magnétoplasma au plasma isotrope est assez instructive ; ceci concerne notamment l'existence éventuelle d'une onde de plasma se propageant dans une seule direction (magnétoplasma) ou dans toute direction (plasma isotrope). L'étude suivie du passage limite correspondant ne peut se faire qu'en tenant compte de la dispersion spatiale, bien qu'au fond la question puisse être élucidée sans recourir à cette exploration (cf. § 12 de [64]).

Quant à nous, nous allons limiter notre examen par une seule remarque sur les ondes longitudinales. Dans un milieu anisotrope et, notamment, dans un magnétoplasma, les ondes normales ne sont en général ni longitudinales ni transversales. Il n'y a donc rien d'étonnant que dans certaines conditions l'une des ondes normales (1 ou 2) peut devenir quasi longitudinale. Qui plus est, dans le cas d'un plasma froid, l'onde 1 ou 2 peut même être strictement longitudinale ; formellement il en est ainsi lorsque $\tilde{n}^2_{1,2} \to \infty$. Ces ondes longitudinales peuvent être qualifiées de fictives (cf. [57]), puisque si l'on tient compte de la dispersion spatiale, elles ne sont pas strictement longitudinales. Ce qui vient d'être dit ne suffit pas, certes, pour expliquer le phénomène, mais nous ne voulons que rappeler que quand il est question dans la littérature d'ondes longitudinales se propageant dans un magnétoplasma, on a ordinairement en vue les ondes normales au voisinage des pôles $\tilde{n}^2_{1,2} \to \infty$ (cf. également plus loin). C'est pourquoi il n'y a aucune contradiction avec l'affirmation faite dans ce qui précède et suivant laquelle, dans un magnétoplasma, les ondes longitudinales « vraies » ne se propagent que suivant le champ $\mathbf{H}_0$.

Donnons l'expression de $\tilde{n}^2_{1,2}(\omega)$ pour les ondes haute fréquence (condition (11.72)) dans un plasma froid, c.-à-d. en appliquant le tenseur (11.70). En portant (11.70) dans l'équation de dispersion, ou simplement en réécrivant l'équation de dispersion mais conformément au cas considéré (cf. § 11 de [64]), on a

$$\tilde{n}^2_{1,2} = (n + i\varkappa)^2_{1,2} = \\ = 1 - \frac{2v(1 + is - v)}{2(1 + is)(1 + is - v) - u\sin^2\alpha \pm \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u(1 + is - v)^2\cos^2\alpha}}, \tag{11.85}$$

où

$$v = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \quad u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} = \frac{e^2H_0^2}{m^2c^2\omega^2}, \quad s = \frac{\nu_{\text{eff}}}{\omega} \tag{11.86}$$

et α est l'angle entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{H}_0$.

En l'absence de collisions

$$\tilde{n}^2_{1,2} = 1 - \frac{2v(1 - v)}{2(1 - v) - u\sin^2\alpha \pm \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u(1 - v)^2\cos^2\alpha}} = \\ = 1 - \frac{2\omega_p^2(\omega^2 - \omega_p^2)}{2(\omega^2 - \omega_p^2)\omega^2 - \omega_H^2\omega^2\sin^2\alpha \pm \sqrt{\omega^4\omega_H^4\sin^4\alpha + 4\omega_H^2\omega^2(\omega^2 - \omega_p^2)^2\cos^2\alpha}}. \tag{11.87}$$

L'expression (11.87) sans parler de (11.85) est si lourde que son exploration ne se fait que dans des cas particuliers ou graphiquement. Dans le cas de la propagation longitudinale $\alpha = 0$ on a

$$\left.\begin{aligned} \tilde{n}_1^2 \equiv \tilde{n}_+^2 &= 1 - \frac{v}{1 - \sqrt{u}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_H)}, \\ \tilde{n}_2^2 \equiv \tilde{n}_-^2 &= 1 - \frac{v}{1 + \sqrt{u}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_H)}. \end{aligned}\right\} \tag{11.88}$$

C'est le cas où les ondes normales 1, 2 (ou $\pm$) sont transversales et leur polarisation est circulaire. Le sens de rotation du vecteur électrique $\mathbf{E}$ dans l'onde + coïncide avec celui de la giration de l'électron dans le champ magnétique $\mathbf{H}_0$ (et ne dépend pas de la direction de propagation, c.-à-d. le sens est le même pour le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ dirigé suivant le champ $\mathbf{H}_0$ ou suivant le champ $-\mathbf{H}_0$. Il est donc naturel que lorsque la fréquence ω de l'onde + s'approche de la gyrofréquence ω_H, on observe l'apparition d'une résonance (cf. (11.88) où l'on a posé $\nu_{\text{eff}} = 0$; l'onde + ou 1 est dite extraordinaire). Si un milieu anisotrope est frappé par une onde de polarisation arbitraire, alors, si ce milieu est homogène et sans dispersion spatiale, l'onde se dédouble en deux ondes normales qui se propagent indépendamment l'une de l'autre. En particulier, lorsque la propagation des ondes dans un plasma froid est longitudinale (le long

du champ $\mathbf{H}_0$), l'onde incidente (transversale) polarisée linéairement se désagrège en deux ondes $\pm$ de polarisation circulaire. Puisque $n_+ \neq n_-$, le changement des phases des ondes $\pm$ le long du rayon diffère d'une onde à l'autre, ce qui entraîne la rotation du plan de polarisation (effet Faraday). Il est évident que le déphasage des ondes — (2) et + (1) enregistré sur le parcours L vaut

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c}(n_2 - n_1) L.$$

On voit aisément qu'à ce déphasage correspond la rotation du plan de polarisation d'un angle

$$\Psi = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\omega}{2c}(n_2 - n_1) L \approx \frac{\omega_p^2 \omega_H L \cos\alpha}{2c\omega^2} = 0{,}93\cdot 10^6 \frac{NH_0 L \cos\alpha}{\omega^2}; \tag{11.89}$$

ici on a porté, à titre illustratif, les valeurs $n_{1,2}$ tirées de (11.88) du cas limite $|n_{1,2} - 1| \ll 1$, $\omega \gg \omega_H$, très fréquent dans les conditions cosmiques.

Pour la propagation transverse ($\alpha = \pi/2$), on tire de (11.87)

$$\tilde{n}_1^2 = 1 - \frac{\omega_p^2 (1 - \omega_p^2/\omega^2)}{\omega^2 - \omega_H^2 - \omega_p^2}, \quad \tilde{n}_2^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \tag{11.90}$$

Dans l'onde ordinaire 2, le vecteur de polarisation (vecteur $\mathbf{E}$) est dirigé suivant $\mathbf{H}_0$, ce qui rend clair pour cette onde la coïncidence de $\tilde{n}_2^2$ avec la valeur de $\tilde{n}^2$ du plasma isotrope. Dans l'onde extraordinaire 1, le vecteur $\mathbf{E}$ décrit une ellipse dans le plan perpendiculaire au champ $\mathbf{H}_0$, c'-à-d. possède les composantes longitudinale et transversale par rapport à $\mathbf{k}$ (rappelons encore une fois que, dans le cas (11.90), le vecteur $\mathbf{k}$ lui-même est perpendiculaire au champ $\mathbf{H}_0$).

Si on parle des graphiques du cas général de la fonction $\tilde{n}_{1,2}(\omega, \omega_p, \omega_H, \alpha, \nu_{eff} = 0)$, ils sont caractérisés dans une grande mesure par les zéros et le pôle de cette fonction

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{n}_{1,2}^2 = 0; \quad v_{20} \equiv \frac{\omega_p^2}{\omega_{20}^2} = 1,\\
&\qquad v_{10}^{(\pm)} \equiv \frac{\omega_p^2}{(\omega_{10}^{\pm})^2} = 1 \pm \sqrt{u} = 1 \pm \frac{\omega_H}{\omega_{10}^{\pm}},\\
&\tilde{n}_{1,2}^2 = \infty; \quad v_{1\infty} \equiv \frac{\omega_p^2}{\omega_{1\infty}^2} = \frac{1-u}{1-u\cos^2\alpha} -\\
&\qquad\qquad - \frac{\omega_{1\infty}^2 - \omega_H^2}{\omega_{1\infty}^2 - \omega_H^2\cos^2\alpha} \quad \text{pour } u < 1,
\end{aligned}\right\} \tag{11.91}$$

$$v_{2\infty} \equiv \frac{\omega_p^2}{\omega_{2\infty}^2} = \frac{u-1}{u\cos^2\alpha - 1} = \frac{\omega_H^2 - \omega_{2\infty}^2}{\omega_H^2\cos^2\alpha - \omega_{2\infty}^2} \quad \text{pour } u > 1. \tag{11.92}$$

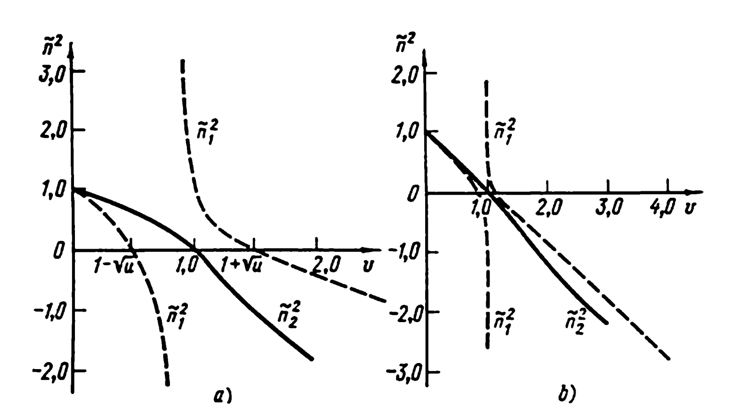


Fig. 11.3. Graphique des fonctions $\tilde{n}^2_{1,2}(v)$ pour $\nu_{eff} = 0$ et $\alpha = 45°$: a) $u = \omega_H^2/\omega^2 = 1/4$; b) $u = 0{,}01$

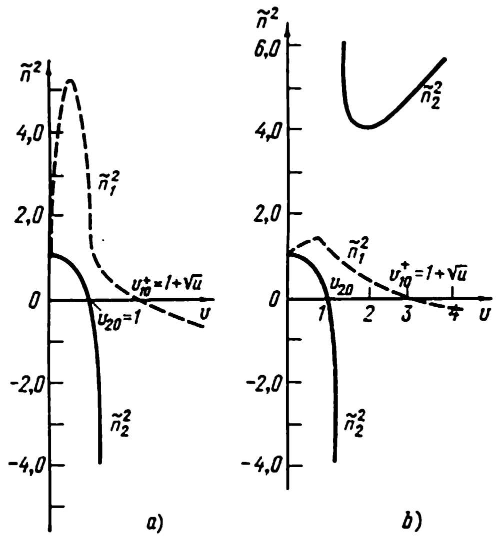


Fig. 11.4. Graphique des fonctions $\tilde{n}^2_{1,2}(v)$ pour $\nu_{eff} = 0$ et $\alpha = 20°$: a) $u = \omega_H^2/\omega^2 = 1{,}08$; b) $u = 4$

Puisque par définition $v = \omega_p^2/\omega^2 > 0$, la racine v_{10} avec $u = \omega_H^2/\omega^2 > 1$ est, certes, fictive. Pour la même raison, avec $u > 1$ mais $u \cdot \cos^2 \alpha < 1$, la fonction $\tilde{n}_{1,2}$ ne possède pas de pôle.

Quelques graphiques des fonctions $\tilde{n}_{1,2}^2(v)$, pour de diverses valeurs de u et de α, sont donnés à titre d'illustration sur les figures 11.3 et 11.4. L'utilisation de $v = \omega_p^2/\omega^2$ en guise d'une variable peut paraître artificielle. En fait, les graphiques de cette sorte sont

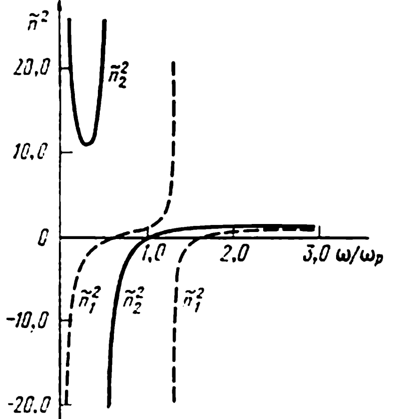


Fig. 11.5. Graphique des fonctions $\tilde{n}_{1,2}^2(\omega/\omega_p)$ pour $\omega_H^2/\omega_p^2 = u/v = 1$ et $\alpha = 45°$

Fig. 11.6. Graphique des fonctions $\tilde{n}_{1,2}^2(\omega)$ pour un plasma froid sans collisions, mais en tenant compte de l'action des ions

On suppose que $\omega_p^2 \gg \omega_H^2$, alors que les valeurs des racines et des pôles des fonctions $\tilde{n}_{1,2}(\omega)$ sont approchées

très commodes lorsqu'il faut mettre en évidence la relation entre $\tilde{n}_{1,2}^2$ et la concentration électronique N (en effet, $v = 4\pi e^2 N/m\omega^2$). Il existe encore d'autres graphiques commodes, tel le graphique $\tilde{n}_{1,2}^2(\omega/\omega_p)$ dont l'exemple est donné par la figure 11.5. Puisque sur ce graphique il y a le domaine de basses fréquences ω, il faut rappeler encore une fois que la formule (11.85) et celles qui suivent se rapportent au cas des hautes fréquences: $\omega \gg \Omega_H$. La décroissance de la fréquence fait intervenir les ions et on voit apparaître encore une branche des oscillations. Bornons-nous ici à la figure 11.6 qui donne le graphique des fonctions $\tilde{n}_{1,2}(\omega)$ compte tenu de l'influence des ions.

Considérons encore le cas limite important

$$\omega_p^2 \gg \omega^2, \quad \omega_p^2 \gg \omega_H^2, \quad \omega^2 \ll \omega_H^2 \cos^2 \alpha, \quad \omega \gg \Omega_H \qquad (11.93)$$

ou

$$v \gg 1, \quad v \gg u, \quad u \cos^2 \alpha \gg 1.$$

D'après (11.87), sous les conditions (11.93)

$$\tilde{n}_1^2 = -\frac{v}{\sqrt{u}\cos\alpha}, \quad \tilde{n}_2^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2} \approx \frac{v}{\sqrt{u}\cos\alpha} = \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_H\cos\alpha} = \frac{4\pi c\,|e|\,N}{\omega H_0\cos\alpha} \tag{11.94}$$

ou

$$\omega = \frac{c^2k^2\omega_H\cos\alpha}{\omega_p^2} = \frac{cH_0k^2\cos\alpha}{4\pi\,|e|\,N}. \tag{11.95}$$

Sous les conditions considérées, l'onde 1 ne se propage pas (elle s'évanouit, puisque $\tilde{n}_1^2 < 0$), alors que pour l'onde 2 la valeur de $\tilde{n}_2^2 \gg 1$. Ce sont des ondes qu'on rencontre, par exemple, dans la magnétosphère terrestre (« siffleurs atmosphériques ») et dans le plasma de l'état solide (« ondes spiralées » des métaux plongés dans un champ magnétique).

Outre toute autre chose, la négligence de la dispersion spatiale est d'autant moins légitime que la vitesse de phase des ondes concernées $v_{ph} = \omega/k$ est plus petite. Mais si $v_{ph} \lesssim v_T$, les effets de la dispersion spatiale sont très forts. Sous ce rapport, il est clair que la dispersion spatiale doit être évaluée en premier lieu au voisinage des pôles de la fonction $\tilde{n}_{1,2}^2(\omega)$ obtenus pour le plasma froid. En vertu de la condition $\tilde{n}_2^2 \gg 1$, le rôle de la dispersion spatiale est également plus grand pour les « siffleurs atmosphériques » et les « ondes spiralées » que pour les ondes à vitesse de phase élevée.

Et, enfin, la dernière remarque qui doit rappeler que, dans ce qui précède, on a examiné seulement le plasma homogène. Or, dans les conditions réelles, un plasma est toujours inhomogène du fait qu'il existe des frontières, ou que les propriétés du plasma (par exemple, la concentration électronique) varient d'un point à l'autre. C'est pourquoi on attache une grande attention à la propagation des ondes dans un plasma inhomogène. Un grand intérêt pour la physique des plasmas présente également l'étude d'un plasma à l'état de déséquilibre (par exemple, d'un plasma froid parcouru par des faisceaux d'électrons ou d'ions), l'étude de différents phénomènes et effets non linéaires, l'évaluation des effets dus au relativisme, etc.

Ainsi, même si nous ne nous étendons pas sur la physique des plasmas envisagée à une large échelle et limitons notre exposé au calcul de la permittivité et à l'étude de la propagation des ondes, le domaine envisagé n'est que très modeste.

CHAPITRE 12

TENSEUR ÉNERGIE-IMPULSION ET FORCES DANS L'ÉLECTRODYNAMIQUE MACROSCOPIQUE

Tenseur énergie-impulsion dans l'électrodynamique macroscopique. Application des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion au rayonnement des ondes électromagnétiques (photons) dans un milieu. Forces intervenant dans un milieu

Le théorème de Poynting et la loi de conservation de l'énergie dans l'électrodynamique macroscopique (son application à un modèle simple du milieu) ont été déjà étudiés au chapitre 10. La loi de conservation de l'énergie, envisagée dans de larges limites à la lumière de la dispersion fréquentielle et spatiale, fait l'objet de [57] ainsi qu'en général d'un bon nombre d'ouvrages. On ne peut pas en dire autant de la loi de conservation de l'impulsion dans l'électrodynamique macroscopique. Il en est ainsi probablement pour deux raisons. La première, c'est qu'il est bien plus rare d'avoir affaire à l'impulsion d'un champ électromagnétique qu'à son énergie. La deuxième, c'est que cette question a été assez embrouillée du fait qu'elle est liée au choix de l'expression du tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique dans un milieu. Ce problème a fait l'objet des discussions depuis plus de 60 ans et qui se poursuivent encore ajourd'hui (f. [148-151] et leurs bibliographies; dans ce qui suit nous nous inspirons directement de l'article [151a]). C'est pourquoi il nous semble opportun de traiter cette question.

Pour éliminer des complications qui n'ont aucun rapport direct avec les questions envisagées, examinons un milieu non magnétique, au repos, sans dispersion. Les équations du champ ont alors la forme bien connue du lecteur; pour plus de commodité, écrivons-les encore une fois ($\mathbf{B} = \mathbf{H}$, ε ne dépend pas de ω et de $\mathbf{k}$):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{12.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{12.2}$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{12.3a}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \tag{12.3b}$$

Multiplions scalairement (12.1) par E et (12.2) par H. En retranchant (12.1) de (12.2) et en utilisant l'identité E rot H — H rot E = = — div [EH], on a

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E^2+H^2)=-\mathbf{jE}-\operatorname{div}\mathbf{S}, \qquad (12.4)$$

c.-à-d. on aboutit au théorème de Poynting qui dans le cas considéré peut être interprété, sans entraîner des complications spéciales, comme la loi de conservation de l'énergie (densité de l'énergie $w = (\varepsilon E^2 + H^2)/8\pi$; densité du flux d'énergie $\mathbf{S} = (c/4\pi)\,[\mathbf{EH}]$) *).

En multipliant maintenant vectoriellement (12.1) par H et (12.2) par εE, et en additionnant les expressions obtenues, on trouve

$$\frac{1}{4\pi}\{[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}]+\varepsilon[\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}]\}=-\frac{1}{c}[\mathbf{jH}]-\frac{\varepsilon}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}].$$

Ajoutons ensuite aux premier et deuxième membres de cette relation l'expression —ρE, en ramenant son premier membre à l'aide de (12.3a) à la forme $-\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E})$. Il en résulte

$$\frac{1}{4\pi}\{[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}]+\varepsilon[\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}]-\mathbf{E}\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E}\}+$$
$$+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}]=-\left\{\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{jH}]+\frac{\varepsilon-1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}]\right\}. \qquad (12.5)$$

Ici dans le deuxième membre figure la densité de la force de Lorentz

$$\mathbf{f}^{L}=\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{jH}]$$

et la densité de la force volumique

$$\mathbf{f}^{A}=\frac{\varepsilon-1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}], \qquad (12.6)$$

qu'on appelle parfois force d'Abraham. Le signe « moins » du deuxième membre de (12.5) résulte du fait que la somme $\mathbf{f}^{L}+\mathbf{f}^{A}$ est la force qui intervient sur le milieu, alors que l'équation (12.5) détermine le bilan des forces et de l'impulsion appliquées au champ; de plus

$$\mathbf{g}^{A}=\frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}]=\frac{\mathbf{S}}{c^2} \qquad (12.7)$$

est la densité de l'impulsion du champ (c'est précisément cette expression, la même pour le vide et le milieu au repos, qui correspond au choix du tenseur énergie-impulsion sous la forme d'Abraham; cf. plus loin).

---

*) Remarquons qu'en présence de la dispersion et de l'absorption, l'interprétation des termes de la relation de Poynting devient plus compliquée (cf. § 3 de [57] et § 22 de [64] et plus en détail [223]).

Pour simplifier admettons d'abord que le milieu est homogène (avec ε = const; le cas d'un milieu inhomogène et la dépendance éventuelle de ε par rapport à la densité du milieu sont examinés plus loin). Alors l'équation (12.5) se ramène facilement à la forme standard (pour passer de (12.5) à (12.8) il est commode d'utiliser l'identité $[\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{a}] = {}^1/_2 \nabla a^2 - (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{a}$)

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_\alpha^A}{\partial t} = f_\alpha, \quad f_\alpha = f_\alpha^L + f_\alpha^A, \quad \alpha, \ \beta = 1, \ 2, \ 3, \tag{12.8}$$

où $\delta_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'intensité maxwellien:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \{\varepsilon E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta - 1/2 (\varepsilon E^2 + H^2) \delta_{\alpha\beta}\}. \tag{12.9}$$

Ainsi, la conservation de l'impulsion (12.8) se déduit des équations du champ sans aucune hypothèse supplémentaire. En associant cette loi et celle de conservation de l'énergie (12.4) en une relation quadridimensionnelle — la loi de conservation de l'énergie-impulsion — on obtient en même temps l'expression du tenseur énergie-impulsion T_{ik}

$$\left.\begin{aligned} T_{ik}^{(A)} = \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\beta} & -ic\mathbf{g}^A \\ -\frac{i}{c}\mathbf{S} & w \end{pmatrix}, \quad w = \frac{\varepsilon E^2 + H^2}{8\pi}, \\ \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] = c^2 \mathbf{g}^A, \end{aligned}\right\} \tag{12.10}$$

$$\frac{\partial T_{ik}^{(A)}}{\partial x_k} = f_i, \quad f_\alpha = f_\alpha^L + f_\alpha^A, \quad f_4 = \frac{i}{c} (\mathbf{jE}) \tag{12.11}$$

$$(i, k = 1, 2, 3, 4; \ \alpha, \beta = 1, 2, 3; \ x_4 = ict).$$

Le tenseur (12.10) est proposé par Abraham pour un milieu homogène au repos; pour un milieu en mouvement, ce tenseur est un peu plus compliqué (cf. plus loin).

Le tenseur énergie-impulsion utilisé par Minkowski sous les mêmes hypothèses que dans le cas (12.10), (12.11) est de la forme

$$T_{ik}^{(M)} = \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\beta} & -ic\mathbf{g}^M \\ -\frac{i}{c}\mathbf{S} & w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}^M = \frac{\varepsilon}{4\pi c} [\mathbf{EH}] = \varepsilon \mathbf{g}^A, \tag{12.12}$$

$$\frac{\partial T_{ik}^{(M)}}{\partial x_k} = f_i^L, \quad f_\alpha^L = \rho E_\alpha + \frac{1}{c} [\mathbf{jH}]_\alpha, \quad f_4^L = f_4 = \frac{i}{c} (\mathbf{jE}). \tag{12.13}$$

Il est parfaitement clair qu'au moins du point de vue formel, les lois de conservation (12.11) et (12.13) sont identiques, elles ne se distinguent que par les termes qui font la même somme. Voici un exemple si la force d'Abraham (12.6) est reportée du deuxième membre de l'égalité (12.11) dans le premier et réunie avec $\partial T_{ik}^{(A)}/\partial x_k$,

on obtient justement l'expression $\partial T_{ik}^{(M)}/\partial x_k$, et le tenseur énergie-impulsion peut être considéré comme le tenseur de Minkowski. Cette ambiguïté du choix de l'expression du tenseur est d'autant moins étonnante qu'elle est très générale et apparaît déjà dans la théorie du champ dans le vide (cf., par exemple, § 32 de [6]). D'autant plus que dans un milieu, le champ est un système non fermé et pour qu'il soit « fermé » il faut que ce soit le système champ-milieu, le champ étant caractérisé par son propre tenseur énergie-impulsion $T_{ik}^{(mil)}$. Pour le tenseur global $T_{ik} = T_{ik}^{(mil)} + T_{ik}^{(ém)}$, où $T_{ik}^{(ém)}$ est le tenseur énergie-impulsion du champ (par exemple, le tenseur (12.10)), la loi de conservation $\partial T_{ik}/\partial x_k = 0$ est vraie, mais ni le tenseur T_{ik} ni d'autant plus ses parties $T_{ik}^{(mil)}$ et $T_{ik}^{(ém)}$ sous la forme générale ne se définissent pas univoquement. Il en est tout autrement de la densité de la force qui est, au moins en principe, une grandeur univoque et mesurable. Sous ce rapport l'issue de la « discussion » sur les tenseurs d'Abraham et de Minkowski dépend finalement du choix de l'expression de la force. La force d'Abraham (12.6) est liée génétiquement à la force du champ magnétique (force de Lorentz) qui intervient dans le courant de déplacement. Bien que la mesure de cette force ne soit pas encore assez sûre, on ne saurait pas douter de sa réalité *). C'est ce qui résout univoquement la question « en faveur » du tenseur d'Abraham. L'article [150] montre également avec force détails que les différentes objections qu'on trouve dans la littérature au choix du tenseur d'Abraham sont injustifiées, sur quoi insiste également l'article [149]. Bornons-nous ici à mentionner un seul des arguments au profit du tenseur de Minkowski et non celui d'Abraham. Si l'on choisit le tenseur de Minkowski pour un train d'ondes quasi monochromatique, dans tout système de référence le flux d'énergie du champ dans un milieu transparent $\mathbf{S} = w\mathbf{v}_{gr}$, où w est la densité de l'énergie, et $\mathbf{v}_{gr}$, la vitesse de groupe. D'une façon analogue, c'est précisément pour le tenseur de Minkowski que $\sigma_{\alpha\beta} = -\overset{M}{g_{\alpha}} v_{gr,\beta}$ (cf. p. 114 de [57] et sa bibliographie). Des relations de cette forme n'ont pas lieu si on choisit le tenseur d'Abraham, ce qui est considéré, on ne sait pourquoi, comme une difficulté ou un défaut. En fait, comme le montre la démonstration détaillée donnée dans [150], tout ceci est dû à la force volumique $\mathbf{f}^A$ qui apparaît lorsqu'on utilise le tenseur d'Abraham. Dans un milieu en mouvement, cette force effectue un travail sur le milieu, et la relation $\mathbf{S} = w\mathbf{v}_{gr}$ ne peut et ne doit donc pas être observée. La situation est parfaitement analogue à celle d'un

*) Les possibilités correspondantes sont discutées dans [149, 150]. Il est incontestable que la mesure de la force d'Abraham est justifiée ne serait-ce que par « précaution ». Cette mesure a été réalisée récemment [151b] en confirmant la validité de la formule (12.6) bien que pour le moment avec une précision relativement faible.

milieu au repos*), lorsque la relation $\mathbf{S} = w\mathbf{v}_{gr}$ est compromise en présence de l'absorption et, en général, des sources ou des « écoulements » d'énergie dans le milieu. Appliqué au flux de la densité de l'impulsion $g_\alpha v_{gr,\beta}$, ce qui vient d'être dit se rapporte déjà au cas d'un milieu au repos transparent, du fait que la relation $\sigma_{\alpha\beta} = -g_\alpha v_{gr,\beta}$ ne peut avoir lieu qu'en l'absence de la force volumique. Le tenseur de Minkowski satisfait précisément à cette dernière prescription (on admet que les charges et les courants sont absents) et, pour lui, $\partial T_{ik}^{(M)}/\partial x_k = 0$.

Tout ce qui vient d'être dit permet de considérer que le tenseur d'Abraham est « correct »; mais il nous semble que le tenseur de Minkowski ne puisse être considéré comme « incorrect » que si le problème est envisagé dans une optique quelque peu formelle. En fait, la plupart du temps, les résultats fournis par l'application des deux tenseurs, de ceux d'Abraham et de Minkowski, sont tout à fait identiques. Ceci permet non seulement d'utiliser le tenseur de Minkowski, mais encore de reconnaître que son application est tout à fait raisonnable, si on réussit par là à apporter quelques simplifications. Aussi le tenseur de Minkowski $T_{ik}^{(M)}$ ne doit-il pas être qualifié d'« incorrect », mais considéré plutôt comme une certaine notion auxiliaire parfaitement utilisable. Cette façon de procéder ne porte aucun préjudice au « prestige » du tenseur plus fondamental et, si l'on veut « authentique », qui est le tenseur énergie-impulsion $T_{ik}^{(A)}$ du champ électromagnétique dans un milieu.

L'analyse de la question relative à la loi de conservation de l'énergie et de l'impulsion dans l'émission des ondes électromagnétiques (photons) dans un milieu confirme et illustre la remarque qui vient d'être faite. En effet, voyons quelle est la valeur des impulsions du train d'ondes dans un milieu si on utilise les tenseurs d'Abraham et de Minkowski, puis envisageons pour les deux cas les lois de conservation.

Examinons l'onde plane se propageant dans un milieu, de la forme

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= 1/2\,(\mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{kr}-\omega t)] + \mathbf{E}_0^* \exp[-i(\mathbf{kr}-\omega t)]), \\ \mathbf{H} &= 1/2\,(\mathbf{H}_0 \exp[i(\mathbf{kr}-\omega t)] + \mathbf{H}_0^* \exp[-i(\mathbf{kr}-\omega i)]). \end{aligned}\right\} \quad (12.14)$$

Si l'onde est quasi monochromatique, $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{H}_0$ sont, par rapport à la période $2\pi/\omega$, des fonctions « lentes » du temps t. Pourtant, pour simplifier nous ne tenons pas compte de la dispersion et nous admettons pour cette raison que les amplitudes de $\mathbf{E}_0$ et de $\mathbf{H}_0$ soient constantes, alors que la section du train d'ondes est 1, et la longueur, L (la dispersion est évaluée, par exemple, au § 3 de la monographie [57]). En portant (12.14) dans les équations du champ (12.1) et

*) Dans ce cas, la forme volumique appliquée au milieu n'effectue pas de travail, puisque celui-ci est égal au produit de la force par la vitesse du milieu.

(12.2) avec ε = const *) réel et $\mathbf{j} = 0$, on a

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{c}{\varepsilon\omega}[\mathbf{k}\mathbf{H}_0], \quad \mathbf{H}_0 = \frac{c}{\omega}[\mathbf{k}\mathbf{E}_0]. \tag{12.15}$$

On en tire en tant que condition d'existence d'une solution non triviale l'équation de dispersion

$$k \equiv \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}. \tag{12.16}$$

Ensuite, pour les valeurs moyennes dans le temps (mises en moyenne suivant les fréquences élevées) on a (cf. (12.10) et (12.13))

$$\left.\begin{aligned} \overline{w} &= \frac{\overline{\varepsilon E^2 + H^2}}{8\pi} = \frac{1}{16\pi}\{\varepsilon\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^* + \mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^*\} = \frac{n^2}{8\pi}(\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*),\\ \overline{\mathbf{S}} &= \frac{c}{4\pi}\overline{[\mathbf{E}\mathbf{H}]} = \frac{c}{16\pi}\{[\mathbf{E}_0^*\mathbf{H}_0] + [\mathbf{E}_0\mathbf{H}_0^*]\} =\\ &= \frac{cn}{8\pi}(\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*)\frac{\mathbf{k}}{k}, \quad \overline{\mathbf{g}}^A = \frac{\overline{\mathbf{S}}}{c^2}, \quad \overline{\mathbf{g}}^M = n^2\overline{\mathbf{g}}^A, \end{aligned}\right\} \tag{12.17}$$

ou

$$\mathbf{G}^{(A)} = \overline{\mathbf{g}}^A L = \frac{\overline{w}L}{cn}\frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{\mathscr{H}}{cn}\frac{\mathbf{k}}{k}, \tag{12.18}$$

$$\mathbf{G}^{(M)} = \overline{\mathbf{g}}^M L = \frac{\overline{w}Ln}{c}\frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{\mathscr{H}n}{c}\frac{\mathbf{k}}{k}, \tag{12.19}$$

où $\mathbf{G}^{(A,M)}$ et $\mathscr{H} = \mathscr{H}^{(A)} = \mathscr{H}^{(M)} = \overline{w}L$ sont l'impulsion et l'énergie du train d'ondes respectivement. La relation (12.19) coïncide exactement avec la relation entre l'énergie et l'impulsion du « photon dans un milieu » résultant de la quantification du champ (cf. chapitres 6 et 7). En effet, l'énergie d'un photon dans un milieu vaut $\mathscr{H} = \hbar\omega$, et son impulsion, $\mathbf{G} = (\hbar\omega n/c)(\mathbf{k}/k)$, c.-à-d. $\mathbf{G} = (\mathscr{H}n/c)(\mathbf{k}/k)$. Comme nous l'avons montré au chapitre 7, l'utilisation de la relation (12.19) permet de tirer des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion, la condition du rayonnement Tchérenkov ; il en est de même de la formule Doppler. Dans les deux cas, pour le calcul classique, lorsque la quantité $\mathscr{H}$ n'est pas concrétisée (et, par conséquent, ne comporte pas la constante quantique $\hbar$), on obtient naturellement seulement les formules classiques qui ne rendent pas compte de la réaction traduisant le changement du mouvement de la particule rayonnante. Pour déduire des formules plus générales rendant compte de la réaction, il faut utiliser les lois de conservation appliquées aux photons isolés dans un milieu. En ter-

*) Pour être exact, il faut ajouter qu'on envisage un milieu non seulement absorbant (réalité de ε) mais encore transparent (condition $\varepsilon > 0$).

mes concrets, pour l'émission d'un seul photon il faut faire appel aux relations (cf. (7.1) et (7.2))

$$E_0 - E_1 = \hbar\omega, \quad \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1 = \frac{\hbar\omega n}{c} \frac{\mathbf{k}}{k}, \tag{12.20}$$

où $E_{0,1}$ et $\mathbf{p}_{0,1}$ sont les énergies et impulsions de la particule (de l'émetteur) à l'état initial 0 et à l'état final 1 respectivement. En vertu de ce qui vient d'être dit il est clair (et ceci est confirmé par les calculs) que pour « obtenir » des quanta (photons dans le milieu) d'énergie $\hbar\omega$ et d'impulsion $(\hbar\omega n/c)$ $(\mathbf{k}/k)$ en réalisant la quantification standard, il faut recourir au tenseur énergie-impulsion sous la forme de Minkowski. Et si on utilise le tenseur d'Abraham, on obtient pour l'impulsion du « photon » un résultat incorrect à l'avance tant dans le cas classique (cf. (12.18)) que dans celui de la quantification et de l'estimation de la seule impulsion $\mathbf{G}^{(A)}$. En fait, comme il fallait s'attendre, le résultat fourni par le tenseur d'Abraham est tout aussi correct, mais il faut encore tenir compte de l'action de la force d'Abraham sur le milieu au cours de l'émission (ceci se rapporte également au processus d'absorption). Il le faut, en effet, puisque lors de l'émission d'un train d'ondes (ou, par exemple, lorsque ce dernier entre dans un milieu) la force $\mathbf{f}^{A}$ (cf. (12.6)) est différente de zéro. Nous nous intéressons ici non pas à la force elle-même, mais à son impulsion qui, lors de l'émission d'un train d'ondes, vaut

$$\mathbf{F}^{(A)} = \frac{n^2-1}{4\pi c} \int \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{EH}]\, d\mathbf{r}\, dt = \frac{n^2-1}{16\pi c} \{[\mathbf{E}_0\mathbf{H}_0^*] + [\mathbf{E}_0^*\mathbf{H}_0]\} L =$$
$$= \frac{(n^2-1)\, n}{8\pi c} (\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*)\, L \frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{(n^2-1)\, \mathscr{H}\mathbf{k}}{cnk}, \tag{12.21}$$

où l'on a rejeté les termes oscillants pour traiter de la valeur moyenne dans le temps *).

Notons qu'on peut examiner dès le début un train d'ondes plus ou moins arbitraire et calculer, puis comparer les grandeurs intégrales $\mathscr{H} = \int w\, d\mathbf{r}\, dt$, $\mathbf{G}^{(A,M)} = \int \mathbf{g}^{(A,M)}\, d\mathbf{r}\, dt$ et $\mathbf{F}^{(A)}$. Les relations entre ces grandeurs restent les mêmes que dans (12.17)-(12.19), (12.21) pour le train d'ondes à frontières bien marquées.

Il est évident qu'en vertu de (12.17)-(12.19),

$$\mathbf{G}^{(A)} + \mathbf{F}^{(A)} = \mathbf{G}^{M} = \frac{\mathscr{H} n}{c} \frac{\mathbf{k}}{k}. \tag{12.22}$$

Pour appliquer la loi de conservation de l'énergie et de l'impulsion il importe de retenir deux points seulement : premièrement,

*) La force agit tant que l'onde (le train d'ondes) pénètre dans le milieu ou est émise par la source. Mais lorsque le train d'ondes d'une longueur donnée se propage dans un milieu homogène, l'impulsion de la force $\mathbf{F}^{(A)}$ est nulle.

quelles sont l'énergie et l'impulsion que la particule émettrice ou le « système » émetteur perd en rayonnant (ou acquiert en absorbant); deuxièmement, quelle énergie du champ est rayonnée dans la direction donnée. Quant à la question à savoir, comment l'impulsion du rayonnement est distribuée ou redistribuée, elle n'est pas importante à ce point de vue. Dans le cas considéré la particule perd l'impulsion $-\mathbf{G}^{(M)}$, le champ dans le milieu acquiert l'impulsion $\mathbf{G}^{(A)}$ et le milieu acquiert l'impulsion de la force $\mathbf{F}^{(A)} = \mathbf{G}^{(M)} - \mathbf{G}^{(A)}$. Dans un milieu constitué de grains de poussière, la force $\mathbf{f}^{A}$ intervient en accélérant les particules du milieu et $\mathbf{F}^{(A)} = \mathbf{G}^{(mil)}$ est l'impulsion du milieu (la somme des impulsions des « grains de poussière » dont la concentration est considérée comme constante). Mais dans le cas général, l'état du milieu est défini par les équations du mouvement correspondantes, par exemple, par les équations de la théorie de l'élasticité ou de l'hydrodynamique, pour lesquelles la densité de la force volumique est égale à $\mathbf{f}^{(A)}$ et peut contenir en principe certains autres termes. D'autre part, certes, on ne peut pas admettre que $\mathbf{F}^{(A)} = \mathbf{G}^{(mil)} = \mathbf{g}^{mil}L$, où $\mathbf{g}^{mil}$ est la densité de l'impulsion du milieu ([150] a toutes les raisons pour insister sur cette circonstance) *). Par là même, on ne peut pas non plus affirmer que la densité d'impulsion de Minkowski $\mathbf{g}^{M}$ est égale à $\mathbf{g}^{A} + \mathbf{g}^{mil}$. Mais comme nous l'avons vu, en ce qui concerne les grandeurs intégrales que sont les impulsions et l'impulsion de la force $\mathbf{F}^{(A)}$, le résultat (12.21) ne dépend nullement des propriétés du milieu et reste également vrai sous l'hypothèse (en général incorrecte) suivant laquelle $\mathbf{g}^{M} = \mathbf{g}^{A} + \mathbf{g}^{mil}$. C'est ce qui justifie dans le cas donné l'utilisation du tenseur de Minkowski, puisque non seulement il fournit le résultat correct, mais encore conduit directement au but sans recourir à l'étude de l'action de la force volumique. Il est vrai

*) Une situation analogue a lieu dans le cas des quanta acoustiques que sont les phonons. La propagation du son dans un solide ne s'accompagne pas de déplacement de la masse et, sous ce rapport, l'impulsion des ondes sonores est nulle (on ne tient pas compte ici de l'effet relativiste, c.-à-d. du fait que la masse du train d'ondes sonores d'énergie $\mathscr{H}$ est $\mathscr{H}/c^2$, et par conséquent son impulsion est $(\mathscr{H}/c^2)\, v_s$, où v_s est la vitesse du son). C'est pourquoi en quantifiant on obtient également que les phonons, quanta du son, ont une énergie $\hbar\omega$ et une impulsion nulle (nous négligeons encore l'impulsion $(\hbar\omega/c^2)\, v_s$). Quant à l'affirmation que l'impulsion du phonon (disons, lors de son émission par un électron) est égale à $\hbar\mathbf{k} = (\hbar\omega/v_s)\,(\mathbf{k}/k)$, elle traduit le fait que lors de l'émission du phonon, le réseau, dans son intégrité, reçoit l'impulsion $\hbar\mathbf{k}$ (les processus de transition ne sont pas pris en considération). Lors de l'application des lois de conservation au cas de l'émission, de l'absorption et de la diffusion du son, rien ne change pourtant si l'on admet, comme on le fait ordinairement, que les phonons eux-mêmes possèdent non seulement l'énergie $\hbar\omega$, mais encore l'impulsion $\hbar\mathbf{k} = (\hbar\omega/v_s)\,(\mathbf{k}/k)$. A propos, selon Abraham, l'impulsion du champ $G^{(A)} = \mathscr{H}/cn = (\mathscr{H}/c^2)\,(c/n)$ (cf. (12.18)), c.-à-d. elle a le même sens que l'impulsion « vraie » du phonon $(\mathscr{H}/c^2)\, v_s$ puisque la vitesse de l'impulsion électromagnétique est égale à c/n (la dispersion est négligée).

que l'estimation de cette force dans le cadre de l'approche classique est bien simple (cf. plus haut), mais du point de vue de la mécanique quantique, elle serait probablement assez lourde. Quoi qu'il en soit, à notre connaissance un tel examen quantique n'est pas encore réalisé. Dans les problèmes non stationnaires dont la résolution rend évidents les avantages ou même la nécessité de l'application du tenseur d'Abraham, l'analyse quantique correspondante serait justifiée (sans être nécessaire tant que le problème reste classique, ce qui est probablement vrai pour toute position pratique du problème de mesure de la force d'Abraham). Pour ce qui est de l'utilisation des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion lors de l'émission des « photons dans un milieu » discutée dans ce qui précède (et surtout au chapitre 7), il nous semble que la question sur le caractère et le sens d'un tel examen peut être considérée comme parfaitement claire déjà à la lumière des remarques faites précédemment (au lieu de s'adresser aux chapitres 6 et 7, il serait peut-être plus commode d'utiliser l'article [151], où la quantification du champ dans un milieu et la question du tenseur énergie-impulsion sont examinées conjointement).

Le tenseur énergie-impulsion et la force dans un milieu ont été étudiés précédemment pour le cas le plus simple. En particulier, on admettait que le milieu était fixe, homogène et non magnétique; on ne tenait pas compte non plus de la dépendance éventuelle entre la permittivité ε et la densité du milieu ρ.

Rejetons toutes ces hypothèses et écrivons les équations du champ sous la forme

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{12.23}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{12.24}$$

$$\operatorname{div} = 4\pi\rho_e, \tag{12.25}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{12.26}$$

Ici la densité des charges est notée ρ_e, afin de permettre l'utilisation de la notation ρ pour la densité du milieu. Si dans le système de référence où le milieu est au repos, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$; $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ (comme auparavant, la dispersion est négligée), alors pour un milieu animé d'un mouvement lent (cf. § 111 de [147])

$$\begin{gathered}
\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\right) \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \mathbf{B}\right], \\
\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \mathbf{B}\right], \\
\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} + \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\right) \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \mathbf{E}\right] = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \mathbf{D}\right],
\end{gathered} \tag{12.27}$$

où l'on admet que la vitesse du milieu **u** est petite par rapport au système du « laboratoire », c.-à-d. les termes d'ordre u^2/c^2 sont négligés. Toutefois, même si l'on utilise des relations plus générales entre **D**, **B**, **H** et **E** les équations initiales (12.23)-(12.26) restent toujours valides.

En multipliant scalairement les équations (12.23) et (12.24) par **E** et **H** respectivement et en procédant ensuite comme d'ordinaire (cf. (12.4)), on obtient la relation

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E}+\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\mathbf{H}\right)=\mathbf{jE}-\operatorname{div}\mathbf{S},\quad \mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]. \tag{12.28}$$

En multipliant vectoriellement (12.23) et (12.24) par **H** et **D** respectivement et en procédant de même que ci-dessus pour déduire l'équation (12.5), on amène

$$\frac{1}{4\pi}\{[\mathbf{D}\operatorname{rot}\mathbf{E}]+[\mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{H}]-\mathbf{E}\operatorname{div}\mathbf{D}\}=-\mathbf{f}^{\mathrm{L}}-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{DB}], \tag{12.29}$$

$$\mathbf{f}^{\mathrm{L}}=\rho_e\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{jB}].$$

Les relations (12.28) et (12.29) généralisent (12.4), (12.5) ; elles traduisent les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion qui résultent des équations du champ (12.23)-(12.26). Plus précisément, il s'agit des lois de conservation associées aux lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion. La mise en évidence de cette liaison, elle, impose de poursuivre l'analyse et d'introduire des hypothèses supplémentaires. Au fond, ceci a déjà été expliqué plus haut : la loi de conservation comportant plusieurs termes, il est impossible de donner à tel ou tel d'entre eux des interprétations univoques sans introduire des hypothèses supplémentaires. Par ailleurs, la concrétisation du problème permet, en utilisant les lois de conservation, d'obtenir des résultats bien précieux. A titre d'exemple cherchons à partir de la relation (12.28) l'expression de la densité de la force $\mathbf{f}_m$ qui agit sur le milieu considéré.

A cet effet calculons la dérivée

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{DE}+\mathbf{BH}}{8\pi}\right)\equiv\frac{\partial w^{\mathrm{M}}}{\partial t}, \tag{12.30}$$

où $w^{\mathrm{M}}=(\mathbf{DE}+\mathbf{BH})/8\pi$ peut être envisagée pour l'instant seulement comme une notation.

En calculant les dérivées $\partial\mathbf{E}/\partial t$ et $\partial\mathbf{H}/\partial t$ profitons des relations (12.27). Pour le faire il faut également concrétiser les valeurs $\partial\varepsilon/\partial t$ et $\partial\mu/\partial t$. Adoptons que pour chaque élément du milieu, ε ne varie qu'en fonction de la variation de la densité ρ. Alors,

$$\frac{d\varepsilon}{dt}\equiv\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\mathbf{u}\nabla\varepsilon=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\frac{d\rho}{dt}=-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\rho\operatorname{div}\mathbf{u}, \tag{12.31}$$

où on a utilisé également l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0.$$

En vertu de (12.27), (12.31) et de l'expression analogue de $d\mu/dt$ on trouve aisément

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right] - \\ &\qquad - \mathbf{D}\left\{\mathbf{u}\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\rho\right)\operatorname{div}\mathbf{u}\right\}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right] - \\ &\qquad - \mathbf{B}\left\{\mathbf{u}\nabla\left(\frac{1}{\mu}\right) - \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\rho\right)\operatorname{div}\mathbf{u}\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (12.32)$$

Ici comme partout on admet que la vitesse **u** est constante, ou plus précisément, on néglige toutes les dérivées de **u** par rapport au temps et les coordonnées, tout en tenant compte de div **u** qui apparaît quand on utilise l'équation de continuité. D'après (12.32) et prenant encore en considération les relations (12.27) tout en négligeant les termes d'ordre u^2/c^2, on obtient

$$\frac{\partial w^{\mathrm{M}}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\mathbf{H}\right) + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{u}\nabla\varepsilon)E^2 +$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\rho\right)E^2 \operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{u}\nabla\mu)H^2 + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\rho\right)H^2 \operatorname{div}\mathbf{u}. \quad (12.33)$$

En combinant (12.33) avec (12.28) on amène finalement

$$-\frac{dw^{\mathrm{M}}}{\partial t} = \mathbf{jE} + \mathbf{f}_m\mathbf{u} + \operatorname{div}\left\{\mathbf{S} - \frac{\mathbf{u}}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\rho\right)E^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\rho\right)H^2\right]\right\}, \quad (12.34)$$

$$\mathbf{f}_m = -\frac{E^2}{8\pi}\nabla\varepsilon - \frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu + \frac{1}{8\pi}\nabla\left\{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\rho\right)E^2\right\} +$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\nabla\left\{\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\rho\right)H^2\right\}. \quad (12.35)$$

Cette relation peut déjà être naturellement interprétée comme la loi de conservation de l'énergie ; de plus, w^{M} est la densité d'énergie du champ et $\mathbf{f}_m$, la force appliquée au milieu (elle effectue le travail $\mathbf{f}_m\mathbf{u}$) ; l'addition du terme proportionnel à **u** au flux d'énergie ne doit pas étonner, mais une analyse supplémentaire s'impose pour établir la précision de l'expression correspondante. Nous passerons outre cette question puisque nous nous sommes proposés de déduire

l'expression de la force $\mathbf{f}_m$ intervenant dans un milieu au repos lorsque $\mathbf{u} = 0$. Mais nous ne pouvons pas admettre tout de suite que $\mathbf{u} = 0$ du fait que le travail de la force $\mathbf{f}_m\mathbf{u}$ sera alors nul lui aussi. L'expression (12.35) coïncide, certes, avec celle qu'on obtient d'habitude (cf. ([27, 147]), mais on l'obtient en étudiant le déplacement des éléments du milieu dans un champ. En général, cette approche est équivalente à la déduction mentionnée, mais elle se rapporte directement seulement au cas statique.

Il ne faut pas penser, comme il aurait pu paraître à première vue, que les expressions ci-dessus définissent univoquement la densité de force qui intervient dans un milieu. En effet, choisissons comme densité d'énergie et densité d'impulsion d'un milieu en mouvement les expressions suivantes

$$w^A = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{DE} + \mathbf{BH}) - \frac{\mathbf{u}/c}{4\pi(1 - u^2/c^2)}([\mathbf{DB}] - [\mathbf{EH}], \qquad (12.36)$$

$$\mathbf{g}^A = \frac{\mathbf{S}^A}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}\left\{[\mathbf{EH}] - \frac{\mathbf{u}/c^2}{1 - (u^2/c^2)}(\mathbf{u}[\mathbf{DB}] - \mathbf{u}[\mathbf{EH}]), \qquad (12.37)\right.$$

Ce sont les expressions qui s'obtiennent précisément (cf. [5, 150]) pour un milieu en mouvement par transformations relativistes si, pour un milieu fixe, on adopte comme tenseur énergie-impulsion l'expression d'Abraham (12.10).

Il est évident que

$$\frac{\partial w^M}{\partial t} + \mathbf{f}_m\mathbf{u} = \frac{\partial w^A}{\partial t} + \mathbf{f}_m\mathbf{u} + \mathbf{f}^A\mathbf{u}, \qquad (12.38)$$

$$\mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{g}^M - \mathbf{g}^A) = \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{[\mathbf{DB}] - [\mathbf{EH}] + \right.$$
$$\left. + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u}[\mathbf{DB}] - \mathbf{u}[\mathbf{EH}])}{1 - (u^2/c^2)}\right\}. \qquad (12.39)$$

Ainsi, si on ne parle que de la loi de conservation (12.28) on peut admettre de droits égaux que la densité de force volumique est égale à $\mathbf{f}_m$ ou à $\mathbf{f}_m + \mathbf{f}^A$. Ceci est également vrai pour l'expression de la densité d'impulsion choisie en se guidant sur la loi de conservation (12.29): l'expression de Minkowski $\mathbf{g}^M = \frac{1}{4\pi c}[\mathbf{DB}]$, aussi bien que l'expression d'Abraham (12.37) sont compatibles avec (12.29). La différence ne consiste que dans le fait que dans la variante d'Abraham, en plus d'autres forces, le milieu subit la force de densité $\mathbf{f}^A$, absente dans la variante de Minkowski, pour ainsi dire à la suite de la modification correspondante de la densité d'impulsion du champ dans le milieu. La question à savoir si la force $\mathbf{f}^A$ ayant pour

un milieu isotrope et non magnétique avec $(u^2/c^2) \ll 1$, la forme (12.6), est réelle ou non, doit être tranchée par les expériences ou par la théorie du microcosme. Comme nous l'avons déjà dit, ces deux points de vue ne laissent subsister aucun doute sur l'existence de la force $\mathbf{f}^A$.

Il reste à dire à titre de conclusion que dans le cas général la relation $\mathbf{G}^M \equiv \int \mathbf{g}^M \, dV = \mathbf{G}^A + \mathbf{F}^A$ (cf. (12.22) subsiste également, c.-à-d. l'impulsion totale transmise au milieu par l'émetteur placé dans ce milieu peut se calculer à l'aide de l'expression de Minkowski pour la densité d'impulsion $\mathbf{g}^M$ (pour plus de détails, cf. [151c]). De même que dans le cas particulier du milieu fixe, isotrope et non magnétique examiné plus haut, cette conclusion ne contredit nullement la réalité de la force d'Abraham $\mathbf{f}^A$.

CHAPITRE 13

FLUCTUATIONS ET FORCES DE VAN DER WAALS

Fluctuations dans un circuit électrique. Rayonnement thermique dans le milieu. Forces moléculaires (de Van der Waals) entre les corps macroscopiques. Interaction des électrons et du champ dans une cavité résonnante

En traitant l'électrodynamique des milieux continus au chapitre 10, nous avons souligné que les champs que nous envisageons sont des champs statistiques moyens. Par là même nous avons passé outre les phénomènes de fluctuation. Or, on sait que diverses fluctuations, en particulier, les fluctuations életromagnétiques et les effets qui leur sont associés, jouent un grand rôle en physique et en astrophysique. Il suffit de mentionner les fluctuations des contours et circuits électriques, celles du champ électromagnétique dans les cavités résonnantes vides ou non, les forces moléculaires (de Van der Waals) entre les corps denses (le calcul de ces forces est intimement lié à la question des fluctuations électromagnétiques). La diffusion des ondes électromagnétiques (ondes radio, lumière, rayons X) dans un milieu est également un phénomène où interviennent des fluctuations: on peut dire qu'il s'agit là de la diffusion sur les fluctuations du tenseur de permittivité $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Aussi, comprend-on aisément la raison pour laquelle le présent chapitre et les chapitres qui suivent traitent certaines questions relatives aux fluctuations et à la diffusion des ondes. Il convient pourtant de souligner que ce ne sont pas les questions générales de la théorie des fluctuations électromagnétiques (cf. [27, 140. 152-156]) sur lesquelles nous fixons l'attention, mais quelques problèmes plus particuliers et d'un grand intérêt au sens physique.

Parmi ces problèmes le premier est celui des fluctuations dans un contour électrique linéaire, c.-à-d. dans un circuit électrique de capacité C, d'induction L et de résistance R (fig. 13.1). On admet que les dimensions l du contour sont très petites devant la longueur d'onde $\lambda = 2\pi c/\omega$, qui correspond à la gamme de fréquences ω considérée. Dans ces conditions, pour explorer les champs et les courants au sein du contour, il serait justifié de faire appel à l'approximation quasi stationnaire (cf., par exemple, [27, 147]); dans cette approxi-

mation l'intensité du courant, dans toutes les parties du contour, est la même et égale à $J(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} J_\omega \exp(-i\omega t) d\omega$. Si les quantités C, L et R ne dépendent pas de la fréquence, le courant J est déterminé par l'équation

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = L\dot{J} + RJ + \frac{\int J\,dt}{c}\,\mathcal{E}(t), \tag{13.1}$$

où $q = \int J\,dt$ est la charge portée par le condensateur et $\mathcal{E}(t)$, la force électromotrice (f.é.m.) *) appliquée au contour (ou pour mieux

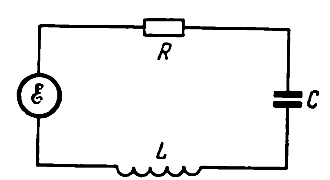


Fig. 13.1. Circuit électrique LCR

dire incluse dans le contour). Si au moins l'une des grandeurs L, C et R dépend de la fréquence (analogue direct de la dispersion fréquentielle dans le milieu), l'équation (13.1) n'est vraie que pour les composantes de Fourier

$$\left.\begin{aligned} -\left\{i\omega L(\omega) + R(\omega) - \left(\frac{1}{i\omega C(\omega)}\right)\right\} J_\omega &= \mathcal{E}_\omega, \\ J_\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} J(t)\exp(i\omega t)\,dt, \\ \mathcal{E}_\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(t)\exp(i\omega t)\,dt. \end{aligned}\right| \tag{13.2}$$

Si on introduit l'impédance (résistance complexe) du contour

$$Z(\omega) = R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \tag{13.3}$$

alors, d'après (13.2),

$$\mathcal{E}_\omega = Z(\omega) J_\omega. \tag{13.4}$$

*) Si on utilise les unités absolues (système CGS) comme nous le faisons partout, dans (13.1) figure non pas la self-induction L, mais L/c^2. Puisque dans ce qui suit nous n'utiliserons pas les valeurs concrètes de L, il sera plus commode d'employer la notation L pour désigner la self-induction divisée par c^2.

En l'absence de f.é.m. extérieure, le courant statistique moyen J est, bien entendu, nul dans le contour. D'autre part, il est évident que sous l'action de l'agitation thermique ou, si l'on veut, par suite de cette agitation, dans le contour apparaissent et disparaissent incessamment (s'évanouissent) des courants fluctuants. Comme il est d'usage dans ces cas, ces courants peuvent être décrits par la fonction de corrélation

$$\varphi(t'-t)=\varphi(\tau)=\overline{J(t)\,J(t+\tau)}, \tag{13.5}$$

en admettant que le problème est homogène dans le temps (de là la dépendance seulement de $\tau = t' - t$; si les paramètres du contour dépendaient du temps, il serait inhomogène dans le temps) ; le surlignement traduit la mise en moyenne statistique ou s'il le faut, la mise en moyenne suivant la mécanique quantique (pour plus de détails cf. [27, 152] ; dans le but de simplification écrivons les formules de la forme (13.5) seulement pour le problème classique). Pour les courants J aléatoires (fluctuants) qui ne tendent pas vers zéro avec $|t| \to \infty$, en appliquant les composantes de Fourier il faut faire attention, mais il est superflu de prendre des précautions lorsqu'il s'agit des grandeurs quadratiques finies utilisées dans ce qui suit [152, 155]. C'est pourquoi en portant dans (13.5) l'expression

$$J(t)=\int J_\omega \exp(-i\omega t)\,d\omega,$$

on obtient

$$\varphi(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \overline{J_\omega J_{\omega'}}\exp[-i(\omega t+\omega' t')]\,d\omega\,d\omega'.$$

Mais le deuxième membre de cette formule ne dépend que de τ seulement en présence de la fonction δ correspondante ; par conséquent, nous pouvons écrire

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\tau)&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(J)^2_\omega\exp(-i\omega\tau)\,d\omega,\\ (J^2)_\omega&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)\exp(i\omega\tau)\,d\tau,\end{aligned}\right\} \tag{13.6}$$

où la quantité $(J^2)_\omega$ est définie de la façon suivante

$$\overline{J_\omega J_{\omega'}}=(J^2)_\omega\,\delta(\omega+\omega').$$

Pour la moyenne quadratique de l'intensité du courant on a

$$\overline{J^2}=\varphi(0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(J^2)_\omega\,d\omega=2\int\limits_0^{\infty}(J^2)_\omega\,d\omega. \tag{13.7}$$

En mesurant l'intensité du courant fluctuant $J(t)$ dans le contour, on peut trouver $\varphi(\tau)$ et donc $(J^2)_\omega$ qui est la densité spectrale de la moyenne quadratique de la fluctuation. Pour un contour en équilibre thermodynamique (à la température T), la grandeur $(J^2)_\omega$ est définie par la théorie et à présent notre but est d'obtenir l'expression correspondante. Au lieu de $(J^2)_\omega$ on peut, avec le même succès, chercher la densité spectrale de la moyenne quadratique de la f.é.m. « aléatorire »

$$(\mathscr{E}^2)_\omega = |Z(\omega)|^2 (J^2)_\omega. \tag{13.8}$$

En effet, au sens électrodynamique, les courants fluctuants d'un contour ne se distinguent en rien des courants produits par une f.é.m. « extérieure ». C'est pourquoi en utilisant la relation (13.4) et en tenant compte que d'après (13.3), $Z(-\omega) = Z^*(\omega)$, on aboutit à (13.8).

A l'état d'équilibre theımodynamique, la valeur de $(\mathscr{E}^2)_\omega$ s'obtient tout de suite si on utilise le théorème général dit de fluctuation et de dissipation qui associe les fluctuations (par exemple, les grandeurs $\overline{J^2}$ et $(J^2)_\omega$ aux propriétés dissipatives du système (dans le cas du contour, à sa résistance R). Sous ce rapport, nous n'avons rien à ajouter aux conclusions de [27, 152, 155]. Par ailleurs, l'examen assez élémentaire donné dans ce qui suit non seulement mène tout de suite au but, mais encore rend immédiat le sens physique du théorème de fluctuation et de dissipation. Qui plus est, les résultats obtenus avec un contour, s'avèrent beaucoup plus généralisés.

Ainsi, cherchons l'expression de $(\mathscr{E}^2)_\omega$ d'un contour en équilibre. Commençons par affirmer que, pour tout contour,

$$(\mathscr{E}^2)_\omega = R(\omega) f(\omega, T), \tag{13.9}$$

où $f(\omega, T)$ est la fonction universelle de la fréquence ω et de la température T, c.-à-d. indépendante des paramètres du contour L, C et R.

Pour démontrer la relation (13.9) examinons deux contours, deux dipôles connectés en série et formant un circuit fermé schématisé sur la figure 13.2 (cf., par exemple [157, 158]; l'idée de la démonstration remonte en fait à Nyquist [159] qui a étudié un circuit à deux conducteurs). Les fluctuations font passer par le contour commun un courant $J(t)$, alors que les f.é.m. fluctuantes de chaque dipôle valent $\mathscr{E}_1 = Z_1 J$ et $\mathscr{E}_2 = Z_2 J$ respectivement, où $Z_{1,2}$ sont les impédances des dipôles. A l'état d'équilibre thermodynamique, la puissance moyenne P_{12} transmise par le dipôle 1 au dipôle 2 doit être égale à la puis-

sance P_{21} transmise par le dipôle 2 au dipôle 1, c.-à-d.

$$P_{12}=\int \frac{R_2(\mathscr{E}_1^2)_\omega\, d\omega}{|Z|^2}=P_{21}=\int \frac{R_1(\mathscr{E}_2^2)_\omega\, d\omega}{|Z|^2}. \qquad (13.10)$$

Ici $Z(\omega) = Z_1 + Z_2$ est l'impédance du circuit concerné qui se compose de deux contours (dipôles) connectés en série ; duant aux expressions de la puissance, elles s'obtiennent aisément à partir de la relation bien connue : $P = \overline{RJ^2}$. L'égalité (13.10) doit être observée pour tous les dipôles, en particulier, lorsque change l'impédance Z du circuit tout entier, R_1 et R_2 étant données, et lorsque les inductions $L_{1,2}$, ainsi que les capacités $C_{1,2}$, sont différentes. Mais ceci n'est possible que dans le cas de l'égalité des expressions sous le signe d'intégration, c.-à-d. sous la condition $R_2(\mathscr{E}_1^2)_\omega = R_1(\mathscr{E}_2^2)$. Donc,

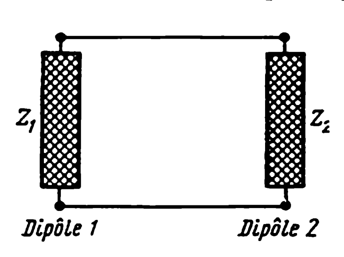


Fig. 13.2. Circuit composé de deux dipôles connectés en série d'impédances Z_1 et Z_2

$$\frac{(\mathscr{E}_1^2)_\omega}{R_1}=\frac{(\mathscr{E}_2^2)_\omega}{R_2}=\frac{(\mathscr{E}^2)_\omega}{R}=f(\omega, T)$$

est une grandeur qui peut dépendre de ω et de T, mais non pas des paramètres des contours (pour plus de détails, cf. [157]). Pour trouver la fonction $f(\omega, T)$ nous sommes maintenant légitimés de choisir un contour quelconque ; le plus simple, certes, est de prendre un LC-contour faiblement évanescent avec $R \to 0$.

Ecrivons d'abord les expressions des énergies électrique $\bar{U}$ et magnétique $\overline{K}$ moyennes du contour pour L, C et R arbitraires:

$$\overline{U}=\frac{\overline{q^2}}{2C}=\frac{1}{2C}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2}(J^2)_\omega\, d\omega=$$

$$=\frac{1}{C}\int_0^\infty \frac{(\mathscr{E}^2)_\omega\, d\omega}{\omega^2|Z(\omega)|^2}=\int_0^\infty \frac{CRf(\omega, T)\, d\omega}{R^2C^2\omega^2+(LC\omega^2-1)^2}, \qquad (13.11)$$

$$\overline{K}=\frac{\overline{LJ^2}}{2}=\frac{L}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(J^2)_\omega\, d\omega=\int_0^\infty \frac{\omega^2C^2LRf(\omega, T)\, d\omega}{R^2C^2\omega^2+(LC\omega^2-1)^2}. \qquad (13.12)$$

Si $R \to 0$, le contour qu'on obtient ainsi est analogue à un oscillateur harmonique entretenu, décrit par l'équation $m\ddot{x} + kx = 0$; de plus, sa fréquence propre $\omega_l = \sqrt{k/m} = 1/\sqrt{LC}$ (cf. (13.1)). Or, on sait très bien, et c'est pourquoi nous ne donnerons pas à ce propos

d'autres explications, que l'énergie moyenne d'un oscillateur à la température T s'écrit

$$\overline{W}=\overline{U}+\overline{K}=2\overline{U}=2\overline{K}={}^1/_2 m\overline{\dot{x}^2}+{}^1/_2\overline{kx^2}=\frac{\overline{q^2}}{2C}+{}^1/_2\overline{LJ^2}=$$
$$=\left(\frac{\hbar\omega_l}{2}+\frac{\hbar\omega_l}{\exp[\hbar\omega_l/\varkappa T]-1}\right)=\frac{\hbar\omega_l}{2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega_l}{2\varkappa T}. \qquad (13.13)$$

Bien entendu, l'énergie interne de la résistance R elle-même n'est pas prise ici en considération.

Constatons ensuite que pour les petits R, les intégrales (13.11) et (13.12) possèdent un pic étroit pour $\omega=\omega_l=1/\sqrt{LC}$; on peut donc poser (ce qui est strictement vrai pour $R\to 0$, $\alpha=CR/\sqrt{LC}$)

$$\overline{U}=f(\omega,T)\int_0^\infty\frac{\alpha\,d\eta}{\alpha^2\eta^2+(\eta^2-1)^2}=\overline{K}=f(\omega,T)\int_0^\infty\frac{\alpha\eta^2\,d\eta}{\alpha^2\eta^2+(\eta^2-1)^2}=$$
$$={}^1/_2\pi f(\omega,T). \qquad (13.14)$$

Le calcul des intégrales qui figurent ici est bien déterminé (le plus simple serait d'appliquer le théorème des résidus), mais pour obtenir le résultat, il suffit de tenir compte que pour $\alpha\to 0$, les deux intégrales se ramènent à $\int_0^\infty\frac{\alpha d\eta}{\alpha^2+4(\eta-1)^2}\approx\frac{\pi}{2}$. En comparant (13.3) et (13.14) et en tenant compte du fait que la fréquence ω_l est arbitraire, on trouve pour $f(\omega,T)$

$$f(\omega,T)=\frac{\hbar\omega}{2\pi}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}. \qquad (13.15)$$

Enfin, on tire de (13.9) la formule de Nyquist

$$\left.\begin{aligned}(\mathcal{E}^2)_\omega&=\frac{\hbar\omega}{2\pi}R(\omega)\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}=\frac{R}{\pi}\left(\frac{\hbar\omega}{2}+\frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/\varkappa T)-1}\right),\\ \overline{\mathcal{E}^2}&=\frac{\hbar}{\pi}\int_0^\infty R(\omega)\,\omega\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\,d\omega.\end{aligned}\right\} \qquad (13.16)$$

Dans le cas classique, lorsque $\hbar\omega\ll\varkappa T$, on a

$$(\mathcal{E}^2)_\omega=\frac{R}{\pi}\varkappa T,\quad \hbar\omega\ll\varkappa T. \qquad (13.17)$$

Cette conclusion est parfaitement rigoureuse, ou en tous cas aussi convaincante que l'est une conclusion fondée sur le théorème général de fluctuation et de dissipation. Qui plus est, on peut la considérer

comme une démonstration de ce théorème qui, pour une variable aléatoire x, est de la forme (cf., par exemple, [27, 153])

$$(x^2)_\omega = \frac{\hbar\alpha''}{2\pi} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}, \qquad (13.18a)$$

où α'' est la partie imaginaire de α qui est à sont tour, la grandeur déterminant la réponse du système à la perturbation extérieure et dans la même mesure, à une perturbation (fluctuation) aléatoire Q. Par exemple,

$$x_\omega = \alpha(\omega) Q_\omega$$

et

$$\overline{x_\omega x_{\omega'}} = \alpha(\omega)\,\alpha(\omega')\,\overline{Q_\omega Q_{\omega'}} = (x^2)_\omega\,\delta(\omega+\omega') = |\alpha|^2 (Q^2)_\omega\,\delta(\omega+\omega').$$

En éliminant x_ω entre cette expression et (13.18a), on obtient

$$(Q^2)_\omega = \frac{\hbar\alpha''}{2\pi|\alpha|^2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}. \qquad (13.18b)$$

Mais il est évident que la formule (13.18 *b*) est équivalente à (13.16) si $\alpha = t\omega/Z(\omega)$ et, par conséquent, $\alpha'' = \mathrm{Im}\,\alpha = \omega R/l\,|Z|^2$. On peut aussi voir directement que pour un contour électrique la quantité α a le même sens (cf., par exemple, § 89 de [27]). Inversement, de qui vient d'être dit rend évident qu'en partant de la formule de Nyquist (13.16) et en précisant le sens du paramètre α et des grandeurs x et Q on peut obtenir les relations (13.18) pour une classe suffisamment large des grandeurs physiques aléatoires.

Voici maintenant quelques remarques relatives au LCR-contour. A la limite classique quand $\hbar\omega \ll \varkappa T$, la fonction $f(\omega, T) = \varkappa T/\pi$ et d'après (13.11), (13.12) et (13.14) on peut écrire quelles que soient les valeurs des paramètres L, C et R

$$\overline{U} = \overline{K} = {}^1/_2\varkappa T. \qquad (13.19)$$

Bien entendu, il fallait s'attendre à ce résultat, puisque dans ce cas il est équivalent au théorème statistique de l'équipartition de l'énergie suivant les degrés de liberté. Il est vrai que précédemment nous avons supposé que L, C et R ne dépendent pas de ω, mais s'il n'en est pas ainsi, il est en général difficile de parler d'un contour à un degré de liberté et, en tous cas, il n'y a rien qui impose l'observation de la loi classique de l'équipartition.

Ce qui importe c'est que, dans le cas quantique, même pour L, C et R constantes l'équipartition en général n'a pas lieu. Assurément, pour $R \to 0$ les formules (13.13) sont vérifiées, et en particulier, $\overline{U} = \overline{K}$. Mais en général, en première approximation, les formules (13.13) sont vraies sous la condition

$$R/L \ll 1/\sqrt{LC}, \qquad (13.20)$$

qui assure la faiblesse de l'amortissement *). Mais si l'inégalité (13.20) n'est pas observée, alors $\overline{U} \neq \overline{K}$; de plus, dans ce cas les expressions générales de $\overline{U}$ et de $\overline{K}$ s'obtiennent de (13.11), (13.12) et (13.15). Nous voyons que $\overline{U}$ et $\overline{K}$ dépendent de deux paramètres: $\alpha = GR/\sqrt{LC}$ et $\beta = \hbar/\sqrt{LC}\varkappa T$.

La condition (13.20) est équivalente à l'inégalité $\alpha \ll 1$ et alors $\beta = \hbar\omega_i/\varkappa T$, où $\omega_i = 1/\sqrt{LC}$ est la fréquence du contour. Supposons à titre d'exemple (pour plus de détails, cf. [157]) que le contour soit fortement évanescent, c.-à-d.

$$\frac{R}{L} \gg \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{13.22}$$

ou, ce qui revient au même, que $\alpha \gg 1$. Alors,

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{U} = {}^1/_2\varkappa T && \text{pour } \frac{\hbar}{RC} \ll \varkappa T, \text{ c.-à-d. pour } \beta \ll \alpha,\\
&\overline{U} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{\varkappa T}{\hbar/RC}\right)\varkappa T && \text{pour } \frac{\hbar}{RC} \gg \varkappa T,\\
&\overline{K} = {}^1/_2\varkappa T && \text{pour } \frac{\hbar R}{L} \gg \varkappa T, \text{ c.-à-d. pour } \beta \ll \frac{1}{\alpha},\\
&\overline{K} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{\varkappa T}{\hbar R/L}\right) && \text{pour } \frac{\hbar R}{L} \gg \varkappa T,
\end{aligned}\right\} \tag{13.23}$$

De la sorte, la condition « classique » de l'énergie électrique $\overline{U}$ diffère totalement de l'allure classique de l'énergie magnétique $\overline{K}$, etc. Fait curieux également à signaler: le contour qui n'a rien de classique lorsque R est petite (la condition $\hbar\omega_i = \hbar/\sqrt{LC} \geqslant \varkappa T$ est respectée), avec une augmentation suffisante de R, mais L et C étant constants, devient classique par rapport à $\overline{U}$ (c.-à-d., $\overline{U} \to {}^1/_2\,\varkappa T$), alors que $\overline{K} \to 0$. Encore faut-il rappeler que la prescription de la quasi-stationnarité du contour dont nous sommes partis impose certaines contraintes sur les quantités L, C et R (en particulier, on ne saurait pas faire tendre $R \to \infty$, car dans ce cas, le contour serait ouvert et formellement $(\mathcal{E}^2_\omega \to \infty$, bien que $(J^2)_\omega \to 0)$. Nous ne croyons pourtant pas que de telles contraintes interviennent de quelque façon que ce soit dans l'analyse des problèmes concrets correspondants ou qu'elles entravent sérieusement le passage aux cas limites $\hbar/RC \ll \varkappa T$ ou $\hbar R/L \gg \varkappa T$ (cf. (13.23)).

---

*) La fréquence propre de LCR-contour est définie par l'équation (13.1) à $\mathcal{E}(t) = 0$ et vaut

$$\omega_i = -i\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \tag{13.21}$$

Cette différence dans le comportement de $\overline{U}$ et de $\overline{K}$ est parfaitement claire. Même étant fortement évanescent, un système classique peut garder ses traits caractéristiques. Par exemple, les oscillations d'un pendule (oscillateur) sont de plus en plus amorties en fonction de la viscosité du milieu ambiant, mais lui-même est toujours un pendule. Par contre, si nous avons un oscillateur quantique harmonique de fréquence ω_i, en l'absence d'amortissement, les niveaux énergétiques du système sont distants entre eux de $\hbar\omega_i$. A mesure que l'amortissement croît (par exemple, sous l'effet des collisions ou de l'interaction avec le rayonnement) les niveaux s'élargissent et se chevauchent de plus en plus. Ensuite il est tout à fait évident que lorsque le chevauchement des niveaux est important, le spectre du système acquiert une allure continue bien marquée et le système ne ressemble que peu à un oscillateur quantique harmonique. Mais suivant le caractère du spectre énergétique, l'énergie totale moyenne des systèmes quantiques différents, ainsi que les énergies moyennes potentielle et cinétique sont en général tout à fait différentes.

Le rôle que joue l'oscillateur harmonique en physique est si exceptionnel non parce qu'on a souvent affaire à un tel système (pendule, oscillations des molécules, etc.). Ce qui est encore plus important, c'est que de nombreuses questions relatives aux faibles perturbations (linéaires) et aux ondes dans des milieux à « constantes réparties » c.-à-d. à l'électrodynamique des milieux continus, à l'acoustique, etc., se ramènent dans une certaine mesure au problème de l'oscillateur. Ceci se rapporte également au champ électromagnétique dans le vide : le formalisme hamiltonien dans l'électrodynamique du vide et du milieu, décrit dans les chapitres 1 et 6, en est une illustration évidente. D'ailleurs, la décomposition en ondes, à plus forte raison non seulement en ondes planes, sort du cadre du formalisme hamiltonien, et comme nous l'avons dit, son domaine d'application est très large. Sous ce rapport, il devient tout de suite clair que l'étude réalisée dans ce qui précède des fluctuations électriques dans un contour électrique se généralise non seulement aux systèmes discrets (oscillateur mécanique, circuits discrets, etc), mais aussi aux milieux continus. En renvoyant pour plus de détails le lecteur par exemple à [27, 155], donnons seulement certaines expressions relatives aux fluctuations du champ électromagnétique dans le milieu.

La présence des fluctuations peut être traduite dans le cadre de l'électrodynamique linéaire en mettant la relation entre **D** et **E** sous la forme

$$D_i(\omega, \mathbf{r}) = \int \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(\omega, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' + K_i(\omega, \mathbf{r}). \quad (13.24)$$

Nous avons déjà passé ici aux composantes de Fourier par rapport à ω, alors que pour le reste cette ralation se distingue de (10.3)

seulement par l'induction électrique fluctuante **K** $(\omega, \mathbf{r})$ qui rend aussi compte de l'apparition des fluctuations de **D** en l'absence du champ moyen **E**. Les sources extérieures absentes, avec **E** et **B** les équations principales du champ deviennent

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{rot}_i\, \mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{i\omega}{c} \int \hat{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')\, E_j(\omega, \mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' - \\ -\frac{i\omega}{c} K_i(\omega, \mathbf{r}), \\ \mathrm{rot}_i\, \mathbf{E}_i(\omega, \mathbf{r}) = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}. \end{aligned}\right\} \quad (13.25)$$

La relation (13.24) tient évidemment compte de la dispersion spatiale éventuelle et c'est pourquoi, sans limiter la généralité, on peut admettre que $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ (cf. chapitre 10). En négligeant la dispersion spatiale on peut (et parfois il le faut) introduire la perméabilité magnétique; alors, en examinant les fluctuations, il convient également d'introduire l'induction magnétique fluctuante **L** (ω) (cf. § 90 de [27]).

D'après le théorème de fluctuation et de dissipation, à l'état d'équilibre

$$\overline{K_i(\omega, \mathbf{r})\, K_j(\omega, \mathbf{r}')} \equiv \overline{(K_i(\mathbf{r})\, K_j(\mathbf{r})')_\omega} = \\ = i\hbar \,\mathrm{cth}\, \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T} \{\hat{\varepsilon}^*_{ji}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}) - \hat{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r})\}, \quad (13.26)$$

où le surlignement traduit la mise en moyenne statistique. En ignorant la dispersion spatiale et avec $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, on a $\hat{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \varepsilon_{ij}(\omega)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ et

$$(K_i(\mathbf{r})\, K_i(\mathbf{r}'))_\omega = i\hbar \{\varepsilon^*_{ji} - \varepsilon_{ij}(\omega)\}\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, \mathrm{cth}\, \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T} = \\ = 2\hbar\varepsilon''_{ij}(\omega)\, \mathrm{cth}\, \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (13.27)$$

En résolvant l'équation (13.25) pour trouver les champs **B** et **E** produits par le terme fluctuant **K**, et en obtenant ensuite les expressions quadratiques, on peut utiliser les relations de fluctuation et de dissipation (13.26), (13.27) pour exprimer le résultat à travers ε''_{ij} ou, ensuite, à travers d'autres grandeurs convenables. Par exemple, dans un milieu transparent, $\varepsilon'' \to 0$, mais la fonction δ de (13.27) assure le passage limite correct, disons, à l'expression (cf. § 91 de § [27])

$$\left.\begin{aligned} (\mathbf{E}(\mathbf{r})\, \mathbf{E}(\mathbf{r}'))_\omega &= \frac{\hbar\omega^2}{\pi c^2} \frac{\sin((\omega/c)\, n\tilde{r})}{\tilde{r}}\, \mathrm{cth}\, \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}, \\ (\mathbf{E}^2)_\omega &= \frac{\hbar\omega^3}{\pi c^3}\, n\, \mathrm{cth}\, \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}, \end{aligned}\right\} \quad (13.28)$$

où $\tilde{r} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ et l'indice de réfraction $n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon'}$, puisque $\varepsilon'' = 0$.

De là, on est amené directement à la formule de la densité à l'état d'équilibre de l'énergie électromagnétique dans un milieu dispersif transparent (dans ces cas, on parle généralement de rayonnement thermique). En effet, cette densité vaut *)

$$\overline{w}_\omega = \frac{1}{8\pi} 2 (E^2)_\omega \frac{d(\omega n^2)}{d\omega} + \frac{1}{8\pi} 2 (H^2)_\omega =$$
$$= \frac{\hbar\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left(n \frac{d(\omega n^2)}{d\omega} + n^3 \right) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T} =$$
$$= \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/\varkappa T) - 1} \right) \frac{\omega^2 n^2}{\pi^2 c^3} \frac{d(\omega n)}{d\omega}; \quad (13.29)$$

ici on a tenu compte de la relation (13.28) ainsi que du fait que pour les ondes normales transversales dans un milieu isotrope (et ce sont les seules ondes que nous examinons maintenant) $(H^2)_\omega = \varepsilon (E^2)_\omega$.

D'autre part, la formule (13.29) peut s'obtenir directement par une voie bien plus simple en admettant que l'énergie moyenne de chaque « oscillateur du champ » (indice α) soit

$$w_\alpha = \left(\frac{\hbar\omega_\alpha}{2} + \frac{\hbar\omega_\alpha}{\exp(\hbar\omega_\alpha/\varkappa T) - 1} \right) = \frac{\hbar\omega_\alpha}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_\alpha}{2\varkappa T}, \quad (13.30)$$

et que le nombre de tels oscillateurs dans l'intervalle $d\omega$ soit (le facteur 2 rend compte de deux directions de polarisation)

$$\frac{2dk_x\, dk_y\, dk_z}{(2\pi)^3} = \frac{8\pi k^2\, dk}{(2\pi)^3} = \frac{\omega^2 n^2}{\pi^2 c^3} \frac{d(\omega n)}{d\omega} d\omega, \quad (13.31)$$

puisque $\frac{dk}{d\omega} = \frac{d(\omega n/c)}{d\omega}$, $k = \frac{\omega}{c} n(\omega)$.

Les expressions obtenues pour un champ transversal dans un milieu homogène transparent (en général sans dispersion spatiale, puisqu'on n'a tenu compte que de deux ondes) se généralisent aisément au cas d'un milieu transparent arbitraire, où peuvent se propager les ondes normales d'indice de réfraction $n_l(\omega, \mathbf{s})$, $l = 1, 2, 3 \ldots$ Dans ce cas, par exemple,

$$w_l(\omega, \mathbf{s})\, d\omega\, d\Omega = \frac{\omega^2 n_l^2 w(\omega)}{(2\pi c)^3} \left| \frac{\partial(\omega n_l)}{\partial\omega} \right| d\omega\, d\Omega, \quad (13.32)$$

où $w(\omega)$ est la fonction (13.30) de $\omega_\alpha = \omega$, égale à la limite classique à $\varkappa T$, et $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$ est le vecteur unité qui correspond à l'élément

*) Pour les expressions générales de la forme $\overline{w} = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \overline{E^2} + \overline{H^2} \right\}$ cf., par exemple, [27, 57, 64, 98]. Quant aux grandeurs utilisées dans le texte, elles sont telles que

$$(\overline{E^2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (E^2)_\omega\, d\omega = 2 \int_0^{\infty} (E^2)_\omega\, d\varphi.$$

de l'angle solide $d\Omega$. Nous avons déjà rencontré l'expression (13.32) au chapitre 9 (cf. également la bibliographie qu'on y trouve). Aucun doute n'est permis quant à la possibilité d'obtenir cette formule à partir du théorème de fluctuation et de dissipation (13.26), en l'appliquant ensuite au milieu arbitraire et en passant à la limite $\varepsilon''_{ij} \to 0$. Mais pour un milieu transparent cette voie est bien plus compliquée et pas du tout adéquate au problème. Sans aucun doute, la valeur de la relation (13.26) et de toute l'approche se basant sur des fluctuations et des inductions aléatoires, etc. (cf., par exemple, (13.25)), est définie par la possibilité d'étudier, dans cette voie, les milieux absorbants, le passage aux milieux transparents ne servant ordinairement qu'à des buts de vérification.

Dans un milieu absorbant *), l'énergie du champ électromagnétique ne constitue généralement qu'une petite fraction de l'énergie totale (ou de l'énergie libre) de l'agitation thermique dans ce milieu. Il s'agit, certes, ici d'un champ électromagnétique dans le domaine des longueurs d'onde ou des distances caractéristiques sensiblement plus grandes que la dimension atomique a. Si on envisage le champ tout entier, alors, finalement, la matière ordinaire ne contient que de l'énergie électromagnétique (nous faisons abstraction de l'énergie nucléaire qui reste invariable tant que la composition de la matière demeure isotrope). Mais premièrement, cette énergie est essentiellement électrostatique (coulombienne); deuxièmement, elle se « concentre », pour ainsi dire, à l'échelle de l'ordre atomique ($a \sim 10^8$ — 10^{-7} cm), et troisièmement, son calcul doit se faire suivant les règles de la mécanique quantique. Mais le champ à ondes relativement longues de $\lambda \gg a$ est porteur, comme nous l'avons dit, d'une énergie en général faible. Le rôle de cette énergie n'est pas encore très clair et implique une analyse ultérieure, au moins pour des milieux « non standard » (par exemple pour les combinaisons chimiques stratifiées ou filamenteuses, etc.). A l'heure actuelle, deux positions du problème impliquent l'évaluation des fluctuations électromagnétiques dans le milieu absorbant continu. C'est premièrement, le problème des forces qui s'exercent entre les corps macroscopiques à des distances $l \gg a$ (d'habitude ces forces sont dites intermoléculaires ou de Van der Waals). Le deuxième problème s'apparente au précédent: il s'agit du rayonnement thermique des corps macroscopiques. Il est vrai que si la longueur des ondes émises $\lambda \ll l$ (l est la dimension caractéristique du corps, par exemple, le rayon d'une bille ou d'un

---

*) La notion de l'énergie d'un champ électromagnétique dans le milieu absorbant nécessite, il faut le dire, une mise au point puisque en tous cas elle n'est pas univoque (cf. [57, 64]). Pourtant, dans un milieu absorbant, l'énergie du champ, premièrement, peut être introduite en précisant le modèle du milieu, et deuxièmement (ce qui importe surtout ici), à l'état d'équilibre thermique la dissipation, en moyenne, n'existe pas et le sens de l'énergie interne du champ électromagnétique est bien défini (cf. également plus loin).

cylindre échauffés), on peut appliquer ordinairement l'approximation de l'optique géométrique et avec elle, la théorie classique du rayonnement thermique (loi de Kirchhoff, etc. ; cf., par exemple, § 60 de [152]) ; mais pour $\lambda \geqslant l$ (ce qui peut avoir lieu pour les antennes, les corps échauffés dans les guides d'ondes et les cavités résonnantes, etc.) il faut déjà réaliser des calculs électrodynamiques plus complets. Nous n'allons pas envisager l'ensemble des prolèmes correspondants (cf. [155]) et examinerons sommairement seulement la question des forces intermoléculaires.

Dans une position relativement simple du problème, il s'agit de rechercher la force en action entre deux milieux aux permittivités $\varepsilon_1(\omega)$ et $\varepsilon_2(\omega)$ occupant les demi-espaces *1* et *2*. La distance (la

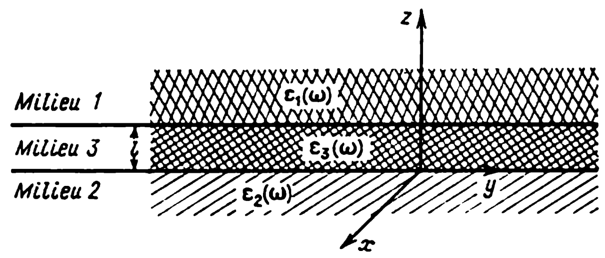


Fig. 13.3. Deux demi-espaces *1* et *2* (de permittivités $\varepsilon_1(\omega)$ et $\varepsilon_2(\omega)$) séparés par la fente 3 occupée par un milieu de permittivité $\varepsilon_3(\omega)$

fente) entre les milieux est l et la fente elle-même peut contenir un milieu (un gaz ou un liquide) de permittivité $\varepsilon_3(\omega)$. Nous avons dit que cette position du problème était relativement simple ayant en vue qu'elle rendait possible plusieurs généralisations: passage à des milieux anisotropes, à des milieux à dispersion spatiale, à un ensemble des plaques (couches), à des surfaces gauches, etc. Pour ce qui est de son analyse quantitative complète, le problème envisagé est d'une complexité exceptionnelle ou plutôt il est très lourd. Pour que ceci soit clair, donnons l'expression de la force F subie par unité de surface de chacune des plaques *1* et *2* (et formellement, par chacun des demi-espaces) séparées par la fente *3* (fig. 13.3)

$$\left.\begin{aligned} &F(l,T)=\frac{\varkappa T}{\pi c^3}\sum_{m=0}^{\infty}{}' \varepsilon_3^{3/2}\omega_m^3\int_0^{\infty}p^2\{\ \}\,dp,\\ &\{\ \}=\left\{\left[\frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)}\exp\left(\frac{2p\omega_m}{c}\,l\sqrt{\varepsilon_3}\right)-1\right]^{-1}+\right.\\ &\left.+\left[\frac{(s_1+p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2+p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}{(s_1-p\varepsilon_1/\varepsilon_2)(s_2-p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}\exp\left(\frac{2p\omega_m}{c}\,l\sqrt{\varepsilon_3}\right)-1\right]^{-1}\right\},\\ &s_1=\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_3-1+p^2},\quad s_2=\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_3-1+p^2},\\ &\omega_m=2\pi m\varkappa T/\hbar, \end{aligned}\right\}\qquad(13.33)$$

où le prime de la somme signifie que le terme comportant $m = 0$ doit être multiplié par $^1/_2$; d'autre part, toutes les permittivités complexes ε_1, ε_2 et ε_3 sont prises pour la partie imaginaire $i\omega_m$ (la valeur positive de F correspond à l'attraction entre les corps, et sa valeur négative, à leur répulsion). Dans le cas limite d'une distance très petite entre les corps *1* et *2* (cela signifie que les longueurs d'onde importantes pour notre problème $\lambda_c \sim 2\pi c/(\omega\sqrt{\varepsilon_3}) \gg l$; de plus, on admet que $\varkappa Tl/\hbar c \ll 1$, ce qui a fait poser $T = 0$) la formule (13.33) se ramène à

$$\left.\begin{aligned} F = \frac{\hbar}{16\pi^2 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 \left[\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_3)(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{(\varepsilon_1-\varepsilon_3)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)} e^x - 1 \right]^{-1} dx\, d\xi, \\ \varepsilon_{1,2,3} = \varepsilon_{1,2,3}(i\xi). \end{aligned}\right\} \quad (13.34)$$

Dans l'autre cas limite, celui de grandes fentes de $l \gg \lambda_c$, l'expression générale (13.33) devient aussi plus simple. Bornons-nous ici au cas encore plus particulier de deux milieux très bons conducteurs (à la limite, conducteurs parfaits) séparés par une fente vide siffisamment large. Alors,

$$F = \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{l^4}. \quad (13.35)$$

Pour le cas le plus important de la fente vide (c.-à-d. avec $\varepsilon_3 = 1$) la formule (13.33), bien que sa forme n'en devienne pas beaucoup plus simple, a été obtenue [160] si l'on peut dire directement en calculant les champs fluctuants $\mathbf{E}_\omega$ et $\mathbf{H}_\omega$ dans la fente et ensuite le tenseur des tensions maxwellien *) avec utilisation du théorème (13.27). Les calculs en sont si lourds qu'on ne les reproduit même pas dans [27] (cf. § 92), où, généralement, tous les calculs importants sont donnés. Quant à la généralisation au cas d'une fente non vide (c.-à-d. au cas de la formule (13.33)), elle a été obtenue dans [161] (cf. également chapitre 6 de [153]) par la méthode de la théorie quantique du champ (ou comme on l'appelle parfois en physique statistique, par la méthode de la théorie quantique des systèmes de particules multiples). L'efficacité et la fécondité de ces méthodes sont prouvées. Mais cela n'interdit nullement la recherche de tels ou tels résultats par des moyens plus simples. Sans parler de la méthodologie de la question, on peut affirmer en général que les méthodes plus claires et plus simples et, par suite, moins lourdes, sont préférables pour passer aux problèmes plus compliqués, fournissent un moyen de vérification, etc. D'après nous, c'est précisément le fait du calcul des forces en action entre les corps macroscopiques.

*) La force F est égale à la composante σ_{zz} du tenseur des tensions, où l'axe des z est perpendiculaire à la fente.

En effet, comme on l'a noté dans l'article [162], le résultat (13.34) pouvait s'obtenir d'une façon bien plus simple que dans [161] (et plus tard [163] a montré que ceci se rapporte également à la formule (13.33)) en procédant de la façon suivante *). Supposons que les milieux *1*, *2* et *3* soient transparents. Alors, l'énergie interne W et l'énergie libre $\mathcal{F}$ du système peuvent s'écrire

$$\left.\begin{aligned} &\overline{W} \equiv W = \mathcal{F} - T\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} = \sum_\alpha w_\alpha(\omega_\alpha, T), \\ &w_\alpha = 1/2\hbar\omega_\alpha \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega_\alpha}{2\varkappa T}, \\ &\mathcal{F} = \sum_\alpha \left\{\varkappa T \ln\left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_\alpha}{\varkappa T}\right)\right) + 1/2\hbar\omega_\alpha\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (13.36)$$

où ω_α sont les fréquences propres; pour calculer la force $F = -\partial\mathcal{F}/\partial l$ les fréquences ω_α dépendant de l sont les seules à présenter de l'intérêt. Ces fréquences $\omega_\alpha(l)$ associées aux oscillations « de surface » dans la fente s'obtiennent sans peine. En les portant dans (13.36), on obtient justement (13.33) ou, en particulier, (13.34). A titre d'illustration déduisons cette dernière formule **).

Dans les domaines homogènes *1*, *2* et *3* l'équation d'onde est de la forme (cf. fig. 13.3)

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\mathbf{E} = 0.$$

Cherchons sa solution de la forme

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(z) \exp[i(k_x x + k_y y)].$$

Alors pour $\mathbf{E}_0(z)$ on obtient l'équation:

$$\frac{d^2\mathbf{E}_0(z)}{dz^2} - K^2\mathbf{E}_0(z) = 0, \quad K^2 = k^2 - \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

Les solutions $\mathbf{E}_0(z)$ qui nous intéressent et qui sont associées plutôt aux surfaces, c.-à-d. localisées au voisinage de la fente, sont évidem-

*) Dans les articles [162, 163] on procède en fait par la façon décrite, mais, fait étrange, on ne fait aucune réserve indiquant que l'étude ne porte directement que sur le milieu transparent.

**) Notons qu'un tel procédé appliqué à deux conducteurs parfaits séparés par une fente vide a été utilisé il y a bien longtemps [164] et a conduit précisément à la formule (13.35). Dans ce cas le rôle des oscillations nulles du champ traduit par la force

$$F = -\frac{\partial W}{\partial l} = -\frac{\partial}{\partial l}\sum_\alpha 1/2\hbar\omega_\alpha(l),$$

est particulièrement suggestif; ici $\omega_\alpha(l)$ sont les fréquences des oscillations propres du champ électromagnétique dans la fente (on admet que $T = 0$).

ment, dans le domaine 1, de la forme: $A \exp(-K_1 z)$, dans le domaine *3* de la forme : $B \exp(-K_3 z) + C \exp(K_3 z)$ et dans le domaine *2*, de la forme: $D \exp(K_2 z)$. Aux frontières (avec $z = 0$) et $z = l$), ces solutions doivent être « aboutées » entre elles à l'aide des conditions limites électrodynamiques qui imposent la continuité de la grandeur $\varepsilon E_{0z}(z)$ et des composantes $E_{0x}(z)$ et $E_{0y}(z)$.

Puisque comme nous l'avons dit, nous voulons nous borner au cas statistique, il faut poser $K^2 = k^2$ (formellement on l'obtient avec $c \to \infty$) et nous pouvons ne pas envisager le champ magnétique (c'est pourquoi nous n'avons pas écrit l'équation correspondante). Enfin, la condition div $\mathbf{E} = 0$, varie pour chacun des domaines *1*, *2*, *3*, entraîne que la composante $E_{0y}(z)$ est proportionnelle à $dE_{0z}(z)/dz$ (il est commode de diriger $\mathbf{k}$ suivant l'axe des x, ce qui ne compromet pas la généralité). C'est pourquoi, aux frontières *1-3* et 3-2, les grandeurs εE_{0z} et $dE_{0z}(z)/dz$ doivent être continues. Il en résulte quatre équations homogènes des amplitudes A, B, C et D. La condition d'existence d'une solution non triviale est de la forme

$$\mathscr{L}(\omega_\alpha) = \frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_3)(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{(\varepsilon_1-\varepsilon_3)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)} \exp(2kl) - 1 = 0, \qquad (13.37)$$

où ε_1, ε_2 et ε_3 sont fonctions de ω.

L'équation de dispersion (13.37) associe $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ à $\omega = \omega_\alpha$, c.-à.-d. détermine les fréquences propres des ondes dans la fente.

D'après (13.36), pour $T = 0$,

$$\left.\begin{aligned} W &= \sum_\alpha 1/2\hbar\omega_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty 2\pi k\, dk \{\ \}, \\ \{\ \} &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\hbar\omega}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}[\ln \mathscr{L}(\omega)]\, d\omega, \end{aligned}\right\} \qquad (13.38)$$

où on utilise le théorème connu de la théorie des fonctions analytiques, ce qu'on appelle le principe de l'argument qui exprime sous la forme d'une intégrale de contour la somme des valeurs d'une fonction (dans notre cas, de la fonction $1/2\,\hbar\omega$) pour tous les zéros $\omega = \omega_\alpha$ d'une autre fonction (dans notre cas, de la fonction $\mathscr{D}(\omega)$; cf., par exemple, p. 235 de [165]). Ce qui importe encore, c'est qu'il ne faut pas tenir compte des pôles de la fonction $\mathscr{D}(\omega)$, puisque les valeurs correspondantes de ω_∞ ne dépendent pas de l (pour plus de détails sur les conditions d'application des calculs, cf. [167a]). On tient aussi compte du fait que les racines ω_α de (13.37) dépendent de k comme d'un paramètre, alors que le nombre de ces racines dans l'intervalle dk est égal à $\frac{1}{(2\pi)^2} 2\pi k\, dk$; puisque (13.36) comporte la somme suivant toutes les racines, il faut intégrer sur k. La force

$F = -\partial W/\partial l$ est définie par la valeur de la dérivée

$$\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial \mathscr{Z}/\partial\omega}{\mathscr{Z}} = -\frac{2k\,\partial\mathscr{D}/\partial\omega}{\mathscr{Z}^2},$$

étant donné qu'en vertu de (13.37), $\partial\mathscr{D}/\partial l = 2k(\mathscr{D} - 1)$. Enfin, on peut écrire

$$-\frac{\omega\,\partial\mathscr{Z}/\partial\omega}{\mathscr{Z}^2} = \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\omega}{\mathscr{Z}}\right) - \frac{1}{\mathscr{Z}}$$

et profiter de cette relation pour intégrer (13.38) par rapport à ω. En introduisant les variables $x = 2kl$ et $\xi = -i\omega$ et en retenant comme contour d'intégration l'axe imaginaire des ω, on obtient tout de suite la formule (13.34). Notons que les valeurs des fonctions $\varepsilon(i\xi)$ pour la fréquence imaginaire $\omega = i\xi$ peuvent s'obtenir si l'on connaît les valeurs de $\varepsilon'' = \operatorname{Im}\varepsilon$ pour les fréquences réelles ω ; on a en vue la formule (cf. § 62 de [27]) :

$$\varepsilon(i\xi) = 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x\varepsilon''(x)}{x^2+\xi^2}\,dx.$$

Comme nous l'avons dit, le résultat général (13.33) peut s'obtenir également [163] d'une façon analogue mais en tenant compte du retard (c.-à-d. en calculant les fréquences $\omega_\alpha(k)$ dans la fente les valeurs exactes de $K^2 = k^2 - \varepsilon\omega^2/c^2$ et non pour $K^2 = k^2$; cf. dans ce qui précède). Bien entendu à la fin du calcul on admet que les permittivités sont arbitraires et qu'elles correspondent aux milieux réels. Outre qu'« on ne juge pas les vainqueurs » la déduction des formules (13.33), (13.34) des milieux absorbants à partir de l'expression générale (13.36) des milieux transparents, peut être justifiée par les arguments suivants. Premièrement, l'appartenance des permittivités ε_1, ε_2 et ε_3 à (13.33) est fonctionnelle. Deuxièmement, la fonction $\varepsilon(\omega)$ est toujours réelle sur l'axe imaginaire (cf. § 62 de [27]). Aussi, le résultat obtenu pour les milieux transparents (avec la fréquence réelle ω, ε_1, ε_2 et ε_3 sont des grandeurs réelles, positives) doit apparemment coïncider avec un résultat sensiblement plus général, applicable à des milieux absorbants. Il est peu probable pourtant, qu'il se trouve quelqu'un pour croire à cette conclusion si elle n'était pas obtenue auparavant sans hypothèses supplémentaires. Tant pour cette raison qu'en ayant en vue d'autres tâches apparentées ou analogues, le développement suivant les oscillations propres de fréquences ω_α utilisé doit être généralisé d'une façon conséquente aux milieux absorbants. C'est ce qui est tout à fait réalisable [166—167a].

La possibilité de la généralisation susmentionnée a été rendue évidente par l'exemple du contour électrique examiné précédemment : l'énergie interne du contour a été trouvée également pour $R \neq 0$;

elle vaut (cf. (13.11), (13.12), (13.15) et (13.30))

$$\left.\begin{aligned} \overline{W} = \overline{U} + \overline{K} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{CRw(\omega, T)\, d\omega}{R^2C^2\omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2} + \\ + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{C^2LRw(\omega, T)\, \omega^2\, d\omega}{R^2C^2\omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2}, \\ w(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T} \end{aligned}\right\} \qquad (13.39)$$

Pour généraliser ce résultat, il faut le ramener à la forme générale du développement suivant les fréquences propres non pas du contour en question lui-même, mais d'un contour auxiliaire. C'est que nous nous intéressons aux oscillations forcées dans le contour, provoquées par une quelconque f.é.m. $\mathscr{E}_\omega \exp(-i\omega t)$ (dans le cas concerné, il s'agit de la f.é.m. fluctuante). Alors, d'après (13.1), il est clair que

$$q_\omega = \frac{\mathscr{E}_\omega}{-L\omega^2 - i\omega R + 1/C} = \frac{L^{-1}\mathscr{E}_\omega}{\omega_1^2 - \omega^2}, \quad \omega_1^2(\omega) = \frac{1}{LC} - i\frac{R}{L}\omega. \quad (13.40)$$

Mais $\omega_1(\omega)$ sont les fréquences propres du contour (c'est ce qui constitue justement le contour auxiliaire)

$$L\ddot{q} + \frac{\omega}{\omega_1} R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0, \qquad (13.41)$$

qui se distingue de (13.1) par $(\omega/\omega_1) R$ substitué à R (pour éviter toute confusion, expliquons une fois de plus que les solutions $\exp(-i\,\omega_1(\omega)t)$ où la fréquence ω, tout comme dans (13.40), est considérée comme paramètre, vérifient justement l'équation (13.41)). En termes des fréquences $\omega_1(\omega)$, l'expression (13.39) se met sous la forme

$$\overline{W} = -\frac{i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{w(\omega, T)}{\omega_1^2(\omega) - \omega^2}\, \omega\, d\omega + \\ + \frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{w(\omega, T)}{\omega_1^2(\omega) - \omega^2} \frac{d\omega_1^2(\omega)}{d\omega}\, d\omega. \qquad (13.42)$$

L'identité des expressions (13.39) et (13.42) est immédiate.

Bien entendu, rien n'est changé encore dans le cas du contour, mais pour généraliser (par exemple, dans le cas des oscillations dans la fente) il faut partir précisément de l'expression (13.42), et surtout utiliser les fréquences $\omega_\alpha(\omega)$ analogues à la fréquence $\omega_1(\omega)$. Ce dernier procédé est bien connu (cf. § 100-102 de [98] et [167a]). Supposons que le système tout entier soit plongé dans une cavité résonnante auxiliaire aux parois conductrices parfaites. la fréquence ω étant considérée comme un paramètre, alors que les fréquences

propres de la cavité $\omega_\alpha(\omega)$ sont déterminées par les équations du champ homogènes

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_{\omega_\alpha \omega}(\omega, \mathbf{r}) &= \\ &= -\frac{i\omega_\alpha(\omega)}{c} \int \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{E}_{\omega_\alpha(\omega)}(\omega, \mathbf{r}')\, d\mathbf{r}', \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\omega_\alpha(\omega)}(\omega, \mathbf{r}) &= \frac{i\omega_\alpha(\omega)}{c} \mathbf{H}_{\omega_\alpha(\omega)}(\omega, \mathbf{r}), \end{aligned}\right\} \quad (13.43)$$

où $\hat{\varepsilon}$ est l'opérateur linéaire qui figure dans (13.24), dont les indices tensoriels i, j sont omis par simplification (13.43) entraîne que pour $\omega_\alpha = \omega$ la cavité auxiliaire coïncide avec la cavité réelle (c.-à-d. avec le système considéré) si les sources extérieures et fluctuantes sont absentes. Les fonctions propres $\mathbf{E}_{\omega_\alpha(\omega)}(\omega, \mathbf{r})$, $\mathbf{H}_{\omega_\alpha(\omega)}(\omega, \mathbf{r})$ de la cavité auxiliaire possèdent plusieurs propriétés (orthogonalité, etc.) qui rendent très simple la recherche des solutions « forcées » dépendant de $\mathbf{K}(\omega, \mathbf{r})$ du problème réel décrit par les équations (13.25). L'énergie interne moyenne du système se met alors simplement sous la forme

$$\overline{W} = -\frac{i}{\pi} \sum_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w(\omega, T)}{\omega_\alpha^2(\omega) - \omega^2} \omega\, d\omega + \\ + \frac{i}{2\pi} \sum_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w(\omega, T)}{\omega_\alpha^2(\omega) - \omega^2} \frac{d\omega_\alpha^2(\omega)}{d\omega} d\omega, \qquad (13.44)$$

ce qui généralise immédiatement l'expression (13.42). Cette dernière circonstance rend déjà évident le fait que pour $\varepsilon'' \to 0$ (ou $R \to 0$), l'expression (13.44) devient (13.36) pour $\overline{W}$ (ceci, certes, concerne également les expressions de $\mathcal{F}$). Par ailleurs, la formule (13.44) est vraie aussi pour les milieux absorbants et (13.43) montre clairement qu'on peut l'utiliser pour évaluer l'anisotropie et la dispersion spatiale. Comme le montrent [166-167a], dans le cas du problème de la fente (cf. fig. 13.3) pour un milieu isotrope sans dispersion spatiale on tire de l'expression (13.44), ou plus précisément de l'expression analogue de l'énergie libre *) la formule (13.33). Lorsqu'on a à résoudre des problèmes encore plus compliqués, par exemple, lorsque les milieux 1 et 2 sont anisotropes [167], les avantages de la méthodo-

---

*) Pour $T \to 0$, l'énergie libre coïncide avec l'énergie interne. Quant aux problèmes sur les forces de Van der Waals, c'est le cas $T \to 0$ qui ordinairement présente de l'intérêt (cf. [27, 153, 160]). C'est pourquoi nous n'avons pas écrit l'expression de $\mathcal{F}$.

logie décrite du développement suivant les oscillations propres deviennent encore plus frappants. On peut penser que c'est précisément cette approche qui sera le plus utilisée dans la résolution de toute une série de problèmes apparentés sur les forces moléculaires de différents milieux et avec les conditions géométriques différentes, dans le calcul de l'énergie libre d'un milieu absorbant, etc.

Considérons à titre de conclusion encore un problème électrodynamique relatif aux fluctuations, à savoir celui de l'action qu'exerce la tension fluctuante dans une cavité résonnante, sur les électrons passant par cette cavité [168].

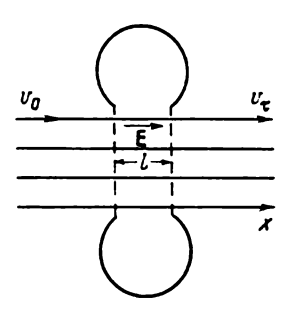


Fig. 13.4. Illustration du problème des électrons traversant une cavité résonnante

Supposons qu'un électron non relativiste à énergie initiale $K_0 = 1/2\, mv_0^2$ entre dans la cavité à l'instant $t = 0$ et en ressort à l'instant τ avec une énergie $K_\tau = 1/2\, mv_\tau^2$. Admettons que le champ de la cavité est homogène et dirigé avec la vitesse des électrons suivant l'axe des x (cas qui correspond aux cavités de forme déterminée, par exemple à celles de la forme schématisée sur la figure 13.4). Si

$$E = E_1 \cos \omega t + (E_2 + E_0) \sin \omega t,$$

alors,

$$m\ddot{x} = eE, \quad v_\tau \equiv \dot{x}(\tau) = v_0 + \\ + \frac{e}{m} \{\mathbf{E}_1 \sin \omega t + (E_2 + E_0)(1 - \cos \omega\tau)\}. \tag{13.45}$$

Considérons ensuite que E_1 et E_2 sont des grandeurs aléatoires, de sorte que $\overline{E}_1 = \overline{E}_2 = 0$ et $\overline{E_2^2} = \overline{E_2^2} = \overline{v^2}/l$, où l est l'épaisseur de la cavité résonnante (voie parcourue par les électrons dans la cavité) et $\overline{V^2}$, la tension fluctuante quadratique moyenne sur l'« armature » de la cavité. Alors, aux termes d'ordre e^2 près, on a ($\overline{K}_0 = 1/2\, mv_0^2$)

$$\left.\begin{aligned} \overline{K}_\tau - \overline{K}_0 &= \frac{e^2}{2m\omega^2}\left(\frac{4\overline{V^2}}{l^2}\sin^2 1/2\omega\tau + E_0^2(1-\cos\omega\tau)^2\right) + \\ &\quad + \frac{2ev_0}{\omega} E_0 \sin^2 1/2\omega\tau, \\ \overline{(\Delta K_\tau)^2} &\equiv \overline{K_\tau^2} - (\overline{K}_\tau)^2 = \overline{(K_\tau - K_0)^2} - \\ &\quad - ((\overline{K_\tau - K_0}))^2 = \frac{4e^2v_0^2}{\omega^2}\frac{\overline{V^2}}{l^2}\sin^2 1/2\omega\tau. \end{aligned}\right\} \tag{13.46}$$

Le terme e^4 omis ici est négligeable si la vitesse de l'électron change faiblement, c.-à-d. $(v_0 - v_\tau) \ll v_0$; en cette approximation, le temps que met un électron à traverser la cavité $\tau = l/v_0$ et

$$\overline{(\Delta K_\tau)^2} = e^2\overline{V^2}\left(\frac{\sin 1/2\omega\tau}{1/2\omega\tau}\right)^2. \tag{13.47}$$

Ci-dessus, nous avons admis que V ne variait pas beaucoup avec le temps. S'il n'en est pas ainsi, au lieu de (13.47) on a

$$\left.\begin{aligned} \overline{(\Delta K_\tau)^2} &= 2e^2\int_0^\infty (V^2)_\omega \left(\frac{\sin 1/2\omega\tau}{1/2\omega\tau}\right) d\omega, \\ \overline{V^2} &= 2\int_0^\infty (V^2)_\omega\, d\omega. \end{aligned}\right\} \tag{13.48}$$

Bien entendu, dans un cas classique, il est possible que $(V^2)_\omega = 0$, mais, à l'état d'équilibre thermique, dans la cavité il y a toujours un rayonnement électromagnétique; de plus

$$(V^2)_\omega = \frac{R(\omega)\,\varkappa T/\pi}{R^2C^2\omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2}, \tag{13.49}$$

où on a utilisé la formule classique de Nyquist (13.17) pour $(\mathscr{E}^2)_\omega$, alors que $L(\omega)$, $C(\omega)$ et $R(\omega)$ sont respectivement l'induction, la capacité et la résistance d'un contour équivalent à la cavité donnée dans le calcul de la tension V. Dans ces conditions, le contour est considéré comme appartenant au type représenté sur la figure 13.1 (connexion en série) et tel que $Z = R - i(\omega L - 1/\omega C)$ $J_\omega = \mathscr{E}_\omega/Z(\omega)$ et $V_\omega = J_\omega/i\omega C = \mathscr{E}_\omega/i\omega CZ$. Alors qu'en utilisant la formule quantique de Nyquist (13.16) on obtient

$$\overline{(\Delta K_\tau)^2} = e^2\int_0^\infty \frac{(2/\pi)\,R(\omega)\,\{1/2\hbar\omega + \hbar\omega/[\exp(\hbar\omega/\alpha T) - 1]\}}{R^2C^2\omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2}\left(\frac{\sin 1/2\omega\tau}{1/2\omega\tau}\right)^2 d\omega \tag{13.50}$$

ou pour une cavité résonnante faiblement évanescente (au facteur de qualité (Q) élevé) de fréquence propre $\omega_l = 1/\sqrt{LC}$

$$\overline{(\Delta K_\tau)^2} = \frac{e^2}{C(\omega_l)}\left(1/2\hbar\omega_l + \frac{\hbar\omega_l}{\exp(\hbar\omega_l/\varkappa T) - 1}\right)\left(\frac{\sin 1/2\omega_l\tau}{1/2\omega_l\tau}\right)^2. \tag{13.51}$$

Puisque, dans ce qui précède, nous avons admis que le mouvement des électrons était classique, le résultat susmentionné est vrai seule-

ment sous certaines limitations. Si l'on se souvient pourtant que la longueur d'onde de l'électron est $\lambda = 2\pi\hbar/mv < 10^8$ cm avec $K = 1/2\ mv^2 \geqslant 10$ eV, il devient clair que, pour les cavités résonnantes traversées par un faisceau électronique, l'approche classique reste, pratiquement toujours, valable. Or, dans toute une série d'articles (cf. les références de [168]), le même résultat du problème ci-dessus s'obtenait par la méthode de la mécanique quantique appliquée tant au rayonnement qu'au déplacement des électrons. Ce qui vient d'être dit rend clair qu'en général, cette manière de procéder est superflue (pour certaines réserves supplémentaires cf. pourtant [168]).

CHAPITRE 14

DIFFUSION DES ONDES DANS LE MILIEU

Diffusion des ondes électromagnétiques (lumineuses) dans un milieu. Largeur des raies dans le spectre d'émission et dans le spectre de la lumière diffuse. Diffusion de combinaison de la lumière avec formation des polaritons (excitons réels). Diffusion sur les électrons libres et dans un plasma. Diffusion de transition

Un milieu est dit homogène si ses propriétés statistiques moyennes ne dépendent pas des coordonnées (dans ce qui précède, cette définition était toujours sous-entendue). C'est dans ces conditions précisément qu'a été introduit, par exemple, le tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ qui associe l'induction moyenne et le champ moyen (par moyennes on entend les valeurs statistiques moyennes). Dans un milieu homogène, comme le montre la résolution des équations du champ, les champs moyens (ondes) se propagent sans aucune diffusion; cette résolution a été réalisée, notamment, dans les chapitres 10 et 11 pour trouver les ondes normales. Mais si l'on tient compte des fluctuations, le milieu évidemment devient inhomogène et les ondes se diffusent, la diffusion sur les fluctuations thermiques de la permittivité ne se distinguant en rien, en principe, de la diffusion sur les inhomogénéités de ε_{ij} dues aux sources extérieures. Puisqu'en présence de la dispersion spatiale l'introduction même du tenseur $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ suppose l'homogénéité du milieu, l'étude de la diffusion, compte tenu de la dispersion spatiale, impose une analyse spéciale. Dans ce qui suit, dans la discussion de la diffusion avec production des polaritons, nous traiterons cette question, en considérant pour le reste que, dans le milieu soumis à l'étude, la dispersion spatiale est absente. La théorie générale de la diffusion des ondes électromagnétiques dans un milieu isotrope négligeant la dispersion spatiale et, de préférence, sous la condition d'une faible variation de la fréquence du rayonnement diffus par rapport à celle du rayonnement incident, est exposé au chapitre 14 de [27] (cf. également [169]). Nous nous bornerons donc, comme d'ordinaire, à un tour d'horizon sommaire de certains résultats généraux, pour passer ensuite aux notes complémentaires.

Dans la plupart des cas, le champ diffus $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ est faible devant le champ $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ de l'onde incidente (diffusée) (une exception est présentée, par exemple, par le domaine d'opalescence critique, sans parler déjà de la diffusion par différents milieux troubles du type émulsion). Dans ces conditions que nous nous imposerons comme

limites, nous pouvons appliquer la méthode des perturbations. Ecrivons la relation entre l'induction totale $\mathbf{D}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}'$ et le champ total $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ sous la forme

$$D_i = \varepsilon_{ij}E_j \approx \varepsilon_{ij}^{(0)}E_j + \delta\varepsilon_{ij}E_{0,j} = \varepsilon_{ij}^{(0)}E_{0,j} + \varepsilon_{ij}^{(0)}E'_j + \delta\varepsilon_{ij}E_{0,j} =$$
$$= D_{0,i} + \varepsilon_{ij}^{(0)}E'_j + \delta\varepsilon_{ij}E_{0,j}, \qquad (14.1)$$

où $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}^{(0)}(\omega) + \delta\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r})$; on admet que la partie fluctuante de la permittivité $\delta\varepsilon_{ij}$ est un petit de même ordre que le champ E'_j ; dans un milieu isotrope, $\varepsilon_{ij}^{(0)} = \varepsilon\delta_{ij}$, et sous l'hypothèse du milieu transparent on peut admettre également que les tenseurs ε et $\delta\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon_{ij}$ sont réels (bien entendu, dans un milieu isotrope non plus le tenseur $\delta\varepsilon_{ij}$ ne se ramène pas en général à un scalaire). Sous toutes ces hypothèses de simplification il est commode d'exprimer $\mathbf{E}'$ par $\mathbf{D}'$ et d'écrire

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D}' - \frac{\mathbf{C}}{\varepsilon}, \quad C_i = \delta\varepsilon_{ij}E_{0,j}. \qquad (14.2)$$

Considérons maintenant l'équation d'onde du champ $\mathbf{E}$, c.-à-d. l'équation (cf. (10.21))

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D} = 0.$$

En y portant la relation (14.2), compte tenu du fait que par hypothèse

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}_0 - \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D} = 0,$$

on obtient

$$\Delta\mathbf{D}' + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mathbf{D}' = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{C}, \qquad (14.3)$$

puisque $\operatorname{div}\mathbf{D} = \operatorname{div}\mathbf{D}_0 = \operatorname{div}\mathbf{D}' = 0$.

La résolution de l'équation (14.3) pour l'onde incidente $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{00}\exp(i\mathbf{k}_e\mathbf{r})$, l'observation se faisant dans la direction $\mathbf{k}_s$, à une grande distance R_0 du volume diffuseur (mais dans le domaine de $\varepsilon(\omega)$ de même valeur) amène

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{E}' = -\frac{\exp(ik_sR_0)}{4\pi\varepsilon R_0}[\mathbf{k}_s[\mathbf{k}_s\mathbf{G}]].\\ &G_i = \int(\delta\varepsilon_{ij}E_{00,j})\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})\,dV,\\ &\mathbf{q} = \mathbf{k}_e - \mathbf{k}_s, \quad k_e = k_s = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)}, \end{aligned}\right\} \qquad (14.4)$$

où $\mathbf{k}_e$ et $\mathbf{k}_s$ sont les vecteurs d'onde des ondes incidente et diffusée.

Nous avons adopté précédemment qu'en toute rigueur la diffusion avait lieu sans changement de fréquence et de ce fait nous ne

faisions pas de différence entre la fréquence de la lumière incidente *) ω_e et la fréquence de la lumière diffuse ω_s; pour la même raison, $k_e = k_s$. Or, en fait, rien ne change si $\omega_e \neq \omega_s$, mais on peut ignorer la dépendance fréquentielle entre ε et $\delta\varepsilon_{ij}$ dans l'intervalle de fréquences $\Delta\omega \sim (\omega_e - \omega_s)$. Autrement dit, on peut admettre que le champ $\mathbf{E}'$ est le champ total de la lumière diffuse sous la condition que $\Delta\omega \ll \omega_e$. C'est pourquoi le calcul de $|\overline{\mathbf{E}'}|^2$, où le surlignement traduit la mise en moyenne par rapport au temps, fournit l'intensité totale (pour toutes les fréquences) du rayonnement diffus. D'après (14.4), pour l'intensité de la lumière diffuse $I = \overline{S}R_0 = \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{8\pi} |\overline{\mathbf{E}'}|^2 R_0^2$, rapportée à l'intensité de la lumière incidente $I_0 = \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2$ et à l'unité d'angle solide, on a

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \frac{\overline{|\mathbf{G}|^2}}{|E_0|^2} \sin^2\psi, \qquad (14.5a)$$

où ψ est l'angle entre $\mathbf{G}$ et $\mathbf{k}_s$ (vecteur d'onde de la lumière diffuse) et où l'on tient compte que $k_e^2 = k_s^2 = (\omega^2/c^2)\varepsilon$. Dans plusieurs cas,

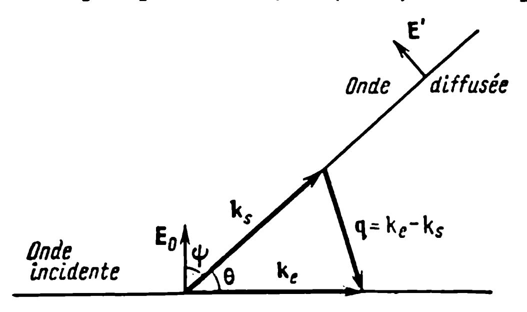


Fig. 14.1. Diffusion dans un milieu

Dans l'onde diffusée, le champ est polarisé linéairement (comme l'indique la figure) seulement si les fluctuations vérifient la condition $\delta\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon\delta_{ij}$

par exemple dans celui d'un gaz de molécules sphériques symétriques, ainsi que de plusieurs liquides, on peut considérer que les fluctuations $\delta\varepsilon_{ij}$ sont scalaires, c.-à-d. poser $\delta\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon\delta_{ij}$. Dans ces conditions (cf. (14.4) et (14.5a), ainsi que fig. 14.1)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{I}{I_0} = \frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \overline{|\delta\varepsilon_q|^2} \sin^2\psi, \quad \mathbf{G} = \delta\varepsilon_q \mathbf{E}_{00}, \\ &\delta\varepsilon_q = \int \delta\varepsilon(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{qr})\, pV, \end{aligned}\right\} \qquad (14.5b)$$

*) Nous parlons de la lumière seulement pour abréger et pour rendre le texte quelque peu plus concret; évidemment, on envisage, au fond, la diffusion des ondes électromagnétiques de toutes les gammes mais sous la condition que $\lambda \ll a$, où $a \gg 10^{-7}$—10^{-8} cm est la dimension atomique.

où $|\overline{\delta\varepsilon_q}|^2 \equiv ((\delta\varepsilon)^2)_q$, mais cette dernière notation, analogue à celle du chapitre 13, est moins commode.

Rappelons que le champ incident était considéré comme étant de la forme $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{00} \exp(i\mathbf{k}_e\mathbf{r})$; pour $\mathbf{E}_{00}$ = const, ceci correspond à une onde polarisée linéairement. On voit aisément que pour la lumière naturelle (non polarisée) d'intensité I_0,

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^4 |\overline{\delta\varepsilon_q}|^2 (1+\cos^2\theta), \quad \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}, \tag{14.6}$$

où θ est l'angle de diffusion, c.-à-d. l'angle compris entre $\mathbf{k}_e$ et $\mathbf{k}_s$. Dans les conditions où $|\overline{\delta\varepsilon_q}|^2$ ne dépend pas de q (cf. plus loin), l'intensité I peut être intégrée immédiatement sur les angles (l'élément de l'angle solide $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$); il en résulte pour ce qu'on appelle le coefficient d'extinction

$$h = \frac{\int I\, d\Omega}{I_0} = \frac{\omega^4}{6\pi c^4}\frac{|\overline{\delta\varepsilon}|^2}{V}. \tag{14.7}$$

Le volume diffuseur V du milieu intervient dans cette formule parce que, par définition, h est le rapport de l'intensité de la lumière diffusée dans toutes les directions à l'intensité de la lumière incidente, la volume diffuseur étant pris comme unité; autrement dit, sous l'effet de la diffusion, l'intensité de la lumière incidente varie suivant la loi $dI = -hIdz$. Pour la lumière polarisée, le coefficient d'extinction h est certainement égal à la même expression (14.7); ce résultat, outre les conditions générales, se déduit de (14.5b) par intégration sur les angles.

Par définition

$$|\overline{\delta\varepsilon_q}|^2 = \int\int \overline{\delta\varepsilon(\mathbf{r}_1)\,\delta\varepsilon^*(\mathbf{r}_2)\exp[iq(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)]\, d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2}.$$

Pour la mise en moyenne, il faut tenir compte que, lorsque les fréquences de la lumière diffuse sont considérées toutes ensemble, les fluctuations $\delta\varepsilon(\mathbf{r}_1)$ et $\delta\varepsilon(\mathbf{r}_2)$ ne sont en corrélation d'habitude que sur les distances $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \sim a \sim 10^8 - 10^7$ cm. Aussi lorsque $\lambda \gg a$, peut-on adopter dans l'expression de $|\delta\varepsilon q|^2$, pour la lumière, $\exp[i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] = 1$. Dans un milieu homogène, la valeur moyenne de $\delta\varepsilon(\mathbf{r}_1)\,\delta\varepsilon^*(\mathbf{r}_2)$ ne peut dépendre que de la différence $\mathbf{r} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. C'est pourquoi en passant aux variables $1/2\,(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, on montre aisément que, dans les conditions discutées,

$$\overline{\delta\varepsilon_q}|^2 = V\int \overline{(\delta\varepsilon)^2}\, d\mathbf{r} = V^2\frac{\overline{\left(\int \delta\varepsilon\, d\mathbf{r}\right)^2}}{V^2} \equiv V^2\overline{(\delta\varepsilon)^2_V}, \tag{14.8}$$

où V est le volume du domaine diffuseur du milieu; bien entendu, il fallait s'attendre à ce que la grandeur $|\overline{\delta\varepsilon_q}|^2$ et donc l'intensité I (cf. (14.5b)), soient proportionnelles au volume V (l'introduction de

la grandeur $\overline{\delta\varepsilon)^2_V}$ est commode du fait qu'elle est proportionnelle à $1/V$).

En première approximation, le rôle des fluctuations de la température est faible (pour plus de détails, cf. [169]) ; il vient donc

$$\overline{(\delta\varepsilon)^2} \approx \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)^2_T \overline{(\delta\rho)^2_V}, \quad \overline{(\delta\rho)^2} = \frac{\varkappa T\rho}{V}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T; \tag{14.9}$$

d'où on tire en utilisant (14.5), (14.7), (14.8) la formule déduite par Einstein en 1910 (cf. [170])

$$\left.\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \frac{V}{16\pi^2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4\left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)^2_T \beta_T\varkappa T\sin^2\psi, \\ h &= \frac{\omega^4}{6\pi c^4}\left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)^2_T \beta_T\varkappa T, \end{aligned}\right\} \tag{14.10}$$

où $\beta_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T$ est la compressibilité isothermique.

Pour les gaz non comprimés, $\varepsilon - 1 = \text{const}\cdot\rho$, $\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T = \varepsilon - 1 \approx 2(n-1) \approx 4\pi\alpha N$ et $\beta_T = 1/\varkappa TN$ (N est la concentration des particules dans le gaz ; α, la polarisabilité de la molécule), et c'est pourquoi (14.10) conduit à la formule de Rayleigh

$$h = \frac{2\omega^4(n-1)^2}{3\pi c^4 N} = \frac{8\pi\omega^4\alpha^2 N}{3c^4}. \tag{14.11}$$

Le résultat (14.11) est équivalent à celui qu'on obtiendrait sous l'hypothèse que les molécules diffusent indépendamment l'une de l'autre. En effet, dans le champ d'onde, une molécule isotrope acquiert le moment dipolaire $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}_0 = \alpha\mathbf{E}_{00}\exp(-i\omega t)$ et, par conséquent, dissipe par unité de temps l'énergie (cf., par exemple, (1.85) et (3.1))

$$\int I\,d\Omega = \frac{\alpha^2\omega^4}{3c^3}|\mathbf{E}_{00}|^2;$$

puisque dans notre cas $I_0 = (c/8\pi)\,|\mathbf{E}_{00}|^2$, pour $h = \int I d\Omega/I_0$ on aboutit tout de suite à (14.11). Le fait que dans les gaz, ou en toute rigueur, dans des gaz assez raréfiés (parfaits), la position des particules n'est pas dépendante et $|\delta N|^2 = N$, entraîne que la diffusion sur les fluctuations de la densité est équivalente à la diffusion indépendante (non cohérente) sur des particules (molécules) isolées.

Par commodité, ci-dessus, nous n'avons que repris sommairement (en s'inspirant essentiellement de [27]) le calcul de l'intensité de la lumière diffuse. Pour établir la composition spectrale de la lumière diffuse, ou, comme on dit souvent, pour trouver la largeur des raies de son spectre, il faut déterminer la marche des fluctuations de $\delta\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t)$ dans le temps. Mais nous préférons ici examiner d'abord la question de la largeur des raies aussi bien lors de l'émission que lors de la

diffusion de la lumière dans des gaz raréfiés, c.-à-d. considérer que les particules émettent ou diffusent indépendamment l'une de l'autre. Dans cette voie et en passant ensuite à la diffusion dans un milieu dense, nous éluciderons plusieurs éléments sur lesquels généralement on n'insiste pas beaucoup dans la littérature (dans ce qui suit nous nous guidons sur l'article [171]).

Commençons par définir la largeur des raies de la lumière émise, sur l'exemple très usité d'un oscillateur évanouissant. L'équation du mouvement correspondante est de la forme

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{14.12}$$

Admettons que le déplacement initial de l'oscillateur, à l'instant $t = 0$, est x_0, c.-à-d. utilisons la solution

$$\left.\begin{aligned} &x(t) = x_0 \exp(-1/2\gamma t)\cos(\omega_k t + \varphi), \quad \omega_k^2 = \omega_0^2 - 1/4\gamma^2, \quad t > 0, \\ &x(t) = 0, \quad t < 0, \end{aligned}\right\} \tag{14.13}$$

où φ est une phase arbitraire. En développant l'oscillation (14.13) en une intégrale de Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_\omega \exp(-i\omega t)\, d\omega, \quad x_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(i\omega t)\, dt,$$

on obtient

$$x_\omega = -\frac{x_0}{4\pi}\left\{\frac{\exp(-i\varphi)}{-1/2\gamma - i(\omega_k - \omega)} + \frac{\exp(+i\varphi)}{1/2\gamma + i(\omega_k + \omega)}\right\}. \tag{14.14}$$

On sait que l'intensité (la puissance) du rayonnement dipolaire est proportionnelle à $(e\ddot{x})^2$, où e est la charge de la particule. Il est donc évident que la densité spectrale de l'intensité $I(\omega)$ est proportionnelle à $\omega^4 \mid x_\omega \mid^2$. Admettons également que la phase est arbitraire et procédons à la mise en moyenne par rapport aux phases, ayant en vue qu'on observe le rayonnement d'un ensemble des oscillateurs à phases arbitraires. Il vient

$$\begin{aligned} I(\omega) &= A\omega^4 \overline{|x_\omega|^2} \equiv A\omega^4 (x^2)_\omega = \\ &= \frac{Ax_0^2\omega^4}{16\pi^2}\left\{\frac{1}{(\omega_k - \omega^2) + 1/4\gamma^2} + \frac{1}{(\omega_k + \omega)^2 + 1/4\gamma^2}\right\} = \\ &= \frac{Ax_0^2\omega^4(\omega_0^2 + \omega^2)}{8\pi^2[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}, \end{aligned} \tag{14.15}$$

où A est un coefficient de proportionnalité et la mise en moyenne est notée par le surlignement. Si comme d'ordinaire on a (à l'exception de la gamme des ondes radio)

$$\gamma \ll \omega_0, \tag{14.16}$$

on peut écrire avec une précision suffisante

$$\left.\begin{aligned} I(\omega) &= \frac{A x_0^2 \omega_0^4}{16\pi^2 [(\omega-\omega_0)^2 + 1/4\gamma^2)]} = \frac{\gamma I_0/2\pi}{(\omega-\omega_0)^2+1/4\gamma^2}, \\ I_0 &= \int_0^\infty I(\omega)\,d\omega, \end{aligned}\right\} \quad (14.17)$$

Pour $I(\omega)$, on emploie justement la formule (14.17) dont le sens est parfaitement clair. Quant au cas de la formule plus générale (14.15), on voit (cf. plus loin) que x_0^2 ne s'exprime pas d'une façon simple à travers $\overline{x^2} = \int (x^2)_\omega d\omega$ et, par conséquent, l'hypothèse de la persistance de x_0 pour tous les oscillateurs est tout à fait arbitraire et déraisonnable (cf. plus loin). Tant pour cette raison que pour l'exposé ultérieur, examinons un problème plus réaliste : ce même oscillateur soumis cette fois à l'action d'une force aléatoire $f(t)$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega \exp(-i\omega t)\,d\omega \quad (14.18)$$

D'où

$$x_\omega = \frac{f_\omega}{-\omega^2+\omega_0^2-i\gamma\omega}. \quad (14.19)$$

Le rôle de la « force » f peut être rempli, par exemple, par les collisions que maintiennent l'amplitude quadratique des oscillations à un certain niveau moyen invariable. Si l'on admet que $f(t) = \sum_m a_m \delta(t - t_m)$, alors,

$$f_\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_m a_m \exp(i\omega t_m)$$

et pour les collisions aléatoires (non corrélées) on obtient la valeur moyenne

$$(f^2)_\omega = \frac{1}{4\pi^2} \sum_m a_m^2.$$

Ensuite, dans ce cas

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2)_\omega\,d\omega = (f^2)_\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2} = \frac{\pi (f^2)_\omega}{\gamma\omega_0^2}. \quad (14.20)$$

Par là même, la moyenne $\overline{x^2}$ et, par conséquent, les valeurs moyennes de l'énergie potentielle $1/2\ m\omega_0^2\overline{x^2}$ et de l'énergie cinétique $1/2\ m\overline{\dot{x}^2}$ se trouvent constantes pour $(f^2)_\omega$ = const donné (à l'état d'équili-

bre thermique, ces valeurs moyennes valent 1/2 $\varkappa T$). C'est pourquoi l'utilisation de l'expression (14.19) et non pas de (14.14) est non seulement plus simple et plus commode, mais encore plus sensée. Compte tenu de ce qui vient d'être dit, (14.19) implique immédiatement

$$I(\omega) = A\omega^4 (x^2)_\omega = \frac{A\omega^4 (f^2)_\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}. \tag{14.21}$$

Bien entendu, sous la condition (14.16) l'expression (14.21) se transforme en (14.17). Mais comme nous l'avons dit, dans le cas général, la densité spectrale de l'intensité (14.21) s'obtient sous des hypothèses plus raisonnables et plus naturelles que l'expression (14.15). Pour ce qui est de l'élargissement des raies d'émission et d'absorption observé dans des conditions réelles et non dans le cas considéré du modèle le plus simple, ses possibilités et variantes sont bien nombreuses (cf. [172]).

Examinons toujours le même oscillateur harmonique mais envisageons-le comme un diffuseur et non comme un émetteur spontané de lumière. Supposons que la lumière incidente soit monochromatique, c.-à-d. que le champ de l'onde incidente soit de la forme

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_\omega \exp(-i\omega t)\, d\omega = E_0 \exp(-i\omega_e t),$$

$$E_\omega = E_0 \delta(\omega-\omega_e), \tag{14.22}$$

la fréquence ω_e se trouvant loin de la résonance.

Quelle sera la composition spectrale de la lumière diffuse si l'on tient compte de l'amortissement de l'oscillateur diffuseur ou lorsque l'émission spontanée de l'oscillateur subit un élargissement de choc (dans ce cas, sous les hypothèses les plus simples, on obtient la formule (14.17) avec $\gamma = 2/\tau$, où τ est la durée moyenne entre les collisions; cf. [172, 173])?

A cette question en son temps, plusieurs articles ont donné la réponse suivante: la largeur de la raie de diffusion sera la même que celle dans le cas d'émission; cette réponse l'auteur a eu l'occasion d'entendre également à plus d'une reprise aux examens. Or, on voit aisément que sous les hypothèses avancées, la lumière diffuse sera monochromatique, c.-à-d., pratiquement, les raies ne s'élargissent pas du tout. En effet, l'équation du mouvement d'un oscillateur dans un champ (14.22) considéré comme dirigé suivant l'axe des x est de la forme

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) + \frac{e}{m} E_0 \exp(-i\omega_e t). \tag{14.23}$$

D'où

$$x_\omega = \frac{(e/m) E_0 \delta(\omega-\omega_e) + f_\omega}{-\omega^2+\omega_0^2-i\gamma\omega}, \tag{14.24}$$

et, loin de la résonance, c.-à-d. pour $|\omega_e - \omega| \gg \gamma$, ainsi que sous l'hypothèse que les collisions ne soient pas très fréquentes, le terme qui domine absolument est celui proportionnel à $\delta(\omega - \omega_e)$ puisque le spectre de la force aléatoire f est très large.

Ce qui vient d'être dit est bien évident, certes, sans aucun développement spectral : en diffusant de la lumière l'osillateur effectue des oscillations forcées de fréquence égale à celle de la force appliquée (onde diffusée). Quant aux collisions, tant qu'on peut négliger leur durée $\Delta\tau$, elles modifient l'amplitude et la phase des oscillations propres de l'oscillateur, de fréquence $\omega_k = \sqrt{\omega_0^2 - 1/4\,\gamma^2}$ qu'on considère comme sensiblement différente de la fréquence de l'onde incidente ω_e. Pendant le temps $\Delta\tau$, lorsque la diffusion est effectuée par un autre système, l'allure de la diffusion change, ce qui peut entraîner en particulier une dépolarisation de la lumière diffuse [174]. Un élargissement apparaît également en s'approchant de la résonance, bien qu'en principe la question paraisse parfaitement claire, une étude spéciale doit porter sur la diffusion des impulsions successives).

Loin de la résonance et en négligeant la durée des collisions par rapport à celle du libre parcours, l'élargissement des raies de diffusion on est associé seulement au mouvement du diffuseur. Le premier à se manifester dans ces conditions est l'élargissement Doppler usuel [172, 173]

$$\left.\begin{aligned} I(\Omega) &= \text{const}\cdot\exp\left(-\frac{\Omega^2}{b^2}\right) \\ \Omega = \omega_e - \omega, \quad b^2 &= \frac{8\varkappa T\omega_e^2 \sin^2 1/2\theta}{Mc^2} \end{aligned}\right\} \tag{14.25}$$

où θ est l'angle de diffusion et T, la température du gaz diffuseur composé de particules (de l'ensemble des oscillateurs) de masse M ; Ω est évidemment la différence entre la fréquence de l'onde incidente et de l'onde diffusée.

D'autre part, il existe un élargissement associé génétiquement à l'élargissement Doppler, l'intensité correspondante étant proportionnelle au carré de la pression. Cet effet a été étudié dans [175] pour le cas d'un gaz raréfié, lorsque la longueur du libre parcours $l \gg \lambda_0/2 \sin 1/2\,\theta$, $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_e$. Dans l'aile de la raie (dans le domaine $\Omega \gg b$) l'intensité $I(\Omega) = \text{const}\cdot p^2/\Omega^6$, où p est la pression. L'élargissement concerné est dû à cette circonstance que les collisions modifient la projection de la vitesse de l'atome (oscillateur) sur la direction de l'observation. Il en résulte également un changement du décalage Doppler de la fréquence, c.-à-d. la dérivée de la phase subit une discontinuité ; autrement dit, l'onde diffusée se compose de secteurs de fréquences distinctes mais à phase continue. Le développement en série de Fourier d'une telle onde possède naturellement une

aile supplémentaire dont l'intensité croît avec l'augmentation de la pression *).

Le domaine des pressions où $l \sim \lambda_0/2 \sin 1/2\,\theta$, est un domaine intermédiaire et se prête mal à une analyse. Mais si $l \ll \lambda_0/2 \sin 1/2\,\theta$ (gaz comprimé), alors une approche phénoménologique est possible, analogue à la diffusion dans des milieux denses; par exemple, la diffusion Rayleigh est décrite comme une diffusion sur les ondes acoustiques et celles d'entropie (cf. plus loin). Pour ce cas, la question de la largeur des raies est étudiée depuis longtemps [27, 169, 176, 177]. La diffusion dans un milieu dense sera examinée plus loin, alors que maintenant nous allons entreprendre l'étude de la largeur des raies de la lumière diffuse due à l'effet Raman dans les gaz.

Dans les cas courants, le modèle classique employé pour décrire la diffusion de combinaison de la lumière, par une molécule, est un oscillateur (disons que la coordonnée généralisée x est proportionnelle à la distance entre les deux noyaux dans une molécule diatomique) qui simule la polarisabilité électronique de la molécule $\alpha(x)$; alors, le moment dipolaire de la molécule induit par un champ incident E (pour plus de détails, cf. [173, 178]) vaut

$$p(t) = \alpha(x) E = \alpha(x) E_0 \exp(-i\omega_e t), \alpha(x) = \\ = \alpha(0) + \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_0 x. \qquad (14.26)$$

Le changement de la coordonnée x peut être décrit, avec une certaine approximation, par l'équation (14.18). Alors, d'après (14.19) et (14.26)

$$p_\omega = \alpha(0) E_0 \delta(\omega - \omega_e) + \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_0 \frac{f_\Omega}{|-\Omega^2 + \Omega_0^2 - i\gamma\Omega|} = \\ = p_{\omega_e} + p_\Omega, \quad \Omega = \omega_e - \omega, \qquad (14.27)$$

où pour uniformiser guelque peu, la fréquence de l'oscillateur ω_0 de (14.18) est notée Ω_0.

Le premier terme de l'expression de $p\omega$ est responsable de la diffusion Rayleigh et ne nous intéresse pas ici. C'est pourquoi la

*) Si le gaz est composé d'atomes de sortes différentes (à masses différentes), l'expression de l'intensité contient alors un terme proportionnel à Ω^{-4}. D'autre part, un élargissement supplémentaire apparaît en présence des collisions qui font passer les atomes (molécules) à des états de polarisabilité différente. Notons, enfin, que dans le cas des niveaux dégénérés de la molécule diffusante, sur la diffusion Rayleigh (cohérente) vient se superposer la diffusion liée aux transitions de la molécule d'un sous-niveau donné à d'autres sous-niveaux du niveau considéré. Il s'agit ici au fond d'un effet Raman qui s'accompagne déjà d'un élargissement des raies (cf. plus loin).

densité spectrale de la diffusion de combinaison peut se mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} I(\Omega) &= A\omega_e^4 \overline{|p_\Omega|^2} = \frac{(\gamma\Omega_0^2/\pi)\, I_0}{(\Omega^2-\Omega_0^2)^2+\gamma^2\Omega^2}, \\ I_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} I(\Omega)\, d\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (14.28)$$

où nous avons posé $\omega = \omega_e$, ce qui est vrai sous la condition $\Omega \ll \omega_e$; on admet également que $\overline{|f_\Omega|^2} \equiv (f^2)_\Omega = \text{const.}$

Le domaine des fréquences $\Omega < 0$ correspond au satellite rouge; celui de $\Omega > 0$, au satellite violet. Si $\Omega_0 \gg \gamma$, pour chacun des satellites

$$I(\Omega) = \frac{\gamma I_0/4\pi}{(\Omega-\Omega_0)^2+1/4\gamma^2}, \quad \Omega_0 \gg \gamma, \quad \Omega = \omega_e - \omega, \qquad (14.29)$$

où I_0 est l'intensité totale des deux satellites.

Dans le cas des raies d'émission et d'absorption pour l'optique la condition $\omega_0 \gg \gamma$ (cf. (14.16)) est observée toujours; en vertu de ce fait la formule générale (14.21) de la gamme optique n'a pas de valeur réelle et c'est l'expression (14.17) qui convient toujours pour l'élargissement du type correspondant. Pour ce qui est de la diffusion, le domaine d'application de la formule (14.28) est sensiblement plus large, la fréquence Ω_0 pouvant être petite, ce qui est le fait d'une certaine oscillation (mode), par exemple, en s'approchant du point du changement de phase de deuxième espèce *).

Dans ce qui précède nous avons obtenu pour la largeur de la raie d'émission non seulement l'expression (14.21) mais encore l'expression (14.15). Si on procède d'une façon analogue, comme on le fait parfois pour les raies de la diffusion de combinaison, c.-à-d. si, sans introduire une force aléatoire $f(t)$, on écrit dans (14.26)

$$x = x_0 \exp(-1/2\gamma t) \cos(\Omega_k t + \varphi), \; \Omega_k^2 = \Omega_0^2 - 1/4\gamma^2, \qquad (14.30)$$

alors, le développement en série de Fourier pour

$$p(t) = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_0 x E_0 \exp(-i\omega_e t)$$

conduit à la formule de la forme (14.15)

$$I(\Omega) = \frac{A'\omega_e^4(\Omega_0^2+\Omega^2)}{(\Omega^2-\Omega_0^2)^2+\gamma^2\Omega^2}. \qquad (14.31)$$

*) Cf. [179]. Il convient de noter que dans l'étude de la diffusion au voisinage des points de changement de phase de deuxième espèce et des changements analogues, [179] et certains autres articles qu'indique cet ouvrage, admettent une inexactitude assez importante relative aux corps solides et due au fait qu'on n'y tient pas compte du rôle des déformations de glissement [180].

C'est à cette expression justement qu'on se réfère parfois dans la littérature, qui est considérée comme plus précise que la relation (14.28). Mais comme nous l'avons vu plus haut, en fait la situation est directement opposée et, dans le cadre du modèle adopté, il faut utiliser la formule (14.28) et non pas (14.31).

Puisque le résultat (14.28) obtenu pour la largeur des raies de la diffusion de combinaison est analogue à la formule (14.21) de la largeur des raies d'émission, on peut avoir l'impression qu'une importante différence entre eux n'existe que dans le cas de la diffusion Rayleigh. Pourtant, comme nous allons le voir, cette conclusion serait trop hâtive et concerne en fait les cas les plus simples, notamment, les modèles à oscillateur déjà discutés, décrivant, dans une certaine mesure, la diffusion dans les gaz. Mais si on veut généraliser au cas de n'importe quelle diffusion dans un milieu dense, les expressions de la largeur des raies diffèrent sensiblement suivant qu'il s'agit de l'absorption (de l'émission) ou de la diffusion.

La diffusion de la lumière dans les gaz suffisamment raréfiés est caractérisée par l'indépendance (incohérence) de la diffusion par des volumes différents, ou comme on peut l'admettre, par des molécules différentes (oscillateurs diffusants). Dans les gaz condensés et les mileux denses la diffusion ne peut être considérée comme indépendante suivant les points différents, surtout lorsqu'on analyse la composition spectrale de la lumière diffuse. Dans ces cas, une approche adéquate dont l'application remonte à l'ouvrage susmentionné d'Einstein [170], est fournie par la représentation de la diffusion sur les composantes de Fourier spatiales des fluctuations du tenseur de permittivité *), ce qui est, au fond une étude identique de l'interaction de diverses ondes planes se propageant dans le milieu. C'est précisément de cette façon que se faisait ci-dessus le calcul de l'intensité de la lumière diffuse (cf. (14.4)-(14.7)). Mais maintenant nous distinguerons entre la fréquence de la lumière diffuse et la fréquence de la lumière incidente.

Reprenons par commodité les notations employées. Notons $\mathbf{k}_e$ et $\mathbf{k}_s$ les vecteurs d'onde de la lumière incidente et diffuse; ω_e et ω_s, les fréquences correspondantes (plus haut, l'indice s a été souvent omis). En supposant que le milieu est transparent pour les fréquences ω_e et ω_s, admettons que toutes les grandeurs, $\mathbf{k}_e$, $\mathbf{k}_s$, ω_e et ω_s, sont réelles. Alors, l'onde diffusante, par exemple, la composante de Fourier de la variation fluctuante de la permittivité $\delta\varepsilon$ (on envisage la diffusion Rayleigh sans tenir compte de l'anisotropie; pour plus de détails, cf. [27, 169, 177]) est caractérisée par la fréquence Ω et le vecteur d'onde $\mathbf{q}$ qui valent

$$\Omega = \omega_e - \omega_s; \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}_e - \mathbf{k}_s. \tag{14.32}$$

*) On peut attirer l'attention sur le rétrécissement des raies de la lumière diffusée par effet Raman dans les gaz lors du passage à des pressions élevées, lorsqu'on parvient encore à voir la diffusion sur des molécules isolées [181].

Si la variation de la fréquence Ω est faible, alors $k_s \approx k_e = 2\pi n/\lambda_0 = \omega_e n(\omega_e)/c$ et

$$q \equiv \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{4\pi n}{\lambda_0} \sin 1/2\theta = \frac{2\omega_e n(\omega_e)}{c} \sin 1/2\theta, \qquad (14.33)$$

où $n(\omega_e)$ est l'indice de réfraction à la fréquence $\omega_e \approx \omega_s$ et θ, l'angle de diffusion.

Dans les conditions discutées, l'intensité de la lumière diffuse I dans le volume V rapportée à l'unité de l'angle solide, s'exprime par la formule (14.5b).

La composition spectrale de la lumière diffuse est définie par la cinétique des fluctuations $\delta\varepsilon_q$ ou d'une façon concrète

$$\left.\begin{aligned} I(\Omega) &= A\,\overline{|\delta\varepsilon_{q,\,\Omega}|^2} \equiv A\,((\delta\varepsilon)_q^2)_\Omega,\\ \delta\varepsilon_{q,\,\Omega} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\varepsilon_q(t)\exp(-i\Omega t)\,dt. \end{aligned}\right\} \qquad (14.34)$$

Le sens de la grandeur $((\delta\varepsilon)_q^2)_\Omega$ est rendu clair par ce qui a été dit au chapitre 13, c.-à-d.

$$\overline{|\delta\varepsilon_q|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} ((\delta\varepsilon)_q^2)_\Omega\, d\Omega$$

où le surlignement traduit la mise en moyenne statistique.

Comme nous l'avons déjà dit, on a avec une assez bonne approximation

$$\delta\varepsilon_q = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \delta\rho_q,$$

où ρ est la densité ; les fluctuations de la densité $\delta\rho$ se décomposent à leur tour en fluctuations de la pression δp et en fluctuations de l'entropie δS :

$$\overline{(\delta\rho)^2} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S^2 \overline{(\delta p)^2} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_p^2 \overline{(\delta S)^2}.$$

Les fluctuations adiabatiques (isentropiques) de la densité proportionnelles à δp varient dans le temps conformément aux équations de l'hydrodynamique, alors que la cinétique des fluctuations isobariques (proportionnelles à δS) est déterminée par l'équation de la conductivité thermique. Nous ne pousserons pas plus loin l'étude des formules correspondantes (cf. [169] et sa bibliographie), mais ferons sous ce rapport quelques remarques.

Si l'on admet que les deux coefficients de viscosité η et ζ ainsi que le coefficient de conductibilité thermique k sont nuls, alors le son se propage dans le liquide sans absorption et les fluctuations de

l'entropie ne se résorbent pas. Dans ces conditions, on observerait dans le spectre de la lumière diffuse un triplet de raies non élargies: au centre il y aurait la raie de fréquence non décalée $\omega = \omega_e$ (ce faisant, $\Omega = \omega_e - \omega_s = 0$) et le doublet de Mandelstam-Brillouin $\Omega = \pm \Omega_0$; de plus, $\Omega_0 = uq = (2\ un\ \omega_e/c)\ \sin 1/2\ \theta$, où u est la vitesse du son de fréquence Ω_0. En langage quantique, l'apparition des satellites $\Omega = \pm \Omega_0$ est décrite comme une diffusion de la lumière qui s'accompagne de l'émission d'une phonon d'énergie $\hbar\Omega_0$ et d'impulsion $\hbar\mathbf{q} = (\hbar\Omega_0/u)\mathbf{q}/q$ (satellite rouge) ou de l'absorption d'un tel phonon (satellite violet). Bien entendu, en appliquant la théorie classique, nous considérons toujours que $\hbar\Omega \ll \varkappa T$.

Si on ne néglige pas la viscosité et la conductibilité thermique le son s'amortit et les fluctuations entropiques se résorbent; il en résulte que toutes les raies du triplet s'élargissent. Dans ces conditions, la cinétique des fluctuations isobariques est définie par l'équation de la conductibilité thermique

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \chi \Delta T = f_T(t, \mathbf{r}), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \chi = \frac{k}{\rho c_p}, \quad (14.35)$$

où f_T sont les « forces » aléatoires conditionnées par l'agitation thermique dans le liquide; les fluctuations de la température T à une pression donnée sont proportionnelles aux fluctuations de l'entropie S et conduisent finalement aux fluctuations de la densité ρ et de la permittivité ε (cf. plus haut).

C'est pourquoi (14.34) et (14.35) entraînent

$$\left.\begin{aligned} &I_{\text{isob}}(\Omega) = A'(\Omega)\overline{(f_{T,q}^2)}_\Omega = \frac{(\gamma/2\pi)\, I_{0,\,\text{isob}}}{\Omega^2 + 1/4\gamma^2}, \\ &\gamma = 2\chi q^2 = 4\left(\frac{\omega_e n}{c}\right)^2 \chi(1-\cos\theta), \quad I_{0,\,\text{isob}} = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\Omega)\, d\Omega, \end{aligned}\right\} \quad (14.36)$$

où, comme dans ce qui suit, on suppose que la dépendance fréquentielle de la quantité $\overline{(f_{Tq}^2)}_\Omega$ est peu importante.

Dans le cas des composantes de Mandelstam-Brillouin associées à la diffusion sur les fluctuations adiabatiques, nous ne tiendrons pas compte de certaines nuances relatives à la dispersion du son (cf. chapitre 8 et de [182]) et, de ce fait, utiliserons l'équation suivante se rapportant à la pression:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - u^2 \Delta p - \Gamma \Delta \frac{\partial p}{\partial t} = f_p(t, \mathbf{r}), \\ &\Gamma = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{4}{3}\eta + \zeta + \frac{k}{c_p}\left(\frac{c_p}{c_V} - 1\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (14.37)$$

D'où

$$\left.\begin{aligned} I_{\text{ad}} &= \frac{(\gamma/\pi)\,\Omega_0^2 I_{0,\,\text{ad}}}{(\Omega^2-\Omega_0^2)^2+\gamma^2\Omega^2},\\ \Omega_0 &= uq\,\frac{2u\omega_e n}{c}\sin 1/2\,\theta,\ \gamma=\Gamma q^2,\\ I_{0,\,\text{ad}} &= 2I_0^{\text{MB}} = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{ad}}(\Omega)\,d\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{14.38}$$

où I^{MB} est l'intensité totale d'un satellite; pour les raies étroites avec $\gamma \ll \Omega_0$) de chacun des satellites:

$$\left.\begin{aligned} I^{\text{MB}}(\Omega) &= \frac{(\gamma/2\pi)\,I_0^{\text{MB}}}{(\Omega-\Omega_0)^2+1/4\gamma^2},\quad I_0^{\text{MB}} = \int_{-\infty}^{+\infty} I^{\text{MB}}(\Omega),\ d\Omega,\\ 1/2\,\gamma &= \frac{q^2}{2\rho}\left\{4/3\eta+\zeta+\frac{k}{c_p}\left(\frac{c_p}{c_V}-1\right)\right\},\\ q^2 &= 2\left(\frac{n\omega_e}{c}\right)^2(1-\cos\theta). \end{aligned}\right\} \tag{14.39}$$

Quant aux intensités $I_{0,\text{isob}}$ et $I_{0,\text{ad}}$, leur somme dans le cas le plus simple est définie par la formule (14.10), et leur rapport vaut $I_{0,\text{ad}}/(I_{0,\text{ad}}+I_{0,\text{isob}}) = c_V/c_p$, c.-à-d. $I_{0,\text{isob}}/I_{0,\text{ad}} = c_p/c_V-1$(cf. [27, 169]).

Les formules obtenues ci-dessus coïncident, aux notations près, avec les expressions bien connues (cf. [27, 169, 175, 176]) ; dans [27], par exemple, γ désigne la grandeur 1/2 γ de (14.36) ou de (14.39). Nous avons déduit pourtant ces formules pour souligner le fait qui d'habitude est laissé dans l'ombre : on utilise les solutions « forcées » et non les solutions des équations du mouvement homogènes (dans notre cas, il s'agit des équations (14.35) et (14.37)). Or, s'il s'agissait de la propagation du son dans un liquide, l'approximation considérée imposerait l'utilisation de l'équation

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-u^2\Delta p-\Gamma\frac{\partial p}{\partial t}=0, \tag{14.40}$$

dont la solution pour une onde plane monochromatique à **q** réel est de la forme

$$\left.\begin{aligned} p &= p_0\exp[i(\mathbf{qr}-\Omega_q t)] =\\ &= p_0\exp(-1/2\gamma t)\exp[(\mathbf{qr}-\Omega_q' t)],\\ \Omega_q &= \Omega_q'-i\gamma/2,\quad \gamma=\Gamma q^2,\quad \Omega_q'=\sqrt{\Omega_0^2-1/4\gamma^2},\ \Omega_0^2=uq^2. \end{aligned}\right\} \tag{14.41}$$

Mais si on admet que la fréquence Ω_q est réelle, ce qui correspond à une autre position possible du problème, alors c'est le vecteur d'on-

de $\mathbf{q}$ qui sera complexe car l'équation (14.40) n'implique qu'une relation générale (équation de dispersion)

$$\Omega_q^2 - u^2q^2 - i\Gamma\Omega_q q^2 = 0 \tag{14.42}$$

Dans le cas de la diffusion de la lumière, les deux quantités Ω et $\mathbf{q}$ de (14.32) sont réelles du fait que $\mathbf{k}_e$ $\mathbf{k}_s$, ω_e et ω_q sont réelles. De telles ondes « sonores » peuvent se propager dans un milieu seulement parce qu'elles présentent des solutions forcées de l'équation (14.37); or, bien entendu, les solutions forcées ne doivent pas satisfaire à l'équation de dispersion. De la sorte, si l'on tient compte de l'absorption du son, en toute rigueur il serait faux de parler de la diffusion de la lumière avec absorption ou émission d'un phonon: ce qui est absorbé ou émis, ce n'est pas une onde acoustique capable de se propager librement dans un milieu donné, mais une certaine perturbation sonore forcée de fréquence Ω et de vecteur d'onde $\mathbf{q}$ définis par (14.32). Ce qui vient d'être dit n'empêche pas pourtant en général d'utiliser la mesure de la largeur des raies de diffusion afin de définir le coefficient d'absorption de l'hyperson. En effet, en déterminant la grandeur γ de (14.36) ou (14.38) nous trouvons par là même les coefficients Γ ou γ pour la propagation du son (cf. (14.41)). Mais si cela est si simple, ce n'est que du fait que nous avons négligé la dispersion du son, c.-à-d. la relation entre les coefficients de viscosité et la conductibilité thermique, d'une part, et la fréquence de l'autre. Dans le cas d'une forte absorption et dans le cas général, cette façon d'opérer n'est pas bonne et il pourrait être difficile de déterminer la vitesse et l'amortissement de l'hyperson (c.-à-d. d'étudier l'équation de dispersion $F(\Omega_q, q) = 0$ pour la propagation du son) par la méthode de la diffusion de la lumière. Une situation analogue apparaît également dans d'autres cas, par exemple dans la diffusion Raman de la lumière sur les cristaux (et en général sur un milieu dense) avec la formation d'excitations de toutes sortes: excitons, polaritons, magnétons, etc. Ces dernières années ce corps de questions fait l'objet de nombreuses recherches. Nous n'envisagerons ici que la largeur des raies de la diffusion de combinaison avec production des polaritons (excitons réels), l'étude correspondante [136] étant étroitement liée à la partie précédente du présent chapitre.

Il est d'usage d'appeler polaritons ou plus rarement excitons réels *) les excitons qui se propagent dans des cristaux et qui sont envisagés compte tenu du retard; cela signifie au fond qu'il s'agit des ondes électromagnétiques « normales » ou des photons dans un milieu (pour plus de détails, cf. [57, 130, 137]). La diffusion de la

*) L'introduction du terme *exciton réel* est due au fait qu'on examine également d'autres excitons, par exemple, les excitons Coulomb et mécaniques (cf. [57, 130, 137]). Soulignons également que la nomenclature dans ce domaine n'est pas encore bien fixée et il faut en tenir compte en étudiant la littérature.

lumière avec production des polaritons (par exemple, d'un seul polariton) en négligeant l'amortissement de ces derniers, est une diffusion Raman qui s'accompagne de l'emission (ou de l'absorption), dans le milieu, d'une onde électromagnétique « normale » qui est un polariton de fréquence Ω et de vecteur d'onde q vérifiant les conditions (14.32). Autrement dit, le processus discuté est parfaitement analogue à la diffusion avec production des satellites de Mandelstam-Brillouin dans les liquides (et les solides), mais avec remplacement des phonons par les polaritons (excitons réels).

Pour simplifier bornons notre étude au milieu optiquement isotrope *) et négligeons la dispersion spatiale. Alors, les propriétés optiques du milieu sont caractérisées par la permittivité $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon'(\omega)$. Admettons (tout comme dans le cas de la diffusion Rayleigh qu'on a considéré préprécédemment) que le milieu soit transparent pour les ondes incidente et diffusée de fréquences ω_e et ω_s respectivement. Cela signifie que $\varepsilon(\omega_e$ et $\varepsilon(\omega_s)$ sont des grandeurs réelles, c.-à-d. on peut poser $\varepsilon''(\omega_e) = \varepsilon''(\omega_s) = 0$. Pour ce qui est de l'onde diffusante de fréquence $\Omega = \omega_e - \omega$ son absorption en général ne saurait être négligée.

Si une onde de fréquence Ω se propage librement dans un milieu donné, sa relation de dispersion est de la forme

$$\frac{c^2q^2}{\Omega} \equiv (n+i\varkappa)^2 = \varepsilon(\Omega) = \varepsilon'(\Omega) + i\varepsilon''(\Omega). \qquad (14.43)$$

Bien entendu, cette relation est une expression usuelle qui associe Ω et q dans les ondes transversales électromagnétiques se propageant dans un milieu isotrope. En vertu de (14.43), les ondes normales (libres) qui se propagent dans un milieu dans une direction z quelconque sont

$$\left.\begin{aligned} E &= E_0 \exp\left\{-\frac{\Omega}{c}\varkappa z - i\left(\Omega t - \frac{\Omega}{c} nz\right)\right\}, \\ n &= \sqrt{1/2\varepsilon' + \sqrt{(1/2\varepsilon')^2 + (2/2\varepsilon'')^2}}, \\ \varkappa &= \sqrt{-(1/2\varepsilon')^2 + \sqrt{(1/2\varepsilon')^2 + (1/2\varepsilon'')^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (14.44)$$

L'absorption (c.-à-d. la condition $\varepsilon''(\Omega) \neq 0$) fait que les ondes normales (polaritons) sont absorbées et que, par exemple, pour la fréquence réelle Ω, le vecteur d'onde q des ondes normales est un vecteur complexe. Mais, lorsque la lumière est diffusée avec produc-

*) Le processus « triphotonique » discuté ici (il s'agit de l'« interaction » de trois ondes ou de trois photons de fréquences ω_e, ω_s et Ω) dans le milieu) n'est possible que dans un milieu sans centre de symétrie, mais à ces milieux appartiennent également les cristaux cubiques non gyrotropes de la classe $T_d \equiv \bar{4}3$ m (ZnS, ZnSe, etc.), qui sont, si l'on néglige les effets de la dispersion spatiale d'ordres supérieurs, optiquement isotropes (cela signifie que $\varepsilon_{ij}(\omega k) = \varepsilon(\omega)\delta_{ij}$.

tion des polaritons, les Ω et $\mathbf{q}$ de ces derniers doivent être réels en vertu de (14.32). La contradiction *) apparente est éliminée si l'on songe que une diffusion est un processus forcé **) et que l'équation de dispersion (14.43) n'a aucun rapport avec les polaritons produits par la diffusion. Autrement dit, ce n'est qu'en négligeant l'absorption qu'on peut parler, au sens propre du terme, de l'effet Raman avec production des polaritons. Et si on tient compte de l'absorption il se forme une onde polaritonique et non pas un polarition libre. Ceci n'empêche certes pas l'utilisation de la diffusion de combinaison de la lumière pour l'étude des polaritons. Sous ce rapport la situation est analogue à celle, discutée dans ce qui précède, du cas de la diffusion Rayleigh dans les liquides. Pour la diffusion avec productions des polaritons on obtient, par exemple, la formule de la largeur de la raie $I(\Omega, q)$ où figurent les mêmes paramètres qui déterminent la propagation des ondes électromagnétiques normales — polaritons. Pour d'autres détails et la formule elle-même de la largeur de la raie de diffusion, nous renvoyons le lecteur à l'article [136]. Notons seulement cette circonstance que, dans cet article on n'introduit pas les « forces » aléatoires $f(t, \mathbf{r})$, dont l'examen est particulièrement commode pour l'approche classique du problème de diffusion. Au lieu de ces « forces », figure explicitement dans l'équation du champ des polaritons donnée par [136] une « force » qui rend compte de l'action sur le milieu des champs électriques des ondes incidente et diffusée. Cette approche équivalente à l'étude de l'énergie d'interaction des ondes incidente et diffusée avec l'onde acoustique ou excitonique qui se forme (ou est absorbée) par diffusion, est naturelle dans les cas où il est nécessaire ou raisonable de réaliser le calcul de l'intensité dans le cadre de la théorie quantique.

On peut penser que les exemples ci-dessus montrent ce qu'il y a de caractéristique dans la question relative à la largeur des raies de diffusion de la lumière par rapport à la largeur des raies d'absorption de la lumière ou du son, définie par les équations homogènes de la propagation des ondes respectives. Ainsi, par exemple, la raie d'absorption polaritonique se forme par absorption dans un cristal de l'onde incidente libre de fréquence Ω (bien entendu, pour qu'apparaisse

*) Le fait que cette circonstance était envisagée comme une difficulté s'ensuit de plusieurs articles cités par [136]. L'un de ces derniers a entrepris, par exemple, la tentative d'associer Ω et q au maximum de la raie de diffusion de combinaison par la relation $c^2q^2/\Omega^2 = n^2$; un autre article discutait de la relation $c^2q^2/\Omega^2 = \varepsilon'(\Omega)$. Dans les deux cas, on s'est efforcé de rendre réelle la grandeur qui figure dans le deuxième membre de la relation de dispersion. Une telle approche ne s'accorde pas avec les observations et, ce qui importe surtout, elle est incorrecte, quant au fond, du fait que Ω et $\mathbf{q}$ associés au polariton produit par diffusion, ne sont pas liés en général entre elles par une relation de dispersion.

**) Ici, on a en vue n'importe quelle diffusion, y compris la diffusion spontanée, et non seulement ce qu'on appelle diffusion forcée qui apparaît lors de la diffusion des ondes à une intensité élevée [169, 178, 183].

la raie il faut faire varier la fréquence Ω). Il s'agit donc de définir l'indice d'absorption $\varkappa$, (Ω) qui figure dans la relation de dispersion (14.43).

Le problème de la largeur des raies de la lumière diffuse (surtout si on a également en vue les diffusions Rayleigh et Raman forcées [183], sans parler de la diffusion des ondes électromagnétiques dans le plasma et sur les particules relativistes ; cf. dans ce qui suit) présente des aspects multiples et importants. Autrefois, des difficultés strictement expérimentales faisaient qu'il restait dans l'ombre ; il n'y avait pas de sources de lumière monochromatique appropriées, ce qui était surtout un obstacle pour la large extension des études dans ce domaine. A présent, les lasers ont supprimé cet obstacle et on assiste à un essor impressionnant des recherches de toute sorte consacrées à la diffusion de la lumière dans les milieux les plus différents. En particulier, l'étude porte de plus en plus souvent sur la composition spectrale (la largeur) des raies de diffusion et, probablement, cette tendance persévère en se renforçant. C'est ce qui confirme qu'il est utile de retenir les remarques faites dans ce qui précède.

Considérons maintenant le cas particulièrement important, du point de vue des applications astrophysiques et ionosphériques, de la diffusion des ondes électromagnétiques dans le plasma.

Commençons par rappeler la marche de la diffusion sur un électron libre isolé (cf., par exemple, § 5 de [1] et § 78 de [6]). Admettons que l'électron soit non relativiste, ($K\ell = 1/2\ mv^2 \ll mc^2 = 5{,}1.10^5$ eV), et que la diffusion soit classique ($\hbar\omega \ll mc^2$). Le cas des électrons relativistes et des fréquences de rayonnement quelconques est traité au chapitre 16. Si un électron se déplace dans le champ électrique de l'onde

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos (\mathbf{kr} - \omega t), \tag{14.45}$$

en utilisant l'équation du mouvement

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} \tag{14.46}$$

et en négligeant la phase **kr** de (14.45) par rapport à ω il acquiert la vitesse

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = -\frac{c\mathbf{E}_0}{m\omega} \sin \omega t + \mathbf{v}_0. \tag{14.47}$$

Pour que non seulement la vitesse sans champ v_0, mais encore la vitesse forcée soient non relativistes, il faut que soit remplie la condition

$$\frac{eR_0}{mc\omega} \ll 1, \tag{14.48}$$

que nous considérons comme satisfaite.

L'equation (14.46) qui néglige la force de Lorentz $\frac{e}{c}$ [vH] est utilisable justement en vertu de l'hypothèse suivant laquelle $v \sim \sim \sqrt{v_0^2 + (eE_0/m\omega)^2} \ll c$. Plus précisément, il en est ainsi si, en plus $H_0 \sim E_0$. Pour une onde plane dans le vide, certes, $H_0 = E_0$, mais dans un milieu à l'indice de réfaction n on a déjà $H_0 = nE_0$ et pour $n \gg 1$, le rôle relatif du champ magnétique augmente. Il peut en être de même dans les guides d'onde où, pour des oscillations définies (modes), ou, en certains points, l'inégalité $H_0 \gg E_0$ est également possible. En tous cas, ici nous négligeons la force de Lorentz. Notons que la condition du caractère classique de notre problème $\hbar\omega \ll \ll mc^2$ assure également la possibilité de négliger la force de réaction *) comme c'est le fait de (14.46). Enfin, pour $v \ll c$ (plus précisément, il faut observer la condition $v \ll c/n$), la phase $kr \sim \sim \omega nvt/c \ll \omega t$, ce qui justifie le remplacement du champ (14.45) par le champ $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$.

En tenant compte de ce qui vient d'être dit on se guide par (14.46) et on se borne à l'approximation dipolaire; de plus

$$\mathbf{r} - = \frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega^2} \cos \omega_0 t, \quad \ddot{\mathbf{p}} = e\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e^2}{m} \mathbf{E}_0 \cos \omega t. \tag{14.49}$$

On en tire, en utilisant la formule (6.28), l'intensité du rayonnement diffus mise en moyenne temporelle, rapportée à l'angle solide $d\Omega$:

$$I = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 E_0^2 \frac{cn}{8\pi} \sin^2 \psi = I_0 r^2 \sin^2 \psi = d\sigma I_0, \tag{14.50}$$

puisque l'intensité du rayonnement incident

$$I_0 = \frac{cn}{4\pi} \overline{E^2} = \frac{cn}{8\pi} E_0^2$$

(comme dans (14.5) l'angle entre $\mathbf{E}_0$ et le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ de l'onde diffusée est noté ψ à la différence de la formule (6.28) où cette quantité était notée θ). Il est évident que la section efficace totale de la diffusion

$$\sigma = \int d\sigma = \frac{\int I \, d\Omega}{I_0} = \frac{8}{3} \pi r_e^2 \tag{14.51}$$

(la section $\sigma_T = \frac{8}{3} \pi r_e^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = 6{,}65 \cdot 10^{-25}$ cm² s'appelle section de Thomson). Pour la lumière non polarisée $d\sigma = 1/2\, r_e^2(1 + \cos^2\theta)$, mais comme auparavant, certes, $\sigma = \sigma_T$ (ici θ est l'angle de diffusion).

*) La condition $\hbar\omega \ll mc^2$ est équivalente à l'inégalité $\omega \ll c/(\hbar/mc) \ll \ll c/r_e$, où $r_e = e^2/mc^2 = 2{,}82 \cdot 10^{-13}$ cm est le rayon classique de l'électron. Dans ces conditions, la force de réaction est très faible (cf. chapitre 2).

Le calcul susmentionné montre que l'indice de réfraction n du milieu où a lieu la diffusion sur un électron libre, s'échappe des expressions de $d\sigma$ constatons que, pour le vide, le plus commode est de partir dès le début de l'expression de $\ddot{\mathbf{p}}$ de (14.49) et utiliser les formules bien connues de l'intensité instantannée $I = ((p)/4\pi c^3) \sin^2\psi$ et $\int I d\Omega = (2/3\ c^3)\ (\ddot{\mathbf{p}}))^2$.

Comme le rendent clair (14.7) et (14.51), le coefficient d'extinction d'un gaz d'électrons diffusant indépendamment, de concentration N est égal à

$$h = \sigma_T N. \tag{14.52}$$

Si on admet que le gaz est parfait et si on calcule les fluctuations $\delta\varepsilon$ pour le gaz d'électrons libres, la formule (14.10) fournit le même résultat en tenant compte, dans ce cas, que

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \quad \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right) = \left(N \frac{\partial \varepsilon}{\partial N}\right) = -\frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \text{ et } \beta_T = \frac{1}{\varkappa T N}.$$

Il est évident qu'ici on néglige complètement l'action des ions et non seulement dans l'expression de ε mais encore dans celle de compressibilité β_T. Autrement dit, on considère que l'apport des ions dans la diffusion est nul qu'il soit direct ou indirect.

Quand peut-on procéder de la sorte? Bien entendu, en premier lieu, c'est l'apport des ions dans ε_{ij} qui doit être petit. Dans un plasma isotrope il est petit pour $\omega \gg kv_{T,\,e,\,i}$ et $\omega \gg \nu_{eff}$ (cf. (11.40)); dans un plasma isothermique raréfié de l'intérêt présente seulement l'inégalité $\omega \gg kv_T$, $v_T = \sqrt{\varkappa T/m}$. Cette condition est toujours remplie pour les ondes transversales, mais elle est encore insuffisante pour considérer que les fluctuations, importantes pour le problème sont indépendantes. En effet, seules sont indépendantes les fluctuations dans les volumes distantes de $r \gg l$, où l est le rayon de corrélation. Dans le gaz non chargé (neutre) le rôle de l est rempli par la longueur du libre parcours, et, dans le plasma raréfié, par la longueur de Debye r_D (cf. (11.14)).

D'autre part, ce n'est que pour des volumes diffusants inférieurs à la longueur d'onde $\lambda = \lambda_0/n$ que les phases des ondes diffusées diffèrent pas plus que de π. Pour les volumes plus gros ou les distances plus grandes entre les volumes diffusants, les ondes diffusées sont tout le temps « déphasées » sous l'effet de l'agitation thermique, c.-à-d. par suite de la dépendance temporelle des fluctuations. C'est pourquoi pour la lumière diffuse non décomposée en spectre (ou au moins pour une bande spectrale suffisamment large) la diffusion sur les volumes distants de $r \gg \lambda$ est incohérente. Il est donc clair

que pour $\lambda \ll l$, ou plus précisément sous la condition (cf. (14.33); θ est l'angle de diffusion):

$$\frac{2\pi}{q} = \frac{\lambda}{2\sin 1/2\theta} \ll l \qquad (14.53)$$

la corrélation des fluctuations à des distances de l'ordre de l ne joue aucun rôle dans ce sens que même sans cela les ondes diffusées sont déjà « déphasées » à des distances bien plus courtes pour lesquelles le gaz se comporte presque comme un gaz parfait *).

Pour le cas du gaz de particules neutres, cette circonstance a éte déjà mentionnée et utilisée dans ce qui précède. Pour ce qui est du plasma, la diffusion sur les seuls électrons en ignorant totalement le rôle des ions serait ainsi admissible seulement sous la condition (cf. (11.14))

$$\frac{\lambda}{2\sin 1/2\theta} = \frac{\pi c}{n\omega \sin 1/2\theta} \ll r_D = \sqrt{\frac{\varkappa T}{8\pi e^2 N}} = 4,9\sqrt{\frac{T\,({}^0k)}{N}}\ \text{cm}. \qquad (14.54)$$

Si on n'envisage pas la diffusion aux angles négligeables, d'ordinaire l'inégalité (14.54) est toujours respectée en optique ($\lambda \sim \sim 10^{-3}$ cm $= 10\ \mu$) (il s'agit des concentrations N dans les régions d'où en général le rayonnement peut sortir dans les conditions astronomiques). Quoi qu'il en soit, en observant l'inégalité (14.54) on peut utiliser la formule (14.52). Dans un autre cas limite **), où

$$\frac{\lambda}{2\sin 1/2\theta} \gg r_D \qquad (14.55)$$

ce sont les volumes de dimensions bien plus grandes que le rayon de corrélation qui diffusent de façon incohérente, et le plasma ne peut déjà plus être considéré comme un gaz électronique parfait. Ici il faut procéder conformément à la théorie générale exposée précédemment : calculer $\delta\varepsilon_{\mathbf{q}}$ ou, pour déterminer le spectre, calculer les grandeurs $\delta\varepsilon_{\mathbf{q},\Omega}$ (cf. (14.5b) et (14.34)). Ces calculs sont donnés par la monographie [154] (cf. également [45, 129, 140]). Toutefois certaines choses peuvent être exposées également à un niveau plus élémentaire.

De même que les fluctuations de densité d'un liquide peuvent être adiabatiques ou isobariques, dans un plasma isotrope, en première approximation, les fluctuations $\delta\varepsilon$ peuvent être de la forme $\delta\varepsilon_n$ lorsque varie seulement la densité de plasma et non sa charge, et

---

*) Cette affirmation est évidente dans le cas du gaz neutre : aux distances inférieures à la longueur du libre parcours l, les particules n'interagissent pas en général. Dans le plasma de gaz concerné, l'interaction entre les particules est aussi très faible en vertu de la condition $e^2N^{1/3} \ll \varkappa T$, qui assure également l'observation de l'inégalité $r_D \ll N^{-1/3}$, où $N^{-1/3}$ est la distance moyenne entre les particules.

**) Dans le cas du gaz de particules neutres, il faut remplacer ici r_D par la longueur du libre parcours $l \sim v_T/\nu_{eff} \sim 1/\pi a^2 N_m$, où $\pi a^2 \gg 10^{-15}$ cm^2 est la section de molécules (atomes), et N_m, leur concentration.

de la forme $\delta\varepsilon_e$ associée à la variation de la charge. Autrement dit, les fluctuations $\delta\varepsilon_n$ sont analogues aux fluctuations conditionnées par des ondes acoustiques, où les électrons et les ions sont « liés » les uns aux autres, et de ce fait la charge n'apparaît pas. Quant aux fluctuations $\delta\varepsilon_e$ elles peuvent être décomposées en ondes de plasma de haute fréquence; dans ces ondes les ions sont fixes alors que les électrons oscillent à des fréquences voisines de $\omega_{pe} \equiv \omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$. Aux termes d'ordre m/M près, les fluctuations de deux types sont statistiquement indépendantes, et donc

$$\overline{(\delta\varepsilon)^2} = \overline{(\delta\varepsilon_n)^2} + \overline{(\delta\varepsilon_e)^2}. \tag{14.56}$$

Dans le domaine considéré (14.55), mais sous la condition que la longueur du libre parcours soit grande devant λ, on peut penser que les fluctuations neutres $\delta\varepsilon_n$ sont voisines des fluctuations dans le gaz neutre correspondant de concentration $2N$ de toutes les particules. Ce qui importe ici c'est justement la concentration totale du fait qu'elle détermine la pression qui, à l'état d'équilibre thermique, ne dépend pas de la masse des particules ($p = 2N\varkappa T$). Ainsi, dans ce cas, la compressibilité $\beta_T = 1/2\varkappa TN$, mais comme auparavant $\left(\rho \frac{\partial\varepsilon}{\rho\partial}\right) = -4\pi e^2/m\omega^2$. Avec ce qui a été dit précédemment ceci rend évident que l'intensité des ondes diffusées sur les fluctuations $\delta\varepsilon_n$ ne diffère de celle des ondes diffusées sur les électrons libres que par le facteur 1/2, c.-à-d.

$$h_n = 1/2\ \sigma_T N. \tag{14.57}$$

Une théorie plus rigoureuse, [154], confirme cette conclusion [81]. Fait assez curieux et très important les ondes longitudinales de longueur $\lambda \gg r_D$ sont diffusées sur les fluctuations $\delta\varepsilon_n$ exactement de même manière que les ondes transversales. En effet, dans la diffusion des ondes par un volume petit devant la longueur λ, l'orientation du vecteur $\mathbf{E}_0$ par rapport à $\mathbf{k}$ n'a pas d'importance il s'ensuit que dans l'onde longitudinale dont le champ est $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$, l'intensité des ondes transversales diffusées (il s'agit donc de la transformation des ondes longitudinales en ondes transversales sous l'effet de la diffusion [81]) est définie par la formule (14.50) en ajoutant le facteur 1/2 N (on a en vue la diffusion par unité de volume):

$$\left.\begin{aligned} I_\perp &= \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{cn(\omega)}{8\pi} N E_0^2 \sin^2\psi, \\ \int I_\perp\, d\Omega &= \frac{1}{6}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 cn(\omega)\, E_0^2 \end{aligned}\right\} \tag{14.58}$$

Le coefficient d'extinction n'est pas introduit puisque nous ne traitons pas ici la question du flux d'énergie dans une onde longitudinale (dans le cas considéré, ceci n'a pas d'importance puisque géné-

ralement on est intéressé à l'intensité $I_{\perp}$ définie) précisément en fonction de E_0^2.

Dans le cas des ondes courtes (fréquences élevées) lorsque la condition (14.54) est remplie, le spectre de la lumière diffuse est dopplérien (cf. (14.25), mais en remplaçant M par m). Dans ces conditions, la largeur caractéristique du spectre est $\Delta\omega \sim \sim \sqrt{\varkappa T/mc^2}\omega_e$. Dans le cas de la diffusion des ondes longues (condition (14.55)), pour la diffusion sur les fluctuations $\delta\varepsilon_n$, qui est un analogue de la diffusion Rayleigh dans un liquide ou un gaz, $\Delta\omega \sim \sqrt{\varkappa T/Mc^2}\omega_e$. En effet, les fluctuations $\delta\varepsilon_n$ se résorbent avec des vitesses de l'ordre de la vitesse des ions $v_{Ti} \sim \sqrt{\varkappa T/M}$, et comme toujours, $\Delta\omega \sim (v/c)$ où v est la vitesse caractéristique du mouvement.

Comme nous l'avons dit, les fluctuations $\delta\varepsilon_e$ sont liées aux ondes de plasma et leur fréquence caractéristique est ω_p. La diffusion sur ces fluctuations est analogue à la diffusion Raman et conduit à l'apparition des satellites de fréquences qui diffèrent de $\Omega \sim \omega_p$ de la fréquence de la lumière diffuse. Dans le langage quantique, il s'agit ici de la production ou de l'absorption par l'onde incidente d'un plasmon d'énergie $\hbar\omega \sim \hbar\omega_{pe}$. La largeur des satellites est déterminée par l'évanouissement des ondes de plasma correspondantes, ondes de fréquence $\Omega = \omega_e - \omega_s$ (nous avons écrit dans (14.25) $\Omega = \omega_e - \omega$, c.-à-d. l'indice s y est omis). L'intensité des satellites dépend de la grandeur des fluctuations de la charge. Pour $\lambda \gg r_D$, l'amortissement des ondes de plasma est faible (et c'est pourquoi les satellites sont étroits), mais la moyenne quadratique des fluctuations de la charge proportionnelle à $\overline{(\delta\varepsilon_e)^2}$ diminue brusquement : par rapport à l'expression correspondante pour $\lambda \ll r_D$, elle contient le facteur complémentaire $(r_D/\lambda)^2$. On comprend bien le sens physique de ce résultat : aux distances supérieures à r_D, les électrons sont « liés » aux ions et à mesure que λ croît il devient toujours « plus difficile » à l'agitation thermique de séparer les électrons des ions et produire des fluctuations de la charge, ou en d'autres termes, des ondes de plasma d'amplitude importante *). Ainsi, pour les ondes longues, $\lambda \gg r_D$, l'intensité de la diffusion Raman avec production ou absorption des ondes de plasma (plasmons) est faible et le rôle

*) Indiquons ici un résultat dont la déduction avec force détail est donnée aux §§ 4 et 5 de la monographie [154] : pour un plasma isothermique électrono-ionique la moyenne quadratique des fluctuations de la charge est égale à

$$|\rho_k|^2 = \frac{2e^2Nk^2}{k_2 + 8\pi e^2N/\varkappa T} = \frac{2e^2Nk^2r_D^2}{k^2r_D^2+1}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Il est évident que $\overline{|\rho_k|^2} = 2eN$ pour $\lambda \ll r_D$ et $\overline{|\rho_k|^2} = \dfrac{8\pi^2e^2Nr_D^2}{\lambda}$ pour $\lambda \gg r_D$.

principal est joué par la diffusion Rayleigh sur les fluctuations de densité ; de plus, le coefficient d'extinction des ondes transversales est déterminé par la formule (14.57). Cette situation est bien réelle dans le cas de la diffusion des ondes radio dans l'ionosphère (il s'agit de la méthode de la diffusion incohérente lors de l'exploration par radar de l'ionosphère [184]).

Dans l'ensemble, le problème des ondes électromagnétiques dans le plasma ne s'épuise pas par les remarques ci-dessus. Une attention particulière méritent également l'estimation de l'influence du champ magnétique, le cas du plasma non isothermique, la transformation des ondes transversales en ondes longitudinales, des ondes longitudinales en ondes transversales, etc. Mais nous ne nous étendrons plus sur ce sujet (cf. [45, 129, 140, 154] et leurs bibliographies).

Pour conclure le chapitre examinons encore un type particulier de diffusion qu'on peut appeler diffusion de transition [185]. Dans plusieurs cas de propagation des perturbations et de différentes ondes on observe également l'apparition des ondes qu'on peut qualifier d'ondes de permittivité. Dans le plus simple des cas, ceci veut dire que la permittivité varie suivant la loi

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t - \varphi_0). \tag{14.59}$$

Ainsi, dans un plasma isotrope, quand $\varepsilon = 1 - 4\pi e^2 N/m\omega^2$ et se propage une onde longitudinale (de plasma), dont le champ $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t)$, change avec la fréquence $\omega_0 = \omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 N_0/m}$, on a en première approximation :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{ek_0E_0}{m\omega^2} \sin(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t). \tag{14.60}$$

En effet, en vertu de l'équation $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi e(N - N_0)$ et de la condition de longitudinalité $\mathbf{k}_0\mathbf{E}_0 = k_0E_0$, on aboutit tout de suite à (14.60). Ici il est évident que l'onde de plasma modifie la concentration électronique initiale N_0, ce qui conduit à un changement de la concentration

$$\delta N = N - N_0 = -\frac{k_0E_0}{4\pi e} \sin(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t)$$

et par là même au $\delta\varepsilon = -4\pi e^2 \delta N/m\omega$.

L'exemple (14.60) traduit l'un des effets non linéaires connus dans le plasma [64, 140] ; l'onde de permittivité est également liée à l'onde du champ électrique. Mais ceci n'est pas de rigueur. Par exemple, dans une onde sonore longitudinale dans le liquide ou le gaz neutre, le champ électrique est pratiquement (et même strictement) nul, mais la variation de la densité fait que la permittivité ε varie et peut être de la forme (14.59).

Et qu'est-ce qui se passera si une onde de permittivité frappe une certaine charge e ? Si cette charge se déplace à la vitesse constante $\mathbf{v}$,

il s'agit là de l'une des formes du rayonnement de transition (cf. chapitre 7). En effet, dans notre cas, la charge se déplace dans un milieu inhomogène de permittivité (14.59) et par conséquent, elle doit rayonner. On peut dire donc qu'on observe une transformation de l'onde de permittivité en ondes électromagnétiques, cette transformation se traduisant par le rayonnement de transition. Nous préférons pour autant le terme de *diffusion de transition* puisque celle-ci apparaît aussi dans le cas d'une charge fixe. Plus précisément, voici la situation qui se présente dans ces conditions. Pour une charge en mouvement (avec $v \neq 0$) le rayonnement a lieu tant avec $\omega_0 = 0$, $\mathbf{k}_0 \neq 0$, qu'avec $\mathbf{k}_0 = 0$, $\omega_0 \neq 0$ (cf. chapitre 7). Pour ce qui est d'une charge fixe (avec $v = 0$), l'émission des ondes transversales, ou autrement dit, la transformation (la diffusion) des ondes de permittivité en ondes transversales n'a lieu qu'avec $\omega_0 \neq 0$, $\mathbf{k}_0 \neq 0$. Le mécanisme de cette diffusion de transition (le terme de *transition* est défini par l'affinité du phénomène au rayonnement de transition) consiste dans le fait que l'onde de permittivité module la permittivité du milieu ε, au voisinage de la charge en provoquant par là l'apparition d'une polarisation variable et, par conséquent, l'émission des ondes électromagnétiques. Dans ces conditions, la charge diffusante peut rester tout à fait fixe, pour la raison que, dans ce cas-là aussi, elle est plongée dans un champ, évidemment dans un champ longitudinal (coulombien) E qui provoque la polarisation supplémentaire $\delta \mathrm{P} = \frac{\delta\varepsilon}{4\pi} \mathrm{E}$.

Sans nous attarder sur les calculs (cf. [185]) donnons le résultat pour un cas particulier de l'intensité (puissance) intégrale moyenne dans le temps de la diffusion de transition. Supposons que l'onde de permittivité (14.59) frappe une charge fixe e; de plus, les ondes transversales rayonnées (diffusées) sont sensiblement plus courtes que les ondes de permittivité. Ceci signifie que la grandeur du vecteur d'onde des ondes transversales, $h = 2\pi/\lambda = (\omega_0/c) \sqrt{\varepsilon}\,(\omega_0)$, est petite devant h_0; il en sera précisément ainsi si la vitesse des ondes de permittivité, $v_\varepsilon = \omega_0 y/k_0 \ll v_{\mathrm{ph}} = \omega_0/k = c/\sqrt{\varepsilon_0}$, c.-à-d. elle est beaucoup inférieure à la vitesse de phase des ondes électromagnétiques transversales (naturellement, la fréquence de ces ondes est égale à la fréquence de l'onde de permittivité ω_0).

Dans ces conditions

$$\frac{dW}{dt} = \int I\, d\Omega = \frac{e^2 \omega_0^4 \varepsilon_1^2 \sqrt{\varepsilon_0(\omega_0)}}{3ck_0^2 \varepsilon_0^2(0)}. \qquad (14.61)$$

La quantité $\varepsilon_0(0) \equiv \varepsilon_0(\omega = 0)$ apparaît ici du fait que la charge diffusante est fixe et la polarisation statistique du milieu qu'elle crée dépend justement de la valeur de $\varepsilon_0(0)$. A titre de comparaison rappelons que la charge libre e de masse M qui se trouve plongée dans un milieu d'indice de réfraction $n = \sqrt{\varepsilon_0}\,(\omega_0)$ diffuse l'onde

électromagnétique de fréquence et d'amplitude E_0 de façon que l'intensité correspondante vaut (cf., par exemple, (14.58))

$$\frac{dW}{dt} = \int I \, d\Omega = \frac{e^4 \sqrt{\varepsilon_0(\omega_0)}}{3M^2c^3} E_0^2. \qquad (14.62)$$

Bien entendu, avec $M \to \infty$, la diffusion (14.62) disparaît, alors que la diffusion de transition ne dépend pas de la masse de la particule.

La diffusion de transition est très importante dans le cas de la diffusion des ondes longitudinales (de plasma) sur les électrons et les ions dans un plasma [140]. Dans ce cas, pourtant, il faut également tenir compte de la diffusion ordinaire, puisque la masse des électrons et des ions est finie, et l'onde longitudinale possède un champ. Par ailleurs, il faut prendre en considération la dispersion spatiale et le mouvement des charges. Il s'avère finalement que, par exemple, l'intensité totale de la diffusion de l'onde de plasma sur un électron fixe (en l'absence d'ondes) dans un plasma vaut 1/4 de l'intensité de la diffusion de Thomson dans le vide, c.-à-d. $\sigma = 1/4\ \sigma_T$. Quant à la diffusion des ondes de plasma sur les ions, dans ce cas, le phénomène principal est la diffusion de transition.

CHAPITRE 15

ASTROPHYSIQUE DES RAYONS COSMIQUES

Notes d'introduction. Modèles d'origine des rayons cosmiques. Caractéristique générale de la problématique. Pertes d'énergie par ionisation. Instabilité des faisceaux et effets de plasma dans les rayons cosmiques. Equations de transfert en approximation de diffusion. Simplification des équations de transfert dans le cas des composantes protono-nucléaire et électronique. Certaines estimations

Pendant les dernières 25 ou 30 années l'astronomie, et surtout l'astrophysique, ont subi des changements importants. Bien entendu, en général, d'après les « normes » actuelles, ce délai n'est pas si bref pour caractériser le développement d'une science. L'histoire de l'astronomie compte pourtant de nombreux millénaires et c'est pourquoi les changements profonds survenus ces deux ou trois dernières décennies sont particulièrement impressionnants. Ce qu'il y a d'essentiel, c'est que dans cette période l'astronomie est devenue ou plutôt devient progressivement une astronomie de toutes les ondes, alors qu'auparavant (pratiquement jusqu'en 1945) l'information astronomique nous parvenait presque exclusivement par la gamme optique, et le plus souvent par la plage encore plus étroite des ondes électromagnétiques visibles. Or, de nos jours, la radioastronomie (surtout dans la gamme des ondes centimétriques, décimétriques et métriques) a, quant à son niveau général, rattrapé et dans certains domaines, devancé l'astronomie optique. Apparue seulement en 1962, l'astronomie des rayons X (nous avons en vue le rayonnement extrasolaire; le rayonnement X solaire a été détecté en 1948) est en plein essor. L'astronomie des rayons infrarouges et des rayons gamma a fait son apparition. Par là même, le spectre tout entier des ondes électromagnétiques fait l'objet d'une étude suivie, l'une de ses parties étant déjà assimilée, alors que l'exploration des autres ne fait que débuter. Pour caractériser l'étape actuelle, il faut signaler l'apparition de l'astronomie des rayons cosmiques pour laquelle l'information est fournie par les rayons cosmiques — particules chargées, de haute énergie — ainsi que de l'astronomie des neutrinos et celle des ondes gravitationnelles.

Il ne s'agit pas ici de donner une caractéristique détaillée des processus relatifs au développement de l'astronomie, ni de s'attarder à exposer les nombreuses réalisations dans ce domaine (voir, par exemple, [186, à 190], ainsi que [31, 39, 45, 52, 129]). Nous voulons seulement expliquer la raison de l'intérêt que porte l'astrophysique aux

mécanismes des rayonnements X et gamma, à l'analyse de la propagation et de la transformation de la composition chimique des rayons cosmiques errants à travers l'espace interstellaire, à la physique des neutrinos et à bien d'autres questions. Naturellement, tous ces sujets importants pour l'astronomie et l'exploration cosmique doivent trouver leur part dans l'enseignement de la physique théorique, et non seulement aux futurs astronomes, mais aussi aux spécialistes de bien d'autres disciplines. Dans le présent ouvrage, les chapitres 5 et 9 et plusieurs passages des autres chapitres étaient « pointés » vers l'astronomie. Le présent chapitre ainsi que les deux suivants traitent, eux aussi, de plusieurs processus dont le siège est l'espace (et non seulement l'espace), mais nous bornons notre exposé aux problèmes qui concernent seulement ce qu'on appelle l'astrophysique des hautes énergies. Le terme lui-même n'est pas encore bien établi, mais on le rencontre assez souvent et il comprend l'astrophysique des rayons cosmiques *), l'astronomie des rayons X, l'astronomie des rayons gamma et l'astronomie des neutrinos (dans ce cas, il s'agit de la réception des neutrinos cosmiques d'énergie relativement élevée, supérieure, disons, à 0,1-1 MeV). Toutefois, nous n'étudierons pas l'astronomie des neutrinos (cf. [52, 90]), en limitant notre exposé à quelques questions relatives à l'astrophysique des rayons cosmiques (voir le présent chapitre), à l'astronomie des rayons X (chapitre 16) et à l'astronomie des rayons gamma (chapitre 17). Il faut pourtant retenir que ces questions sont liées entre elles et dans la plupart des cas il n'est pas facile, et d'ailleurs pas nécessaire, de dresser dans ce domaine des frontières tout à fait nettes.

On appelle rayons cosmiques seulement les particules chargées (protons, noyaux, électrons et positrons) dont l'énergie est assez élevée. La terminologie n'est pas encore fixée mais il est d'usage de qualifier de rayons cosmiques les particules dont l'énergie cinétique $E_c > 100$ MeV, alors que les particules plus molles mais assez rapides s'appellent rayons subcosmiques.

La grandeur principale caractéristique des rayons cosmiques est leur intensité J (parfois cette grandeur s'appelle flux dans la direction donnée) **). Par définition, J est le nombre de particules rapporté à l'unité d'angle solide qui traversent, par unité de temps, une aire

*) Par tradition historique, il est plus fréquent de donner à l'astrophysique des rayons cosmiques le nom de problème de l'origine des rayons cosmiques.

**) On appelle aussi intensité (surtout dans le cas du rayonnement électromagnétique) le flux d'énergie par unité d'angle solide. Cette intensité « énergétique » vaut $I = E_c J$, où E_c est l'énergie cinétique des particules ou l'énergie des photons $h\nu = \hbar\omega$ (il s'agit ici des particules ou des photons monoénergétiques). Notons qu'en adoptant les notations universellement admises nous désignons ici, et plus loin, l'énergie de la particule par la lettre E et non pas par $\mathscr{E}$, comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents.

unité perpendiculaire à la direction de l'observation. L'intensité J a pour mesure:

$$\frac{\text{nombre de particules}}{\text{cm}^2\cdot\text{s}\cdot\text{sr}}=10^4\,\frac{\text{nombre de particules}}{\text{m}^2\cdot\text{s}\cdot\text{sr}}\,.$$

Le flux des particules d'espèce i d'intensité J_i est égal à $F_{i\Omega} = \int J_i \cos\theta d\Omega$, où θ est l'angle entre la normale à l'aire et la direction de la vitesse de la particule, alors que $d\Omega$ est l'élément d'angle solide. Pour un rayonnement isotrope, le flux des particules F_i issus de la demi-sphère de directions est égal à

$$F_i=2\pi\int_0^{1/2\pi} J_i\cos\theta\sin\theta\,d\theta=\pi J_i. \tag{15.1}$$

La concentration des particules N_i de vitesse v_i dans le cas d'un rayonnement isotrope est

$$N_i=\frac{4\pi}{v_i}J_i. \tag{15.2}$$

Dans les cas courants, il s'agit non pas de particules monoénergétiques, mais d'une distribution des particules suivant les énergies (c.-à.-d., comme on dit, du spectre énergétique). La grandeur principale est ici l'intensité spectrale (différentielle) $J_i\,(E)$, de sorte que $J_i\,(E)dE$ est l'intensité des particules d'énergie totale E se trouvant dans l'intervalle E, $E+dE$. L'intensité des particules d'énergie supérieure à E (intensité intégrale) vaut

$$J_i\,(>E)=\int_E^{\infty} J_i\,(E)\,dE. \tag{15.3}$$

Dans le cas de la distribution isotrope des particules de masse M_i, on a

$$N_i\,(>E)=4\pi\int\frac{J_i(E)}{v}\,dE,\quad E=\frac{M_ic^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \tag{15.4}$$

La densité d'énergie cinétique des rayons cosmiques isotropes est égale à

$$w_i=\int E_cN_i\,(E)\,dE=\int\frac{4\pi}{v}E_cJ_i\,(E)d\,E. \tag{15.5}$$

On peut également introduire une intensité énergétique

$$I_i=\int E_cJ_i\,(E)\,dE, \tag{15.6}$$

mais on l'utilise rarement.

Pour les particules ultrarelativistes, on a

$$I_i = \frac{c}{4\pi} \int E_c N_i (E)\, dE = \frac{c w_i}{4\pi}. \qquad (15.7)$$

L'utilisation de l'énergie totale $E = Mc^2 + E_c$ n'est commode, certes, que dans le domaine relativiste, mais c'est à ce domaine précisément qu'appartiennent ordinairement les rayons cosmiques étudiés au voisinage de la Terre. Pour les rayons cosmiques et subcosmiques mous, on utilise plus souvent l'énergie cinétique E_c. Ensuite, pour les noyaux il est commode d'utiliser non seulement l'énergie totale E ou l'énergie cinétique E_c, mais aussi l'énergie totale par nucléon $\epsilon = E/A$ ou l'énergie cinétique par nucléon $\epsilon_c = E_c/A$, où A est le poids atomique et plus précisément, le nombre massique du noyau. Enfin, les expressions (15.2) et (15.4) sont écrites sous l'hypothèse d'une isotropie de la distribution des particules suivant les directions pour cette raison que si l'on élimine l'influence du champ magnétique terrestre, l'isotropie des rayons cosmiques au voisinage de la Terre est très élevée.

L'anisotropie des rayons cosmiques se détermine de la façon suivante

$$\delta = \frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max} + J_{min}}, \qquad (15.8)$$

où J_{max} et J_{min} sont les intensités maximale et minimale respectivement des rayons cosmiques en fonction de la direction (on suppose que la relation $J(\theta)$ ne possède qu'un maximum, par exemple, dans la direction $\theta = 0$; autrementd dit, on adopte une relation de la forme $J(\theta) = J_0 + J_1 \cos\theta$, de façon que $\delta = J_1/J_0$). Le degré d'anisotropie des rayons cosmiques n'est même pas encore établi de façon certaine ; pour tous les rayons cosmiques d'énergie supérieure à 100 GeV*) on a $\delta \leqslant 10^{-4}$. Ainsi, l'anisotropie peut être mise en évidence que par une étude spéciale, alors que, dans tous les autres cas, nous sommes légitimés d'admettre que les rayons cosmiques sont parfaitement isotropes (rappelons encore une fois que l'action du champ magnétique terrestre est censé être exclue). C'est pourquoi l'étude des rayons cosmiques primaires, c.-à-d. des rayons cosmiques extraatmosphériques ou compte tenu de l'influence de l'atmosphère, consiste en fait à calculer les fonctions $J_i(E)$ pour toutes les composantes des rayons cosmiques que ce soient les protons et noyaux (composante proto-nucléaire) ou les électrons et positrons. D'ailleurs, le taux des positrons dans la composante électrono-positronique pour $E > 1$ GeV est très faible et leur séparation des électrons n'est pas encore bien sûre. D'autant plus que, dans la grande majorité des cas,

*) Cela signifie que $J_0 = J_0$ ($E > 100$ GeV) et $J_1 = J_1$ ($E > 100$ GeV) ; pour de plus grands E et surtout pour $E > 10^{16}$—10^{17} eV l'anisotropie peut tre plus forte que celle qui a été indiquée.

cette séparation ne se fait pas, et on mesure l'intensité $J_e(E)$ de la composante électrono-positronique toute entière dite simplement composante électronique. Dans le cas de la composante protono-nucléaire, on ne parvient pas non plus, et de loin, à séparer dans tous les cas les noyaux suivant les charges, sans parler des isotopes; ainsi, on envisage souvent l'intensité totale des rayons cosmiques $J_{r.c}(E)$ ou, pratiquement, l'intensité totale de leur composante protono-nucléaire, étant donné que la part des électrons (c.-à-d. le rapport $J_e(E)/J_{r.c}(E)$), est de l'ordre d'un pour cent; de plus, la séparation des électrons est relativement facile.

Nous n'avons pas l'intention de fournir des renseignements quelque peu détaillés sur les rayons cosmiques (cf. [39, 52, 186, 189, 191, 192, 193a]) les limitant aux quelques remarques tout en indiquant certaines valeurs caractéristiques des quantités telles que J et w. Ainsi, au voisinage de la Terre (en dehors des influences du champ magnétique terrestre) on peut adopter pour tous les rayons cosmiques comme valeurs aprochées *)

$$\left.\begin{aligned} J_{r.c} \equiv J &\sim 0{,}2-0{,}3\,\frac{\text{particules}}{\text{cm}^2\cdot\text{s}\cdot\text{sr}}, \\ N_{r.c} &\sim \frac{4\pi J}{c} \sim 10^{-10}\,\frac{\text{particules}}{\text{cm}^3}, \\ w_{r.c} &\sim 10^{-12}\,\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \sim 1\,\frac{\text{eV}}{\text{cm}^3} \\ I &\sim \frac{c w_{r.c}}{4\pi} \sim 10^{-3}\,\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2\cdot\text{s}\cdot\text{sr}}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.9)$$

Une certaine idée de la composition chimique des rayons cosmiques relativistes ($\epsilon = E/A > 2{,}5$ GeV/nucléon) est donnée par le tableau 15.1 où les noyaux sont répartis en groupes traditionnels (par exemple, le L-groupe se compose de noyaux de Li, Be, B). Il faut avoir en vue que l'erreur dans les valeurs consignées n'est pas inférieure à dix pour cent, les données se précisant avec l'accumulation d'informations et le perfectionnement de la méthodologie expérimentale. Dans plusieurs cas, cette dernière renseigne non seulement sur les groupes de noyaux, mais aussi sur des noyaux isolés. D'autre part, on a décelé récemment des noyaux relativement très rares de $Z \geqslant 83$

*) Il faut retenir qu'au voisinage de la Terre, le spectre énergétique des rayons cosmiques possède un maximum qui correspond aux protons d'énergie $E_c \sim 250$ MeV. C'est pourquoi les valeurs données de $\int_{E_c=100\ \text{NeV}}^{\infty} J(E)\,dE$ et des intégrales analogues convergent. Leur grandeur varie pourtant en fonction du cycle de l'activité solaire par suite du changement de l'apport des particules plus lentes; dans une certaine mesure, elle est donc sensible à la borne d'intégration inférieure.

(c.-à-d. plus lourds que le plomb) dont le nombre dans les rayons cosmiques est de 8 ordres inférieur à celui de tous les noyaux du groupe H.

Le trait le plus frappant de la composition chimique des rayons cosmiques révélé par le tableau 15.1 est la présence d'un assez gros flux de L-noyaux, bien que dans la nature leur nombre en moyenne soit négligeable. Cette particularité, confirmée aussi séparément pour les noyaux de Li, Be et B, ainsi que pour d'autres noyaux rares (par exemple, pour ceux de ^3He), témoigne d'un rôle important de la transformation de la composition chimique des rayons cosmiques lors de leur propagation à travers l'espace interstellaire et peut-être au sein des sources (c.-à-d. dans la région de production, ou autrement dit, de l'accélération des rayons cosmiques).

Tableau 15.1

Groupe de noyaux	Numéro atomique	Intensité 1)	Abondance par rapport aux noyaux du groupe H	
			dans les rayons cosmiques	en moyenne dans l'Univers
p	1	1300	650	3000-7000
α	2	94	47	250-1000
L	3-5	2,0	1	10^{-5}
M	6-9	6,7	3,3	2,5-10
H	$\geqslant 10$	2,0	1	1
HV	$\geqslant 20$	0,5	0,26	0,05
VVH	$\geqslant 30$	$\sim 10^{-4}$	$\sim 10^{-1}$	$\sim 10^{-4}$

1) La troisième colonne consigne les données pour J ($> \epsilon = 2,5$ GeV/nucléon) en unités : particules/m²·sr·s.

Il est d'usage de représenter la relation entre l'intensité des rayons cosmiques et leur énergie (spectre énergétique) sous la forme

$$J_A(>\epsilon) = \int_{\epsilon} J_A(\epsilon)\, d\epsilon = K_A \epsilon^{-(\gamma-1)}, \quad J_A(\epsilon) = (\gamma-1) K_A \epsilon^{-\gamma}, \quad (15.10)$$

où, comme nous l'avons dit, $\epsilon = E/A$ est l'énergie par nucléon et l'indice A indique qu'il s'agit des noyaux ou d'un groupe de noyaux de poids atomique moyen A ; d'autre part, on introduit des grandeurs analogues J $(>E)$ et J (E) pour tous les rayons cosmiques.

En fait le spectre n'est pas un spectre puissance, c.-à-d. l'exposant γ dépend de l'énergie. Pourtant, et ceci est assez important, dans une très large marge d'énergies il s'avère que (15.10) donne une bonne approximation du spectre. Ainsi, dans la gamme d'énergies 2 ×

$\times 10^9 < E < 3 \cdot 10^{15}$ eV, d'après plusieurs données, $\gamma = 2{,}7 \pm \pm 0.2$. Probablement, la meilleure valeur est aujourd'hui $\gamma = 2{,}7$ ou 2,6. Pour fixer les idées, indiquons, par exemple, le spectre suivant les rayons cosmiques dans la gamme $10^{10} < E < 10^{15}$ eV:

$$J(>E) = (5{,}3 \pm 1{,}1)\, 10^{-10} \left(\frac{E\,(\mathrm{eV})}{6 \cdot 10^{14}}\right)^{-(\gamma-1)} \approx$$

$$\approx \left(\frac{E\,(\mathrm{eV})}{10^9}\right)^{-1{,}6} \frac{\text{particules}}{\mathrm{cm^2 \cdot s \cdot sr}}, \quad \gamma = 2{,}62 \pm 0{,}05. \qquad (15.11)$$

Dans la gamme de basses énergies, $E_c < 10 - 10^{10}$ eV, l'exposant γ change et le spectre dépend fortement du niveau de l'activité solaire. Nous n'examinerons pas ce domaine. Notons seulement que la question, très importante pour la théorie des rayons cosmiques, sur la forme du spectre dans la gamme de basses énergies, et notamment sur l'existence d'un maximum dans le spectre énergétique des régions éloignées du Soleil (au-delà du Système solaire) n'est pas encore élucidée. Probablement le spectre des rayons cosmiques galactiques ne possède pas encore de maximum jusqu'aux énergies $\epsilon_c \sim \sim 100$ MeV/nucléon. (Pour une énergie $E \sim 10^{15}$ eV, il y a une brisure plus ou moins marquée ou, au moins, un changement du spectre; pour $E > 10^{15}$ eV l'expression (15.11) cesse d'être valable et le spectre donné par la relation

$$J(>E) = (2{,}0 \pm 0{,}8)\, 10^{-10} \left(\frac{E\,(\mathrm{eV})}{10^{15}}\right)^{-(\gamma-1)} \frac{\text{particules}}{\mathrm{cm^2 \cdot s \cdot sr}}, \qquad (15.12)$$

$$\gamma = 3{,}2 \pm 0{,}2;$$

est plus proche de la réalité; d'après d'autres données le facteur $(2{,}0 \pm 0{,}8)$ devrait être remplacé par $(3{,}74 \pm 0{,}20)$, alors que $\gamma = = 3{,}16 \pm 0{,}1$. Pour $E \sim 10^{15}$ eV, à la précision realisée près, les spectres (15.11) et (15.12) s'accordent entre eux. Il se peut que, pour $E \gtrsim 10^{18}$ eV, le spectre s'aplatisse encore légèrement, mais cette hypothèse n'est pas encore confirmée. Le spectre intégral des rayons cosmiques, pour $E > 10^{10}$ eV, est représenté sur la figure 15.1 (rappelons que γ est l'exposant du spectre différentiel; cf. (15.10)).

L'énergie maximale des rayons cosmiques observés est de l'ordre de 10^{20} eV. Dans ce domaine, leur spectre devrait en général décroître brusquement par suite des pertes importantes que subissent les rayons cosmiques, aussi énergétiques, dans leur interaction avec le rayonnement présent dans les especes interstellaire et intergalactique. Mais, pour le moment, cette « décroissance » n'est pas décelée et la question du spectre, et par suite, de l'origine des rayons cosmiques de très hautes énergies est en suspens.

Les valeurs mentionnées de γ concernent tous les rayons cosmiques mais, jusqu'à ces derniers temps, on considérait que la composition chimique du rayonnement cosmique, au moins pour les énergies allant jusqu'à 100 ou 1 000 GeV, ne dépendait pas de l'énergie. Par

là même on admettait que dans ce domaine l'exposant $\gamma \approx 2{,}7$ concerne également tous les groupes de noyaux. En 1972, on a vu des indications révélant une faible dépendance de la composition chimique de l'énergie, déjà dans la gamme des énergies inférieures à 100 GeV/nucléon : il s'agissait notamment de la diminution, avec l'augmentation de l'énergie, de l'abondance des noyaux secondaires du type Li, Be, B, produits par fragmentation des noyaux plus lourds. Il se peut également que pour les noyaux du groupe H (ce sont surtout les noyaux de fer) l'exposant γ est légèrement inférieur à celui du groupe M (noyaux de C, N, O, F). Les données correspondantes sont discutées dans les articles [193]. Dans le domaine des énergies encore plus hautes, $E > 10^{12}$ eV (ou plus précisément, $\epsilon > 10^{11}$ eV/nucléon), les variations de la composition chimique peuvent s'avérer plus importantes, mais, pour le moment, les données sous ce rapport ne sont pas sûres.

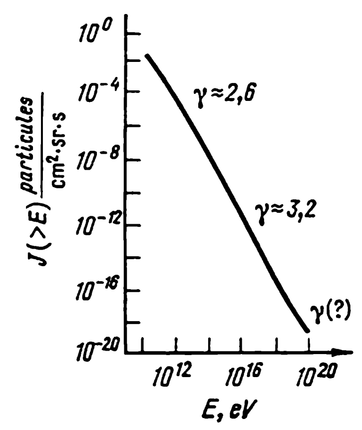


Fig. 15.1. Spectre intégral des rayons cosmiques au voisinage de la Terre

γ — exposant du spectre différentiel; pour le spectre puissance intégral $J(>E) = \text{const}\cdot E^{-(\gamma-1)}$

La composante électronique des rayons cosmiques est étudiée moins que la composante protono-nucléaire. Le spectre des énergies inférieures à 1 GeV est particulièrement sensible aux processus dont le Soleil et le Système solaire sont le siège, le spectre lui-même est ici assez compliqué. Pour $E \equiv E_e > 1$ GeV, l'approximation de puissance convient déjà mieux, et par exemple dans le domaine $5 < E < 50$ GeV, le spectre est un spectre puissance d'exposant $\gamma = 2{,}7 \pm 0{,}1$ (d'après d'autres données, il est vrai, $\gamma = 3{,}0 \pm 0{,}2$). Pour les énergies plus basses, l'exposant γ diminue et, dans la marge des énergies $E_e > 50$ à 100 VeG, pour le moment, les données sont contradictoires, bien qu'il soit possible que $\gamma \approx 3$ jusqu'aux énergies $E_e \sim 500$ à 1000 GeV (pour des énergies encore plus fortes, on ne dispose pratiquement pas de données sur les électrons). Pour fixer les idées, donnons un spectre différentiel des électrons

$$J_e(E) = 1{,}27\cdot 10^{-2} E^{-(2{,}7\pm 0{,}1)}\ \frac{\text{électrons}}{\text{cm}^2\cdot\text{s}\cdot\text{sr}\cdot\text{GeV}},\qquad (15.13)$$
$$5 < E < 300\ \text{GeV}$$

où l'énergie des électrons E se mesure en GeV ; d'où

$$J_e(>E) \approx 10^{-2}\left(\frac{E\ \text{eV}}{10^9}\right)^{-1{,}7} 5\cdot 10^9 < E < 2\cdot 10^{11}\ \text{eV}\qquad (15.14)$$

(la formule (15.14) est mise sous la forme qui facilite sa comparaison avec le spectre (15.11)) ; ce qui vient d'être dit rend clair qu'il ne faut pas attribuer une valeur réelle à la différence entre les exposants γ de (15.11) et de (15.14)).

Soulignons encore une fois que toutes les grandeurs données sont approchées et, dans la littérature, on trouve des valeurs 2 à 3 fois différentes de ces dernières, ce qui d'ailleurs ne joue aucun rôle pour notre exposé. Mais il en est tout autrement de la question de principe qui est une extrapolation de l'ensemble des données aux confins du Système solaire et à une région importante de la Galaxie.

Le rayon de courbure de la trajectoire d'une particule d'énergie $E \gg Mc^2$ qui se déplace dans un champ magnétique homogène H, vaut (cf. (4.24) : nous admettons que le mouvement de la particule est perpendiculaire au champ)

$$r = \frac{E\,(\text{eV})}{300H}\ \text{cm}. \qquad (15.15)$$

En général, dans le Système solaire, $H < 3\cdot 10^{-5}$ OE et, d'autre part, le champ est inhomogène. C'est pourquoi les rayons cosmiques d'énergie $E_e > 10^{12}$ eV, et pratiquement aussi de $E > 10^{10}$ eV ne peuvent pas rester prisonniers dans le Système solaire. Mais si l'on songe qu'au voisinage de la Terre, la forme du spectre du rayonnement cosmique change peu jusqu'aux énergies $E \sim 10^{15}$ eV, on a toutes les raisons d'admettre que ce spectre (pour $E > 10^{10}$-10^{11} eV) est caractéristique au moins de la région de la Galaxie adhérente au Système solaire. Or, au voisinage du Soleil, les conditions sont probablement très typiques de vastes étendues de la Galaxie. Sous ce rapport, les données radioastronomiques relatives au rayonnement radio non thermique à spectre continu, assurément de nature synchrotronique, présentent un grand intérêt. De cette façon, nous obtenons une information directe sur la composante électronique des rayons cosmiques dans la Galaxie, ainsi que loin au-delà de ses frontières (galaxies normales et radiogalaxies, quasars). On peut dire que ce sont précisément les données radio qui sont à l'origine de l'astrophysique puisqu'ils ne laissent l'ombre d'un doute que les rayons cosmiques existent pratiquement partout dans l'espace et jouent parfois un rôle énergétique et dynamique important ; il en est ainsi en premier lieu des régions raréfiées des galaxies (halo des galaxies normales régions émettrices des ondes radio, nuages et jets des radiogalaxies). Dans notre Galaxie, les observations radioastronomiques témoignent de l'existence du radiodisque, d'une région radio centrale et, peut être, d'un radiohalo (fig. 15.2). D'autre part, « la carte des ondes radio » de la Galaxie révèle des enveloppes des suppernovae et des « inhomogénéités » de toute sorte, telles ou telles variations d'intensité (en particulier, liées à la structure spiralée). Par là même il devient parfaitement clair qu'au moins la composante électronique

remplit des régions énormes de la Galaxie, et sous ce rapport la région circumsolaire n'a en effet rien de particulier.

Dès l'apparition de l'astrophysique des rayons cosmiques et dans une certaine mesure jusqu'à présent, son talon d'Achylle était une certaine indétermination (ou, si l'on veut, une ambiguïté) provenant de l'utilisation des renseignements sur la composante électronique

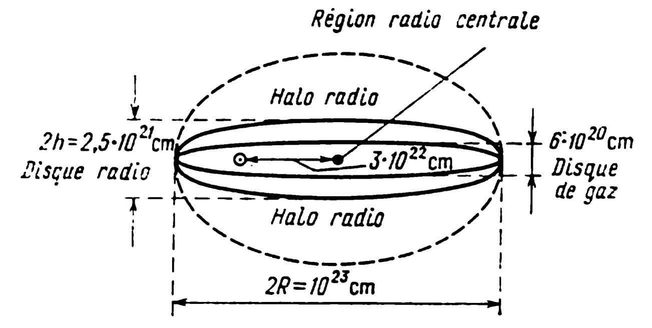


Fig. 15.2. Schématisation de la structure radio de la Galaxie

pour juger de la composante protono-nucléaire. Le passage correspondant est réalisé, comme nous l'avons vu au chapitre 5, par l'hypothèse définie de la valeur des coefficients $\varkappa_H$ et $\varkappa_e$:

$$\varkappa_H = \frac{w_H}{w_{\text{r. c}}}, \quad \varkappa_e = \frac{w_{\text{r. c}}}{V_e}, \tag{15.16}$$

où $w_H = H^2/8\pi$ est la densité de l'énergie du champ magnétique; $w_{\text{r.c}}$, la densité de l'énergie de tous les rayons cosmiques, et w_e, la densité de l'énergie de la composante électronique (au chapitre 5, au lieu des densités de l'énergie on envisageait les énergies totales, mais s'il s'agit de valeurs moyennes, ce sont en général des choses équivalentes).

Au voisinage de la Terre, on a pour les rayons cosmiques

$$\varkappa_e \sim 100, \quad \varkappa_H \sim 1. \tag{15.17}$$

où on utilise les valeurs mesurées de $w_{\text{r.c}} \sim 10^{-12}$ erg/cm³ et $w_e \sim$ $\sim 10^{-14}$ erg/cm³, et où l'on tient compte également du fait qu'en moyenne dans la Galaxie $H \sim 2$ à $5 \cdot 10^{-6}$ Oe.

En vertu des arguments déjà exposés, des considérations sur l'équipartition de l'énergie dans les conditions quasi stationnaires (d'où $\varkappa_H \sim 1$), etc., il semble tout à fait raisonnable d'étendre les estimations (15.17) à la Galaxie tout entière (ou leur moyenne à l'espace galactique). On procède de la sorte avec les sources extragalactiques pour aboutir à la conclusion susmentionnée sur le grand rôle des rayons cosmiques dans l'Univers. Au chapitre 5, nous avons souligné qu'une conception des méthodes rendant possible la mesu-

re des quantités $\varkappa_e$ et $\varkappa_H$ n'en était pas moins importante ; on en reparlera aux chapitres 16 et 17. Il se peut que dans le cas de la Galaxie, les estimations (15.17) cessent d'être correctes seulement pour les régions centrales ; pour les principales sources discrètes galactiques (du type des enveloppes des supernovae), elles cessent d'être correctes seulement à certains stades d'évolution.

En appliquant à l'intégrité de la Galaxie les valeurs de (15.17) il est facile d'évaluer l'énergie totale des rayons cosmiques du disque radio (pour $w_{\text{r.c}} \sim 10^{-12}$ erg/cm et $H \sim 5\cdot 10^{-6}$ Oe), ainsi que, conventionnellement *), de toute la Galaxie compte tenu du halo radio

$$\begin{aligned} w_{\text{r. c. disque}} &\sim w_{\text{r. c. disque}} V_{\text{disque}} \sim 10^{55} \text{ ergs}, \\ W_{\text{r. c. halo}} &\sim w_{\text{r. c. halo}} V_{\text{halo}} \sim 10^{56} \text{ ergs}, \end{aligned} \tag{15.18}$$

où $V_{\text{disque}} \sim R^2 \cdot 2h \sim 10^{67}$ cm³ est le volume du disque radio (cf. fig. 15.2) et $V_{\text{halo}} \sim 4\pi R^3/3 \sim 5\cdot 10^{58}$ cm³, le volume du halo quasi sphérique ; il se peut que le halo réel soit aplati ; de plus, à mesure qu'on s'éloigne du plan galactique, la densité de l'énergie des rayons cosmiques, probablement, diminue ; c'est pourquoi précisément on adopte l'estimation $W_{\text{r.c.halo}} \sim 10^{54}$ ergs. Cette quantité est impressionnante ; on peut par exemple constater qu'elle correspond à l'énergie au repos de cent étoiles ayant chacune environ une masse solaire ($M_\odot = 2\cdot 10^{33}$ g, $M_\odot c^2 \sim \sim 10^{54}$ ergs). Ce qui importe encore plus, certes, c'est que l'énergie $W_{\text{r.c}}$ est comparable ou est plus grande que l'énergie du gaz interstellaire et l'énergie du champ magnétique interstellaire. Notons également que dans des radiogalaxies puissantes l'énergie $W_{\text{r.c.}}$ atteint des valeurs de 10^{60} et même de 10^{61} ergs, c.-à-d. est de l'ordre de $10^7\ M_\odot c^2$.

Quelle est l'origine des rayons cosmiques en général et au voisinage de la Terre en particulier ? Le fait même de la production (accélération) efficace des particules d'énergies relativistes et ultra-relativistes dans l'espace, traduit assurément une nature plasmique des régions correspondantes, des nuages de plasma instables, ainsi que l'existence des explosions cosmiques (explosions des noyaux galactiques, des supernovae, des novae, solaires, etc.). Ainsi, ce sont précisément les rayonnements cosmique et subcosmique et le rayonnement

---

*) Depuis plus de vingt ans l'existence d'un halo radio de la Galaxie fait l'objet des discussions sans apporter jusqu'à présent des clartés sur la question. D'après nous (cf. [193a] et sa bibliographie), il doit exister une sorte de *halo de rayons cosmiques*, c.-à-d. une région entre le disque radio et l'espace intergalactique où la densité de l'énergie des rayons cosmiques est encore importante (disons, $w_{\text{r.c}} \sim 10^{-13}$—$10^{-14}$ erg/cm³). Il se peut, pourtant, que la chute de l'intensité du champ magnétique et de la concentration de la composante électronique fassent que le rayonnement radio de cette région (halo radio) soit très faible. L'estimation (15.18) du $W_{\text{r.c.halo}}$ suppose évidemment l'existence d'un halo de rayons cosmiques.

qu'ils engendrent (en particulier, les rayonnements X et gamma) qui, tout en étant des éléments infaillibles des processus cosmiques, sont les indicateurs qui contrôlent ces processus actifs et particulièrement impétueux. C'est là l'un des traits particuliers des plus importants de l'astrophysique des rayons cosmiques et, en général, de l'astrophysique des hautes énergies, qui détermine son rôle dans l'astronomie tout entière.

Lorsqu'on examine l'origine des rayons cosmiques au voisinage de la Terre (dans ce qui suit, nous dirons tout court qu'il s'agit de l'origine des rayons cosmiques), on a généralement en vue non pas le mécanisme d'accélération, mais la construction d'un certain modèle qui indiquerait les sources des rayons cosmiques, la région qu'ils remplissent, etc. Depuis de nombreuses années, dans ce domaine rivalisent surtout des modèles de deux types : les modèles galactiques et métagalactiques. Les modèles métagalactiques admettent que la partie dominante des rayons cosmiques (composante protono-nucléaire) vienne dans la Galaxie de l'extérieur, de l'espace intergalactique (métagalactique). C'est pourquoi, comme on peut le voir *), la densité de l'énergie des rayons cosmiques dans la Métagalaxie w_{Mg} (au moins dans la région adhérente à la Galaxie) doit être de l'ordre de $w_{\mathrm{r.c.G}} \sim 10^{-12}$ erg/cm³. Cela signifie à propos que dans la Métagalaxie $\varkappa_e \gg 10^2$, puisque la composante électronique des rayons cosmiques observés au voisinage de la Terre est à l'avance d'origine galactique ; en effet, en vertu de grandes pertes par effet Compton (cf. plus loin) les électrons relativistes ne peuvent pas errer longtemps dans la Métagalaxie et venir dans la Galaxie à partir des radiogalaxies et des quasars. Malheureusement, nous ne disposons pas encore d'évaluation quelque peu sûre de la densité w_{Mg}, mais d'après toute une série de considérations, on peut admettre que

$$w_{\mathrm{Mg}} \ll w_{\mathrm{r.\,c.\,G}} \sim 10^{-12}\ \mathrm{erg/cm^3} \qquad (15.19)$$

et, le plus probable, $w_{\mathrm{Mg}} \lesssim 10^{-15}$—$10^{-16}$ erg/cm³ (cf. [191]). Si on arrive à confirmer sûrement l'inégalité (15.19), ce qui en principe est possible (cf. chapitre 17), alors les modèles métagalactiques seraient résolument réfutés. Pour le moment, ils sont d'après nous (vue qui n'est pas partagée par tous) très peu probables à la différence des modèles galactiques. Ces derniers supposent (toujours d'après de nombreuses vues que l'auteur partage, mais qui ne sont pas universellement admises) que les sources principales des rayons cosmiques

*) Dans la Métagalaxie comme dans la Galaxie, l'isotropie des rayons cosmiques doit être très élevée du fait qu'une forte anisotropie est supprimée par l'instabilité du plasma (cf. [129, 140, 191, 194] et ce qui suit). Aussi, l'étude du mouvement des particules dans un champ magnétique montre-t-elle que dans des conditions quasi stationnaires, dans la Métagalaxie et la Galaxie l'intensité et, donc, la densité de l'énergie doivent être à peu près égales (pour plus de détails cf. [191]).

sont les supernovae, y compris les pulsars *), ainsi que peut-être les explosions dans le noyau de la Galaxie. Le volume caractéristique du modèle galactique à disque occupé par les rayons cosmiques est celui du disque radio ou de la région adjacente ($V_{\text{disque}} \sim 10^{67}$ cm^3). Dans ce cas, la durée de vie caractéristique des rayons cosmiques de la Galaxie $T_{\text{r.c.disque}} \sim 10^7$ années. Dans le modèle galactique à halo, le volume occupé est celui du halo des rayons cosmiques ($V_{\text{halo}} \sim 10^{68}$ cm^3). et la durée de vie caractéristique $T_{\text{r.c.halo}} \sim$ $\sim 10^8$ années (la durée de vie est évaluée plus loin). Avec les valeurs de $W_{\text{r.c}}$ de (15.18), ceci rend clair que pour conserver un régime quasi stationnaire, les sources du rayonnement cosmique des deux modèles de la Galaxie doivent émettre (accélérer) des rayons cosmiques avec la puissance de l'ordre de

$$U_{\text{r. c}} \sim \frac{W_{\text{r. c. halo}}}{T_{\text{r. c. halo}}} \sim \frac{W_{\text{r. c. disque}}}{T_{\text{r. c. disque}}} \sim 10^{40} - 10^{41} \text{ erg/s}. \quad (15.20)$$

Les supernovae, aussi bien que les explosions du noyau galactique sont capables d'assurer une injection des rayons cosmiques de cette puissance.

Le choix entre les modèles galactiques n'est pas encore fixé; il dépend, par exemple, de la mesure de la durée de vie caractéristique des rayons cosmiques $T_{\text{r.c}}$ et sous ce rapport il existe certaines possibilités [193 a]. En tirant au clair la question de l'existence du halo radio, on servira au même but. L'étude du rôle de telles ou telles sources des rayons cosmiques est également possible par différentes méthodes. Notons à titre d'exemple que le noyau galactique ne peut servir de source à la composante électronique du rayonnement cosmique dans le domaine des hautes énergies $E \gtrsim 1-10$ GeV. Il en est ainsi du fait qu'en se déplaçant du centre galactique vers le Système solaire, les électrons de haute énergie perdront leur plus grande partie par effets synchrotron et Compton (cf. chapitre 4).

Bornons-nous à ces remarques sur l'origine des rayons cosmiques puisque notre tâche consiste à expliquer certains processus et mécanismes physiques qui présentent de l'intérêt pour l'astrophysique de hautes énergies. Les processus et mécanismes à étudier et discuter sont les suivants.

Accélération des composantes protono-nucléaire et électronique dans les diverses conditions cosmiques et dans les régions différentes (explosion d'une étoile, plasma turbulent dans les enveloppes des

---

*) Au sein de la plupart ou même de toutes les supernovae se trouve probablement une étoile à neutrons magnétique appelée pulsar [16]. Les particules peuvent être accélérées par l'explosion elle-même de la supernova, dans son enveloppe et au voisinage du pulsar. Ainsi, l'accélération des particules par les pulsars est l'un des trois modes possibles et son importance relative n'est pas encore suffisamment élucidée.

supernovae, accélération dans l'espace interstellaire, accélération au voisinage des pulsars, accélération dans les éruptions solaires, etc.).

Pertes d'énergie par les particules rapides de différents types. Transformations des noyaux par suite des collisions.

Diffusion et isotropisation des rayons cosmiques, en particulier compte tenu des phénomènes de plasma.

Production par les rayons cosmiques de photons de différentes énergies et leur application dans la radio-astronomie, l'astronomie optique, celle des rayons X et des rayons gamma. On y rapporte aussi l'absorption et la diffusion de photons de toutes les gammes.

D'autre part, il s'agit évidemment de dresser une théorie quantitative de l'origine des rayons cosmiques dans la Galaxie, capable de rendre compte des pertes, de la diffusion, de la transformation de la composition chimique, etc. A cet effet, il faut se donner, certes, un modèle plus concret (concrétiser. la région occupée par les rayons cosmiques, la répartition des sources, les paramètres du milieu interstellaire, etc.). L'état du problème est tel qu'une *méthode des essais et erreurs* est inévitable : il faut calculer les divers modèles et en les confrontant avec les données d'observation choisir le meilleur (cf. [39, 191-193a, 195, 196]).

Il est bien évident que le corps des problèmes correspondants est énorme. Nous en avons déjà parlé dans le cas du rayonnement synchrotron (cf. chapitres 5 et 9). Dans ce qui précède, nous avons traité également certains autres processus présentant un intérêt pour l'astrophysique, mais nombre de questions et problèmes susmentionnés n'ont pas encore été mis en lumière. Malheureusement, dans le cadre de cet ouvrage, il est tout à fait impossible de le faire d'une façon quelque peu détaillée. C'est pourquoi dans ce qui suit (dans le présent chapitre et les chapitres 16 et 17) nous nous bornerons à discuter des pertes énergétiques, à décrire le schéma général de la diffusion des rayons cosmiques compte tenu de la transformation de leur composition chimique et des pertes (de la part de la composante électronique) ; ensuite nous examinerons les mécanismes de production des rayons X et gamma et nous ferons quelques remarques sur des questions connexes. Nous passerons outre les mécanismes d'accélération de particules dans les conditions cosmiques (cf. [39, 129, 140, 197, 198]).

Le passage des particules chargées à travers une matière donne lieu à plusieurs processus associés généralement par le terme de *pertes d'énergie par ionisation*. Si on admet que le mouvement de la particule est donné (s'il est, par exemple uniforme et rectiligne) et si on n'envisage pas de variations de la masse et de la charge de la particule sous l'effet des transformations nucléaires et de la capture ou bien du « dépouillage » des électrons de sa couronne électronique (il s'agit ici d'un mouvement de noyaux atomiques), alors les

pertes par ionisation sont dues à l'ionisation des atomes du milieu, à leur excitation et au rayonnement Tchérenkov.

Il est vrai qu'il n'est pas toujours possible de classer nettement ces trois types d'action de la particule en mouvement d'autant plus si le milieu est dense. De plus, dans le cas du plasma, il faut envisager le transfert d'énergie aux électrons et ions du plasma et non l'ionisation et l'excitation qui ont lieu dans un gaz constitué d'atomes et de molécules neutres. Lorsque les particules sont suffisamment lentes, la recharge joue son rôle. Un flux de particules peut donner lieu aux effets collectifs: instabilité du faisceau, etc. Aux problèmes des pertes par ionisation adhèrent les questions de la production, dans le milieu, des électrons δ (électrons de recul) et le problème de la diffusion multiple produite par une particule traversant une couche donnée de matière. Parfois il faut tenir compte des fluctuations des pertes par ionisation et de la dispersion des longueurs du parcours.

Déjà cette liste sommaire montre clairement toute la multiplicité de l'aspect du problème des pertes par ionisation auquel on pourrait consacrer un cours spécial. Naturellement, cet ensemble de questions a donné lieu à une littérature très abondante, mais nous bornerons nos références en indiquant l'ouvrage classique de Bohr [199] et l'un des derniers ouvrages [200] que nous connaissons (cf. également, [1, 27, 39, 189, 201]). Dans ce qui suit, nous ne donnerons que quelques formules qu'il faut utiliser dans le calcul des pertes par ionisation dans le gaz, et ferons à ce propos quelques remarques.

A la base du calcul des pertes par ionisation des particules rapides, il y a la formule à laquelle on donne parfois le nom de Bethe-Bloch:

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_i = -\frac{1}{v}\left(\frac{dE}{dt}\right)_i = \frac{2\pi e^4 Z^2 N}{mv^2}\left\{\ln\frac{2mv^2 W_{max}}{\mathcal{J}^2(1-\beta^2)} - 2\beta^2 + f\right\}, \quad (15.21)$$

où N est la concentration des électrons dans la matière; m, la masse des électrons; $\beta = v/c$; v, la vitesse de la particule rapide considérée, de charge eZ; $\mathcal{J}$, l'énergie d'ionisation moyenne des atomes du milieu; W_{max}, l'énergie maximale transférée par la particule aux électrons seuls et f, la compensation pour l'*effet de densité*. Le point de départ pour obtenir la formule (15.21) est, au fond, la formule classique de Rutherford qui détermine la section efficace de diffusion de la particule de charge eZ, de masse M et de vitesse initiale v sur une particule au repos, de charge e et de masse m (l'énergie d'interaction est e^2Z/r). Le choc communique à la particule au repos (à l'électron) l'énergie W, alors que la particule incidente perd cette même quantité d'énergie (collision élastique). La section efficace exprimée par W s'écrit

$$d\sigma = 2\pi\frac{e^4Z^2}{mv^2}\frac{dW}{W^2}$$

(le calcul étant fait au § 19 de [202], aucun besoin n'est donc de le reproduire). Pour l'énergie perdue par la particule incidente, on a

$$dE = \int_{W_{\min}}^{W_{\max}} W\,d\sigma = \frac{2\pi e^4 Z^2}{mv^2} \ln \frac{W_{\max}}{W_{\min}}.$$

En multipliant cette expression par la concentration électronique N, on en tire la formule de la forme (15.21) ; le problème réel est alors de mettre au point le facteur logarithmique, compte tenu du relativisme (il est évident que dans ce qui précède on a utilisé une formule non relativiste), de la liaison atomique des électrons, etc.

Le sens qualitatif du terme logarithmique de (15.21) devient clair si l'on songe qu'au fond il est de la forme const·ln $(p_{\max}/p_{\min})$, où p est le paramètre d'impact. Dans les collisions proches ($p \sim p_{\min}$) il se forme des électrons δ dont l'énergie atteint $W_{\max}$. Quant à l'apport des collisions lointaines ($p \sim p_{\max}$), il croît comme $\ln (1/(1-\beta^2)) = \ln (E/Mc^2)^2$ par suite d'une compression du champ de la particule avec $v \to c$ (pour cette raison, à mesure que l'énergie croît, les composantes de Fourier du champ d'une fréquence donnée $\omega \sim \mathcal{I}/\hbar$ correspondent grosso modo aux distances toujours plus grandes). Pourtant, avec l'augmentation de $p_{\max}$, entre la particule et l'électron auquel l'énergie est transmise, apparaissent les particules du milieu en un nombre toujours plus grand. Ces dernières font écran par rapport au champ de la particule, et à conditions égales, cet effet est d'autant plus marqué que le milieu est plus dense. Le terme f de (15.21) rend justement compte de l'influence de cet effet (*effet de densité*). Dans le cas ultrarelativiste (pour plus de précision, cf. plus loin) le terme f a un caractère universel

$$f = \ln (1-\beta^2) + \ln \frac{\mathcal{I}^2}{\hbar^2\omega_p^2} + 1, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}.$$

Il en résulte que la formule (15.21) devient

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_i = \frac{2\pi e^4 Z^2 N}{mc^2} \left\{ \ln \frac{m^2c^2 W_{\max}}{2\pi e^2 N \hbar^2} - 1 \right\}. \tag{15.22}$$

L'indépendance de l'expression donnée de f par rapport aux propriétés du milieu (abstraction faite de la concentration des électrons N) est due au fait que, dans le cas discuté des énergies suffisamment élevées, ce qui importe, ce sont les propriétés du milieu aux hautes fréquences, lorsque, pour tout milieu,

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}.$$

D'après (15.21), les pertes par ionisation des électrons ultra-relativistes ($E \gg mc^2$) dans l'hydrogène atomique sont

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_i = \frac{2\pi e^4 N}{mc}\left\{\ln\frac{E^3}{mc^2 \mathcal{J}^2} - 2\right\} =$$
$$= 1{,}22\cdot 10^{-20} N\left\{3\ln\frac{E}{mc^2} + 18{,}8\right\} \text{erg/s} =$$
$$= 7{,}62\cdot 10^{-9} N\left\{3\ln\frac{E}{mc^2} + 18{,}8\right\} \text{eN/s} =$$
$$= 2{,}54\cdot 10^{-10} N\left\{3\ln\frac{E}{mc^2} + 18{,}8\right\} \text{eV/cm} =$$
$$= 1{,}53\cdot 10^{5}\left\{3\ln\frac{E}{mc^2} + 18{,}8\right\} \text{eV}\cdot\text{cm}^2/\text{g} \qquad (15.23)$$

(les pertes par ionisation sont données ici en unités différentes pour rendre commode leur manipulation en divers cas).

N de (15.23) est la concentration des atomes d'hydrogène ; l'énergie efficace d'ionisation $\mathcal{J}$ est posée égale à 15 eV ; cette formule rend compte de l'apport de tous les électrons de recul d'énergie qui atteint $W_{max} = 1/2E$, car les électrons étant indiscernables, telle est précisément l'énergie W_{max} transmise dans les collisions électron-électron *). Notons que (15.21)-(15.23) rendent compte de tous les processus : ionisation (en particulier, la production des électrons δ rapides), excitation et rayonnement Tchérenkov. Même pour l'hydrogène, la part de ce dernier n'est pas grande (de l'ordre de 15 %). Autant qu'on a pu l'établir, la valeur de l'énergie de (15.23) obtenue par calcul n'est pas encore exacte ; c'est pourquoi sous le signe du logarithme de (15.23) il y a un facteur indéterminé d'ordre unité (l'imprécision de la formule (15.23) due à cette circonstance ne dépasse pas quelques pour cent). Par ailleurs, (15.23) néglige l'effet de densité, c.-à-d. le terme f de (15.21) y est omis. Ceci est admissible tant que $v/c < 1\sqrt{\varepsilon(0)}$, où v est la vitesse de la particule, et $\varepsilon(0)$, la permittivité du milieu à la fréquence $\omega = 0$. Dans l'hydrogène atomique

$$\varepsilon(0) = 1 + 4\pi\alpha N, \quad \alpha = \frac{9}{2}\left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)^3 \sim 10^{24},$$

et pour

$$\frac{E}{mc^2} < (4\pi\alpha N)^{-1/2} \sim \frac{3\cdot 10^{11}}{\sqrt{N}}$$

*) Admettons qu'un électron d'énergie supérieure à $1/2\,E$ n'est pas un électron δ mais un électron diffusé. Notons également que, dans le cas des électrons, la formule (15.21) n'est pas tout à fait exacte. Dans les conditions (15.23) le terme -2 entre parenthèses doit être remplacé par $1/8 - \ln 2 = -0{,}57$. Pratiquement, cette mise au point est peu importante, notamment du fait de la définition approchée de l'énergie $\mathcal{J}$ (cf. plus loin).

on peut négliger l'effet de densité. Même avec $N \sim 10^2$ cela signifie que la formule (15.23) est vraie pour les électrons d'énergie $E < < 10^{16}$ eV.

Pour les atomes légers, autres que ceux d'hydrogène, les pertes par ionisation sont aussi, en première approximation, définies par la formule (15.23) où par N il faut entendre la concentration de tous les électrons atomiques. Il est clair que dans le milieu interstellaire (disons, pour un taux de 10 % d'hélium) les pertes par ionisation ne sont que de 10 % supérieures à celles observées dans l'hydrogène pur (pour la même concentration totale des atomes). Dans un plasma totalement ionisé (N est la concentration des électrons), les pertes par ionisation des électrons ultra-relativistes sont égales à

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_i = \frac{2\pi e^4 N}{mc}\left\{\ln\frac{m^2c^2E}{4\pi e^2\hbar^2 N} - 3/4\right\} =$$
$$= 7{,}62\cdot 10^{-9} N\left\{\ln\frac{E}{mc^2} - \ln N + 73{,}4\right\} \text{ eV/s.} \quad (15.24)$$

Cette formule se déduit de (15.22) pour $W_{max} = 1/2\ E$; de plus, conformément aux calculs de [203] la valeur numérique du facteur logarithmique a été mise au point (au lieu de —1 dans (15.22), on a —3/4 dans (15.24); bien entendu, cette rectification n'a rien de spécialement important). Dans les cas courants, les formules (15.23) et (15.24) donnent des résultats qui généralement ne diffèrent pas entre eux quant à l'ordre de grandeur. Par exemple, pour $N = 0{,}1$ et $E = 5\cdot 10^8$ eV, les pertes (15.24) sont deux fois plus grandes que les pertes (15.23). Les pertes (15.24) sont dues à la production des électrons δ (c.-à-d. au transfert d'énergie aux électrons du plasma) et au rayonnement Tchérenkov des ondes de plasma *). La nécessité d'appliquer au plasma la formule (15.22) qui tient compte de l'effet de densité est rendue évidente par ce qui a été dit précédemment: pour un plasma raréfié, $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ pour toutes les fréquences et l'utilisation de cette expression pour ε conduit justement à (15.22).

La formule (15.23) concerne le cas des électrons ultra-relativistes. Mais si la condition $E \gg mc^2$ n'est pas remplie, et en particulier ne l'est pas pour les électrons non relativistes (mais animés d'une vitesse $v \gg v_a$, où v_a est la vitesse des électrons atomiques; dans le cas de l'hydrogène, cela signifie que l'énergie cinétique de l'électron

*) Nous admettons que le plasma est isotrope, c.-à-d. que le champ magnétique est absent; on sait que dans ces conditions l'émission des ondes Tchérenkov transversales de plasma est impossible. Soulignons également que par ondes de plasma on entend des ondes longitudinales qui peuvent se propager non seulement dans le plasma, mais aussi dans un milieu quelconque sous la condition $\varepsilon(\omega) = 0$. Sous ce rapport, le plasma se distingue seulement par un faible évanouissement des ondes de plasma suffisamment longues. Dans un milieu dense, une partie importante de pertes par ionisation peut être associée précisément à la production des ondes de plasma.

$E_c = E - mc^2 \gg 15$ eV), alors, dans les calculs avec une erreur d'au moins quelques pour cent, on peut utiliser la formule (15.21) en remplaçant W_{max} par 12 E_c.

Pour les particules à énergie totale E et masse $M \gg m = 9,1 \times \times 10^{-28}$ g, c.-à-d. pour les mésons, protons et noyaux, la formule (15.21) conduit aux résultats suivants.

Soit

$$E \ll \left(\frac{M}{m}\right) Mc^2. \tag{15.25}$$

Alors l'énergie maximale transmise à un électron est

$$W_{max} = 2mv^2 \left(\frac{E}{Mc^2}\right)^2 \tag{15.26}$$

Si la condition (15.25) est remplie, pour les pertes dans l'hydrogène atomique ($\mathcal{J}$ — 15 eV), la formule (15.21) donne

$$\left.\begin{aligned} -\left(\frac{dE}{dt}\right)_i &= \\ &= 7,62\cdot 10^{-9} Z^2 N \sqrt{\frac{2Mc^2}{E_c}} \left\{\ln \frac{E_c}{Mc^2} + 11,8\right\} \text{eV/s}, \\ E_c &= E - Mc^2 \approx 1/2 Mv^2 \ll Mc^2, \end{aligned}\right\} \tag{15.27}$$

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_i = 7,62\cdot 10^{-9} Z^2 N \left\{4 \ln \frac{E}{Mc^2} + 20,2\right\} \text{eV/s},$$

$$E \gg Mc^2. \tag{15.28}$$

Pour les protons, la condition (15.25) est de la forme $E \ll 2\cdot 10^{12}$ eV; ainsi la formule (15.28) est pratiquement valable pour $2\cdot 10^9$ eV $<$ $<$ E $< 10^{12}$ eV

Si

$$E \gg \left(\frac{M}{m}\right) Mc^2, \tag{15.29}$$

on a

$$W_{max} = E. \tag{15.30}$$

La formule (15.21) devient alors

$$\begin{aligned} -\left(\frac{dE}{dt}\right)_i &= \frac{2\pi e^4 Z^2 N}{mc} \left\{\ln \frac{2mc^2}{\mathcal{J}^2} \cdot \frac{E^3}{(Mc^2)^2} - 2\right\} = \\ &= 7,62\cdot 10^{-9} Z^2 N \left\{3 \ln \frac{E}{Mc^2} + \ln \frac{M}{m} + 19,5\right\} \text{eV/s}, \end{aligned} \tag{15.31}$$

où la dernière expression se rapporte à l'hydrogène atomique (15.31) ne rend pas compte de l'effet de densité, ce qui est admissible pour l'hydrogène atomique tant que $E/Mc^2 < 3\cdot 10^{11}/\sqrt{N}$ (cf. plus haut).

Pour le cas non relativiste d'un plasma complètement ionisé de concentration électronique N on a

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_i = \frac{2\pi e^4 Z^2 N}{mv} \ln \frac{m^3 v^4}{\pi e^2 \hbar^2 N} =$$
$$= 7{,}62 \cdot 10^{-9} Z^2 N \sqrt{\frac{2Mc^2}{E_c}} \left\{ \ln \frac{E_c}{Mc^2} - \frac{1}{2} \ln N + 38{,}7 \right\} \text{eV/s.} \quad (15.32)$$

Cette formule se déduit de (15.21)| avec $E_c = {}^1/_2\ Mv^2 \ll Mc^2$, $W_{max} = 2mv^2$ (cf. (15.26)) et $\mathcal{J} = \hbar\omega_p = \hbar\sqrt{4\pi e^2 N/m} = 3{,}7 \times \times 10^{-11} \sqrt{N}$. eV. Cette substitution de $\mathcal{J}$ par l'énergie du plasmon $\hbar\omega_p$ (ou dans un autre langage, le remplacement de la fréquence $\omega = = \mathcal{J}/\hbar$ par la fréquence de plasma ω_p) est tout à fait naturelle étant encore confirmée par un calcul plus conséquent (cf. [27]).

Dans le cas ultra-relativiste $E \gg Mc^2$ il faut utiliser pour le plasma la formule (15.22) ou la formule

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_i = \frac{2\pi e^4 Z^2 N}{mc} \ln \frac{m^2 c^2 W_{max}}{4\pi e^2 \hbar^2 N} =$$
$$= 7{,}62 \cdot 10^{-9} Z^2 N \left\{ \ln \frac{W_{max}}{mc^2} - \ln N + 74{,}1 \right\} \text{eV/s,} \quad (15.33)$$

qui s'en distingue par un facteur peu important, où comme W_{max} on utilise la valeur (15.26) sous la condition (15.25) et la valeur (15.30) dans le cas (15.29). Les valeurs numériques sont données en eV/s. Pour les particules relativistes de $v \approx c$, l'expression des pertes en eV/cm s'obtient en divisant par $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s; les pertes dans l'hydrogène en eV/(g·cm^{-2}) se déduisent des pertes en eV/cm en multipliant par $6 \cdot 10^{23}/N = 1/(1{,}67 \cdot 10^{-24}\ N) = 1/M_p N$.

Examinons encore la question de la production des électrons δ. Il est évident que les pertes correspondantes sont appréciées complètement par (15.21) et les autres formules où figure l'énergie maximale W_{max} transmise à l'électron. Les pertes relatives à la production des électrons δ dont les énergies s'échelonnent de W_{max} à la valeur W_{min} qui nous intéresse (de plus, $W_{min} \gg \mathcal{J}$, $\mathcal{J}$ est l'énergie de liaison moyenne de l'électron qui figure dans (15.21)) s'obtiennent de (15.21) et valent

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_i = \frac{2\pi e^4 Z^2 N}{mv} \ln \frac{W_{max}}{W_{min}}, \quad (15.34)$$

où eZ est la charge et v, la vitesse de la particule incidente; N, la concentration des électrons (et non des atomes!) dans la matière (e et m sont la charge et la masse de l'électron). Les valeurs de W_{max} ont été déjà données pour les cas différents (cf. (15.26), (15.30) et les explications de la formule (15.23)).

La probabilité que, dans une couche de matière de 1 cm, la particule d'énergie E transmette à l'électron l'énergie $W \gg \mathcal{J}$ qui repose dans l'intervalle W, $W + dW$, est égale à

$$\left. \begin{aligned} P_\delta(E, W)\, dW &= \frac{2\pi e^4 Z^2 N}{mv^2} \frac{dW}{W^2} F(E, W), \\ F(E, W) &= \left(\frac{E}{E-W} - \frac{W}{E} \right)^2, \end{aligned} \right\} \quad (15.35)$$

où la fonction F concerne les électrons ultra-relativistes de $E \gg mc^2$ (évidemment, dans ces conditions, $Z = 1$). La section efficace différentielle rapportée à un électron du milieu et qui correspond à la probabilité (15.35) vaut

$$d\sigma_\delta = \frac{2\pi e^4 Z^2 F(E, W)}{mv^2 W^2} dW.$$

Avant d'entreprendre un examen sommaire des autres pertes d'énergie (outre les pertes par ionisation), faisons quelques remarques sur les effets collectifs que provoque le mouvement des particules dans un milieu. Examinons, par exemple, un plasma dans lequel se déplace, à vitesse constante, un flux (faisceau) des particules chargées rapides. La question des processus dont un tel système est le siège s'apparente sous un certain rapport au problème des pertes par ionisation.

Commençons pourtant par un problème plus général. Dans un gaz suffisamment raréfié les processus d'émission des photons, de production d'autres particules (par exemple, des mésons π), d'ionisation et d'excitation des atomes, etc., peuvent être envisagés sans tenir compte de l'influence exercée par le milieu. Autrement dit, si la distance entre les particules du milieu (entre les atomes, par exemple) est suffisamment grande, tous les processus se déroulent comme s'il n'y avait que les particules en collision (particule incidente, atome, « produits » de la collision). Il est aussi clair (et on le sait très bien) qu'avec l'augmentation de la densité, il faut en général prendre en considération l'interaction des particules du milieu et, dans ce sens, on peut parler des effets collectifs. On est amené à un tel effet collectif, par exemple, en appréciant l'influence de l'indice de réfraction du milieu sur le rayonnement synchrotron (cf. chapitre 6). Le rayonnement Tchérenkov des ondes transversales, aussi bien que longitudinales (de plasma) est, certes, aussi un phénomène collectif ; de plus, dans ce cas en général un processus ne marche pas sans milieu (dans le vide). Nous avons déjà envisagé en son temps et lieu des effets collectifs de cette sorte. Une autre catégorie de tels effets se rapporte aux particules incidentes. Ainsi, par exemple, ce n'est que dans le plus simple des cas que les pertes d'énergie d'un flux de particules traversant un milieu sont égales à la somme des pertes subies par les particules isolées du flux considérées comme si

toutes les autres particules de ce flux étaient absentes. De telles conditions sont loin d'être toujours remplies.

Sans prétendre ici à fournir une classification quelle qu'elle soit, dégageons quand même deux classes des effets collectifs relatives aux particules rayonnantes (« incidentes ») elles-mêmes. La première classe est caractérisée par l'inhomogénéité spatiale de la distribution des particules rayonnantes. Par exemple, comme le montre la formule (15.21) et le sens même du phénomène, les pertes par ionisation et l'intensité du rayonnement Tchérenkov sont proportionnelles au carré de la charge eZ de la particule rapide concernée *). Par ailleurs, il est parfaitement clair que les pertes d'une particule de charge eZ seront égales aux pertes de Z particules de charge e si seulement ces dernières se déplacent ensemble en formant un paquet suffisamment compact de charge totale eZ. Il est évident que le paquet peut être considéré comme suffisamment petit, dans le sens indiqué, si sa dimension l est suffisamment petite devant la dimension caractéristique p qui, dans un langage imagé, est responsable des pertes considérées. Dans les collisions proches qui conduisent à la production des électrons δ, le paramètre d'impact p est petit et il n'y a pas lieu de parler des effets collectifs **). Par contre, le rayonnement Tchérenkov de longueur d'onde λ est engendré dans un domaine dont les dimensions sont de l'ordre de λ; dans ce cas les paquets de particules peuvent s'avérer suffisamment petits et, par conséquent, l'intensité du rayonnement ne sera déjà plus proportionnelle au nombre de particules dans le flux.

La manifestation des effets collectifs de la deuxième classe est liée à la réabsorption du rayonnement, à l'instabilité des faisceaux, etc. Pour cette classe, l'inhomogénéité spatiale de la distribution des particules n'a pas d'importance (au moins pour le calcul en approximation linéaire du coefficient d'absorption ou d'amplification des ondes). Un processus de ce type (la réabsorption du rayonnement synchrotron) a été déjà discuté au chapitre 9. Dans ce cas, la marche du processus est bien simple : une particule rayonne, alors que d'autres particules du même ensemble peuvent absorber ce rayonnement ; il s'ensuit que le coefficient d'absorption dépend de la

---

*) Nous avons déjà souligné que l'expression complète des pertes par ionisation contient les pertes Tchérenkov ; par conséquent, de même que les pertes par ionisation, ces dernières sont proportionnelles à Z^2. Toutes les formes des pertes par ionisation sont proportionnelles à Z^2, puisque le champ **E** de la particule est proportionnel à eZ ; quant aux pertes sur le parcours de la particule, elles sont égales au travail $eZvE \approx e^2Z^2$ que le champ engendré par la particule réalise sur cette même particule (c'est cette méthode de calcul du travail $eZvE$ qu'on utilise au chapitre 12 de [27] pour déterminer les pertes par ionisation).

**) Nous avons en vue un paquet de particules non liées entre elles. Mais si les particules sont liées, comme, par exemple, les protons dans un noyau, alors, le caractère des collisions proches est également déterminé d'ordinaire par la charge du paquet eZ.

concentration des particules émettrices. L'instabilité du faisceau de particules dans le plasma liée à l'apparition dans le faisceau des ondes longitudinales est au fond un processus de ce type: il s'agit dans ce cas d'un rayonnement Tchérenkov négatif (réabsorption) des ondes de plasma.

Cette question a été déjà traitée au chapitre 7, mais nous la soumettrons à un examen plus détaillé, puisque ce problème présente de l'intérêt aussi bien dans le sens méthodologique que pratique.

Considérons un faisceau de particules non relativistes de masse M, de charge e et de concentration N_s, se déplaçant dans le plasma « mère » de concentration N et de température T. Notons $f_s(\mathbf{v})$ la fonction de distribution des particules dans le flux suivant les vitesses. A titre d'exemple assez typique utilisons la distribution

$$f_s(\mathbf{v}) = N_s\left(\frac{M}{2\pi\varkappa T_s}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{M(\mathbf{v}-\mathbf{v}_s)^2}{2\varkappa T_s}\right\}. \qquad (15.36)$$

Il est évident que nous avons là un flux qui se déplace à la vitesse moyenne $\mathbf{v}_s$; la dispersion des vitesses au voisinage de $\mathbf{v}_s$ est, à la température T_s, de forme maxwellienne. Puisqu'on admet que le plasma mère est à l'état d'équilibre, on peut écrire pour les électrons

$$f_0(\mathbf{v}) = N\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2\varkappa T}\right). \qquad (15.37)$$

S'il n'y a pas de flux ou si son action peut être négligée, le plasma isotrope sans collisions envisagé peut être le siège des ondes électromagnétiques transversales (le champ magnétique extérieur est censé être absent)

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{kr}-\omega t)], \quad \mathbf{kE} = 0, \quad \mathbf{H} = \frac{c}{\omega}[\mathbf{kE}], \\ &n_\perp \equiv n_{1,2} = \frac{ck}{\omega} = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \\ &\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}, \quad \omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2 \end{aligned}\right\} \qquad (15.38)$$

et longitudinales

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{kr}-\omega t)], \quad \mathbf{H} = 0, \\ &\mathbf{kE} = kE, \quad \omega^2 \approx \omega_p^2 + 3\left(\frac{\varkappa T}{m}\right)k^2, \\ &n_\parallel \equiv n_3 = \frac{ck}{\omega} \approx \frac{1-\omega_p^2/\omega^2}{3\varkappa T/mc^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.39)$$

Les ondes longitudinales ne se propagent sans amortissement (en dehors des collisions) que sous la condition $\sqrt{\varkappa T/m}k \ll \omega_p$ (cela signifie que $kr_D = k\sqrt{\varkappa T/8\pi e^2 N} \ll 1$ ou $\lambda = 2\pi/k \gg r_D$, où $r_D =$

$= \sqrt{\varkappa T/8\pi e^2 N}$ est le rayon de Debye). Nous reprenons ici par commodité ce qui a été dit au chapitre 11.

En adoptant que les particules sont indépendantes (flux suffisamment raréfié), on peut admettre que chaque particule du flux se déplace, est diffusée et rayonne indépendamment des autres particules. Dans ces conditions, la diffusion et le rayonnement de freinage sur les particules du plasma mère peuvent être considérés comme résultant des collisions paires ; ceci se rapporte également à la production des électrons δ et à la partie des pertes par ionisation par collisions proches qui lui est liée. Cependant, comme nous l'avons déjà souligné, le rayonnement Tchérenkov est, quant au fond, un effet collectif. Dans le cas (15.38), l'indice de réfraction $n_\perp < 1$ et par conséquent la vitesse de phase des ondes transversales $v_{\text{ph}\,\perp} = c/n_\perp \gg c$. Il est clair que la condition du rayonnement Tchérenkov $\cos\theta = c/n(\omega)v$ (cf. (6.53)) pour $n < 1$ ne peut pas être observée (v est la vitesse de la particule et θ, l'angle compris entre $\mathbf{v}$ et $\mathbf{k}$ qui est le vecteur d'onde de l'onde rayonnée). Au contraire, pour les ondes longitudinales (15.39), la condition Tchérenkov (6.53) peut très bien être respectée, et par là même la particule du flux est capable de produire des ondes de plasma (longitudinales). L'intensité totale de ce rayonnement Tchérenkov :

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{Tché}} = \frac{2\pi e^4 N}{mv} \ln\left(\frac{2}{3}\frac{v^2}{\varkappa T/m}\right) = \frac{e^2\omega_p^2}{2v} \ln\left(\frac{2}{3}\frac{v^2}{\varkappa T/m}\right). \quad (15.40)$$

D'après sa structure, la formule (15.40) est la même que toutes les formules des pertes par ionisation (cf. par exemple, (15.21) pour $\beta^2 \ll 1$; l'expression (15.40) traduit une partie de ces pertes). Pour ce qui est du facteur logarithmique qui n'est défini qu'approximativement (dans ce sens le facteur 2/3 sous le signe de logarithme est tout à fait conventionnel, alors que la formule (15.40) ne se distingue en rien de la formule (7.33)), il ne peut être obtenu que par un calcul plus détaillé (cf., par exemple, [45, 89] ; au fond, il s'agit ici d'évaluer la condition Tchérenkov (6.53) de $n = n_\parallel$ et la condition $kr_D \lesssim 1$ assurant l'existence des ondes longitudinales faiblement évanouissantes).

Dans le flux de particules se déplaçant sous un angle donné les ondes de fréquence ω sont émisses par toutes les particules telles que $v\cos\vartheta = c/n_\parallel(\omega)$. Ainsi, toutes les particules à valeur fixée de la projection de $\mathbf{v}$ sur $\mathbf{k}$ et à valeurs quelconques de $\mathbf{v}_\perp$ (c.-à-d. de la composante perpendiculaire à $\mathbf{k}$) font leur apport dans le rayonnement sous un angle θ. Sous ce rapport nous nous intéresserons non pas à la fonction de distribution $f_s(\mathbf{v})$ elle-même, mais à la quantité

$$f_s(v)_k = \int f_s(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}_\perp = N_s\left(\frac{M}{2\pi\varkappa T_s}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{M(v_k - v_s\cos\theta)^2}{2\varkappa T_s}\right\}, \quad (15.41)$$

qui utilise la distribution (15.36). La fonction de la forme (15.41) a été schématisée sur la figure 7.2.

A mesure que la concentration N_s des particules du flux augmente, il faut tenir compte de la réabsorption ou de l'amplification des ondes Tchérenkov, c.-à-d. de leur absorption et de leur émission induite par d'autres particules du même flux. Le fait que de tels processus (absorption et émission induite) sont possibles devient tout de suite évident si on recourt au langage quantique. Dans ce langage *) la production des ondes de plasma (et, notamment, des ondes Tchérenkov) est une émission des plasmons d'énergie $\hbar\omega$ et d'impulsion $\hbar\mathbf{k} = (\hbar\omega/c)n_{\parallel}\,(\mathbf{k}/k)$ (à ce propos nous avons fait certaines réserves au chapitre 12 et aucun besoin n'est de les reprendre ici). Lors de l'émission d'un plasmon, la particule d'énergie $E_2 = 1/2\, Mv_2^2$ et d'impulsion $\mathbf{p}_2 = m\mathbf{v}_2$ passe à l'état d'énergie $E_1 = 1/2\, Mv_1^2 = E_2 - \hbar\omega$ et d'impulsion $\mathbf{p}_1 = M\mathbf{v}_2 - \hbar\mathbf{k}$. Il est parfaitement clair que le processus inverse est également possible, puisque les modules des éléments matriciels des transitions directe et inverse sont égaux entre eux. Dans un tel processus inverse, le plasmon $(\hbar\omega, \hbar\mathbf{k})$ est absorbé par la particule $(E_1, \mathbf{p}_1)$; il en résulte que l'énergie de la particule devient $E_2 = E_1 + \hbar\omega$ et son impulsion $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \hbar\mathbf{k}$. La probabilité de l'émission induite est égale à la probabilité de l'absorption; de cette façon, si l'état 2 est le plus « élevé » (ce que nous avons supposé ci-dessus), alors en présence du plasmon $(\hbar\omega, \hbar\mathbf{k})$ le système (la particule) effectue la transition induite $E_2 \to E_1$, $\mathbf{p}_2 \to \mathbf{p}_1$ en émettant encore un plasmon $(\hbar\omega, \hbar\mathbf{k})$. La « vraie » absorption (l'absorption résultante) est définie par la différence entre les nombres de particules N_1 et N_2 aux états 1 et 2. Il est évident que dans le cas du rayonnement Tchérenkov ce n'est que la projection sur $\mathbf{k}$ de la vitesse $\mathbf{v}$ de la particule qui change, c.-à-d. change la valeur v_k ; de plus, $Mv_{k,2} = Mv_{k,1} + (\hbar\omega/c)n_{\parallel}$. Ensuite

$$1 - \frac{N_2}{N_1} = 1 - \frac{f_s(v_{k,2})}{f_s(v_{k,1})} = -\frac{1}{f_s}\frac{df_s}{dv_k}\frac{\hbar\omega}{Mc}n_{\parallel},$$

où la fonction de distribution f_s et sa dérivée sont prises au point $v_k = \omega/k \approx v_{k,1} \approx v_{k,2}$ (on voit aisément que dans le cas classique, $\hbar k \ll Mv_k$). Ainsi, le coefficient de réabsorption est égal à

$$\mu = -A\left(\frac{df_s(v_k)}{dv_k}\right)_{v_k=\omega/k}. \qquad (15.42)$$

*) Nous parlons ici, comme nous l'avons fait précédemment à plus d'une reprise, du « langage » du fait que nous avons en vue le problème classique, dont la description complète est également possible en termes classiques, mais il s'avère qu'il est plus commode ou plus immédiat d'appliquer les idées quantiques.

Le champ de l'onde monochromatique qui se propage le long de l'axe des z varie suivant la loi

$$E = E_0 \exp\left[i\omega\left(\frac{n}{c}z - t\right)\right]\exp\left(-\frac{\omega}{c}\varkappa z\right),$$

où $\varkappa$ est l'indice d'absorption. Le coefficient d'absorption $\mu = \frac{2\omega}{c}\varkappa$ détermine la variation de l'intensité $I \sim |E|^2 \sim \exp(-\mu z)$. Une autre position du problème très fréquente est d'ailleurs possible, lorsqu'on admet que le vecteur d'onde **k** est réel et la fréquence ω est complexe. Alors,

$$E = E_0 \exp\left[i\omega'\left(\frac{n}{c}z - t\right)\right]\exp(-\gamma t),$$

où $\omega = \omega' - i\gamma$ (ici $\omega' = \mathrm{Re}\,\omega$).

Qui plus est, l'intensité $I \sim \exp(-2\gamma t)$. Une démonstration rigoureuse montre, bien que ceci soit clair à partir des considérations immédiates, que pour un milieu faiblement absorbant ou faiblement amplifiant on a

$$2\gamma = \mu v_{gs}, \tag{15.43}$$

où $v_{gr} = d\omega/dk$ est la vitesse de groupe des ondes; sous les conditions (15.39)

$$v_{gp} = \frac{3\varkappa T}{m v_{ph}} \quad \text{et} \quad v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{3\varkappa T/m}{1 - \omega_p^2/\omega^2}}.$$

Le calcul que nous omettons (cf. [45, 129, 140], pour le plasma maxwellien, [64, 139] et chapitre 11) permet de trouver le coefficient A de l'expression (15.42). Il en résulte pour γ (cf. également (15.43))

$$\gamma = -\frac{2\pi^2 e^2 \omega_p}{M k^2}\left(\frac{df_s(v_k)}{dv_k}\right)_{v_k = \omega/k}. \tag{15.44}$$

D'après le sens, dans (15.44), $f_s(v_k)$ du faisceau électronique est la fonction de distribution totale qui rend compte aussi bien de l'existence du faisceau que de l'existence du plasma mère. Si pour autant nous avons noté f_s la fonction de distribution (l'indice s indique le faisceau), ce n'est qu'ayant en vue son application aux cas réels, lorsqu'au voisinage de la valeur $v_k = \omega/k$ on peut négliger la contribution des particules du plasma mère maxwellien. En vertu de ce qui vient d'être dit il est clair pourtant que la formule (15.44) à $M = m$ peut être appliquée également dans le cas du plasma maxwellien pur, sans faisceau ; de plus, elle conduit à l'expression de γ dans les conditions d'un amortissement sans collisions (cf. chapitre 11). Comme nous l'avons dit, c'est cet amortissement qui a lieu ($\gamma > 0$), ce qui est dû au fait que pour la distribution maxwellienne, $df_s/dv_k < 0$ (cf. (15.37) ou (15.41) pour $v_s = 0$). L'exposé qui précède montre

avec une évidence particulière la nature d'un amortissement sans collisions dans un plasma isotrope : il s'agit de l'effet Tchérenkov inverse, c.-à-d. de l'absorption Tchérenkov (cette absorption de l'onde de plasma a lieu justement pour les particules de $v_k = v \cos \theta = c/n_{\parallel}(\omega)$; nous avons repris ici ce qui a été dit aux chapitres 7 et 11).

Si la fonction de distribution est telle que dans un tel ou tel domaine $df_s/dv_k > 0$, alors au lieu de s'amortir l'amplitude des ondes s'accroît, ou suivant une autre terminologie, on observe l'absorption négative ou l'instabilité. Comme il est évident ne serait-ce que d'après la figure 7.2, pour tout faisceau « plongé » dans le plasma il y a un domaine (domaine I) tel que $df_s/dv_k > 0$. De cette façon, les ondes de vitesse de phase $v_{\text{ph}} = \omega/k$ se trouvant dans le domaine des valeurs de v_k associées au secteur I de la figure 7.2, seront amplifiées. Il en résulte que l'amplitude des ondes croît, sa limitation n'étant définie que par des effets non linéaires. Dans ce cas l'amplification des ondes est de même nature que dans les amplificateurs quantiques ou dans les générateurs (masers ou lasers). En effet, la condition $df_s/dv_k > 0$ signifie simplement qu'aux niveaux supérieurs les particules sont plus nombreuses qu'aux niveaux inférieurs ; il en résulte que l'émission induite prédomine sur l'absorption.

En portant dans (15.44) la fonction (15.41), on obtient

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{\omega_s^2\omega_p\,(v_{\text{ph}} - v_s\cos\theta)}{k^2 v_{T_s}^2}\exp\left\{-\frac{(v_{\text{ph}} - v_s\cos\theta)^2}{2v_{T_s}^2}\right\},\\ &\omega_s^2 = \frac{4\pi e^2 N_s}{M},\quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m},\quad v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k},\quad v_{T_s} = \frac{\varkappa T_s}{M}. \end{aligned}\right\} \tag{15.45}$$

Dans le domaine où $v_{\text{ph}} < v_s \cos\theta$, les ondes s'amplifient ($\gamma < 0$). Il est évident que la valeur maximale de γ pour k donné est

$$|\gamma_{\max}| \sim \frac{\omega_s^2\omega_p}{k^2 v_{T_s}^2}. \tag{15.46}$$

La vitesse v_{ph} qui figure ci-dessus est la vitesse de phase des ondes dans le plasma mère. Pour que le rayonnement Tchérenkov soit possible, cette vitesse ne doit pas dépasser c. C'est pourquoi dans (15.46) $k_{\min} \approx \omega_p/c$, et donc *)

$$|\gamma_{\max}| \lesssim \frac{\omega_s^2 c^2}{\omega_p v_{T_s}^2} \gtrsim \frac{\omega_s^2}{\omega_p}. \tag{15.47}$$

L'étude classique de la question fait appel à l'équation cinétique de la fonction de distribution f_s, en choisissant comme distribution initiale dans le faisceau, par exemple, la distribution (15.36).

---

*) Si $v_{T_s} \ll v_s$, on peut admettre que la condition du rayonnement Tchérenkov est $v_{\text{ph}} \ll v_s$ et $k_{\min} \approx \omega_p/v_s$; d'où $|\gamma_{\max}| \lesssim \omega_s^2 v_s^2/\omega_p v_{T_s}^2$.

Supposons qu'il faille déterminer la fréquence $\omega = \omega' - i\gamma$ pour l'onde de vecteur réel **k** (ou le vecteur complexe **k** pour la fréquence réelle ω). Bien sûr, on obtient finalement le même résultat (15.44). ou pour être concret, (15.45). Cette identité des résultats témoigne de l'équivalence complète des approches quantique et classique du problème discuté (sous ce rapport cf., par exemple, [81]), en entendant par approche quantique l'application de la méthode des coefficients d'Einstein à la recherche des probabilités des transitions *). Le domaine d'application de cette méthode est limité en particulier par la condition $|\gamma| \ll \omega \sim \omega_p$. Pourtant dans le domaine où elle est applicable, la méthode des coefficients d'Einstein est très féconde. ce qui a été déjà démontré au chapitre 9.

Ce qui vient d'être dit rend clair qu'en présence d'un faisceau de particules dans le plasma (la vitesse moyenne des particules dans le faisceau $v_s \gg v_T = \sqrt{\varkappa T/m}$) ce faisceau est instable du fait de l'amplification au sein du faisceau des ondes longitudinales (de plasma). L'incrément de l'amplification γ est proportionnel à la concentration N_s des particules dans le faisceau (cf. (15.45) et plus loin, en tenant compte que $\omega_s^2 \propto N_s$). Ceci entraîne que dans un faisceau de densité suffisamment faible l'amplification des ondes par absorption négative des ondes Tchérenkov est suffisamment faible (faible dans le temps caractéristique du processus; faible sur toute la longueur du faisceau, etc.); d'autre part, dans des conditions parfaitement réelles, l'effet collectif (instabilité) dans les faisceaux peut être très important. Il en résulte que la perte d'énergie dans le faisceau et son étalement peuvent être bien plus rapides (ou se produire sur un parcours plus court) que pour les particules isolées. La résolution du problème des pertes et de la diffusion (isotropisation) du faisceau est assez compliquée, puisqu'il est impossible de se borner à l'approximation linéaire et il faut développer une théorie non linéaire (cf. [129, 140] et leurs bibliographies).

Pourquoi cependant nous examinons l'instabilité des faisceaux dans le plasma dans le chapitre consacré aux rayons cosmiques? A première vue ceci paraît d'autant plus déplacé que, dans ce qui précède, nous avons insisté sur l'isotropie des rayons cosmiques, ce qui rend tout à fait impossibles les conditions nécessaires à l'instabilité du faisceau. D'autre part, la raréfaction très poussée du plasma cosmique (dans l'espace interstellaire la concentration électronique est $N \lesssim 1$ cm^{-3} et dans l'espace intergalactique, $N \lesssim 10^{-5}$ cm^{-3})

*) Ce n'est que dans ce sens ou dans un sens analogue qu'on peut opposer les méthodes quantique et classique. Mais si l'on a en vue la possibilité de principe de résoudre tout problème classique sur la base des équations de la théorie quantique, alors cette possibilité est évidente, puisque la mécanique classique et l'électrodynamique classique sont des cas limites des constructions quantiques correspondantes.

fait que l'intérêt des effets de plasma pour l'astrophysique des rayons cosmiques est en général peu important.

D'ailleurs, ce dernier argument doit, dès le début, être reconnu comme futile, puisque les valeurs absolues de la concentration N et d'autres grandeurs ne peuvent jouer aucun rôle: il faut les comparer avec les valeurs correspondantes qui importent pour les processus envisagés. Quant à l'isotropie des rayons cosmiques, l'un des problèmes les plus urgents est d'établir ses causes, ainsi que de mettre en évidence les conditions qui déterminent l'absence de l'isotropie. On voit donc que l'analyse des effets de plasma est réellement nécessaire pour l'astrophysique des rayons cosmiques. Qui plus est, il n'y a aucun doute que ces effets peuvent être très sensibles.

Considérons, par exemple, l'« écoulement » des rayons cosmiques d'une certaine région de champ magnétique H_1 où ils sont isotropes, dans l'espace environnant de champ magnétique $H_2 \ll H_1$. Cette situation est parfaitement réelle, par exemple, lorsque les rayons cosmiques s'échappent de l'enveloppe d'une supernova dans l'espace interstellaire ou d'une galaxie (ou de son noyau) dans l'esinterpace galactique.

Lorsque la particule chargée se déplace dans un champ magnétique régulier l'invariant adiabatique *)

$$\frac{p_\perp^2}{H} = \frac{p^2 \sin^2 \chi}{H} = \text{const}, \tag{15.48}$$

où p est l'impulsion de la particule et χ l'angle entre **p** et **H**, ne change pas. Dans un champ constant, c.-à-d. ne dépendant pas du temps, l'énergie de la particule $E = \sqrt{M^2c^4 + c^2p^2}$ et son impulsion p ne changent pas; donc

$$\frac{\sin^2 \chi}{H} = \text{const}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{15.49}$$

Lorsque la particule passe dans une région à champ plus faible, d'après (15.49) l'angle χ diminue. Il s'ensuit que, pour $H_2 \ll H_1$, dans la région 2 de champ faible la distribution directionnelle des

---

*) Il serait plus correct de dire que le premier membre de (15.48) est l'invariant adiabatique du déplacement de la particule dans un champ magnétique. Lorsque la variation des paramètres du problème est lente, et dans notre cas c'est le fait du champ H, l'invariant adiabatique reste constant. Cela signifie que la variation du champ doit être négligeable à des distances de l'ordre du rayon de courbure r_H et pendant le temps de l'ordre $1/\omega_H^*$, $\omega_H^* = (eZH/Mc) \times \times (Mc^2/E)$. Dans les conditions cosmiques, il est fréquent que ces exigences sont bien observées. Il faut pourtant retenir que non seulement on admet ici que le champ électrique (outre le champ associé à la variation de H dans le temps) est absent, mais on néglige encore les pertes. Ces dernières peuvent, certes, compromettre la persistance de l'invariant adiabatique. Par exemple, les pertes par rayonnement synchrotron, particulièrement importantes pour les électrons, entraînent, pour $H = \text{const}$, la diminution de l'angle χ.

particules doit être nettement anisotrope, elles se déplaceront pratiquement le long des lignes de force (c.-à-d. leur angle $\chi \ll 1$). C'est ce qui forme justement un faisceau de particules.

Dans la Galaxie, la concentration des rayons cosmiques $N_{r.c} \sim \sim 10^{-10}$ particules /cm^3 (cf. (15.9)) ; c'est pourquoi pour évaluer la concentration des particules dans le « faisceau » pénétrant dans l'espace interstellaire à partir des enveloppes ou s'échappant de la Galaxie, adoptons également l'estimation $N_s \sim N_{r.c} \sim 10^{-10}$ particule/cm^3, d'où pour les protons $\omega_s^2 = 4\pi e^2 N_s/M \sim 0{,}3$; cette estimation est correcte jusqu'aux énergies $E \sim Mc^2 \sim 10^9$ eV, c.-à.-d. pour la plus grande partie des rayons cosmiques (dans le cas le cas relativiste, $\omega_s^2 = (4\pi e^2 N_s/M)\,(Mc^2/E)$). Par ailleurs, pour le plasma mère, dans la Galaxie, $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m} = 5{,}64 \times \times 10^4 \sqrt{N} \leqslant 5\cdot 10^4$ s^{-1} ($N \leqslant 1$ cm^{-3}) et dans la Métagalaxie, $\omega_p \leqslant \leqslant 10^2$s^{-1} ($N \leqslant 10^{-5}$ s^{-3}). D'où l'on obtient pour l'incrément de l'amplification des ondes de plasma sous l'effet de l'instabilité du faisceau (cf. (15.47) avec $v_{T_s} \sim c$)

$$\left.\begin{aligned} |\gamma_{max}| &\leqslant \frac{\omega_s^2}{\omega_p} \sim 10^{-5}\ \text{s}^{-1}\ \text{(Galaxie)},\\ |\gamma_{max}| &\leqslant 10^{-3}\ \text{s}^{-1}\ \text{(Métagalaxie)}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.50)$$

Pour les plus courtes des ondes qui peuvent jouer un rôle dans le problème

$$\gamma \sim \gamma_{min} \sim (v_T/c)^2 \gamma_{max} \sim (\varkappa T/mc^2)\, \gamma_{max} \sim 10^{-6}\, \gamma_{max}$$

(pour $T \sim 10^4$ °K) et $\gamma_{min} \sim 10^4\, \gamma_{max}$ (pour $T \sim 10^6$ °K, ce qui correspond probablement au gaz intergalactique). Mais même pour la valeur $|\gamma| \sim 10^{-10}$ s^{-1} ces ondes de plasma s'amplifient sensiblement en un temps *) $T \sim 1/|\gamma| \sim 10^{10}$ s $\sim$ 300 ans, c.-à.-d. en un temps infime par rapport au temps caractéristique de l'évolution de la Galaxie $T_G \sim 10^9 = 10^{10}$ années et la durée de vie des rayons cosmiques dans la Galaxie $T_{r.c} \sim 10^7$-10^8 années. Nous ne multiplierons pas les exemples et les estimations, leur but unique étant de démontrer qu'en général les effets de plasma présentent un grand intérêt pour l'astrophysique des rayons cosmiques [129, 140, 191, 194, 204]. Il en est ainsi simplement du fait que les fréquences du plasma cosmique ω_p et les fréquences ω_s des faisceaux éventuels des rayons cosmiques ne sont basses qu'à l'échelle « du laboratoire » ; il en est de même des incréments de différentes instabilités qu'il faut évidemment comparer aux grandeurs $1/T$, où T est le temps caractéristique du problème (temps d'étalement de l'enveloppe d'une supernova, l'âge des rayons cosmiques, etc.).

*) Le temps et la température sont désignés par la même lettre T, mais cela ne doit pas prêter à confusion.

L'incrément γ varie d'après les instabilités différentes et, par exemple, suivant que le faisceau des particules excite les ondes de plasma ou les ondes magnétohydrodynamiques. De plus, γ dépend des paramètres du plasma mère et de la caractéristique du faisceau lui-même, en particulier, du degré de l'anisotropie des particules dans le faisceau (pour le faisceau à distribution (15.36) il s'agit de la relation $\varkappa T_s/Mv_s^2$). Ainsi, par exemple, pour un flux de rayons cosmiques de faible anisotropie $\delta \ll 1$, pratiquement ce n'est que l'excitation des ondes magnétohydrodynamiques qui joue un rôle [194]. De la sorte, l'incrément $|\gamma|$ atteint sa valeur maximale et par là même devient en général le plus important dans des conditions différentes pour les instabilités de types différents, des ondes de types différents, etc. Cette réserve (« en général ») est déterminée par deux arguments. Premièrement, l'incrément γ caractérise l'amplification, par exemple, des ondes de plasma seulement au stade initial, linéaire. Or, l'allure de l'état stabilisé est définie par des processus non linéaires. C'est pourquoi l'instabilité de l'incrément plus grand peut en fait au stade non linéaire amener des perturbations moins importantes que certaines instabilités au développement plus lent. Deuxièmement, dans les cas courants, nous nous intéressons non pas à l'instabilié elle-même ni à l'intensité des ondes apparues, mais à telle ou telle action de ces ondes (perturbations). S'il s'agit par exemple de l'instabilité due à l'effet des ondes électromagnétiques (transversales), l'estimation de la transformation réciproque des ondes de types différents est tout aussi importante que la détermination de l'intensité des ondes de plasma. La question qui présente ordinairement un intérêt particulier en astrophysique des rayons cosmiques est celle de l'action inverse des ondes produites et d'autres perturbations sur le faisceau lui-même et le champ magnétique où il se déplace. Le développement des instabilités qui conduisent à l'apparition de différentes ondes et d'autres perturbations (par exemple, des altérations apériodiques du champ magnétique) fait en général que le faisceau s'étale et devient isotrope, alors que le champ magnétique régulier devient de plus en plus chaotique et turbulent. Telle est la tendance générale assez évidente, mais son analyse quelque peu détaillée demande de grands efforts et on est encore loin de son achèvement [129, 140, 194]. Ceci concerne surtout les conditions cosmiques où une part importante de l'indétermination est liée au fait que nous ne connaissons pas suffisamment les paramètres du problème (caractéristiques des faisceaux et du champ magnétique, sans rien dire encore des paramètres du plasma interstellaire). Pourtant, les estimations déjà réalisées de l'instabilité du faisceau permettent de tirer certaines conclusions étayées par l'estimation de la contribution des ondes magnétohydrodynamiques, par l'analyse du rôle que jouent les processus non linéaires, etc. (cf. [194] et sa bibliographie).

Ce sont précisément les instabilités du plasma qui déterminent,

dans l'espace, la production efficace des ondes et des perturbations de toute sorte, qui, à leur tour, diffusent les rayons cosmiques. Il en résulte que la distribution anisotrope des rayons cosmiques est assez vite relaxée, et dans la Galaxie ou dans l'espace intergalactique l'anisotropie des rayons cosmiques ne peut être que faible: $\delta \ll 1$. D'autre part, la diffusion des rayons cosmiques sur les inhomogénéités et sur les ondes, combinée aux perturbations susmentionnées du champ magnétique, conduit à une certaine turbulisation du champ magnétique de la Galaxie et au « brassage » des rayons cosmiques. Malheureusement, l'aspect quantitatif du problème n'est pas encore suffisamment élucidé. En particulier, il n'est pas clair quelle est dans les gammes énergétiques différentes la part spécifique de la diffusion et de l'isotropisation des rayons cosmiques sur les ondes produites par ces rayons eux-mêmes, sur les ondes d'une autre origine et sur les différentes inhomogénéités statistiques, ou plutôt quasi statistiques du champ magnétique [194].

Nous ne pouvons plus nous étendre sur ce sujet, mais nous avons cru utile, de même que dans le chapitre tout entier, de mettre en lumière, au moins en termes généraux, l'ensemble des problèmes qui se posent devant l'astrophysique des rayons cosmiques, ayant en vue, dans le cas donné, l'estimation des effets de plasma. Ceci doit également rendre plus claire l'approche qui consiste à utiliser l'approximation de diffusion et les équations de transfert et qui domine, à l'heure actuelle, dans les tentatives de l'étude quantitative de tels ou tels modèles de l'origine des rayons cosmiques.

Admettons que les rayons cosmiques sont localement isotropes, c.-à-d. que l'anisotropie peut apparaître seulement si l'on fait entrer en ligne de compte l'inhomogénéité spatiale de la concentration des particules N_i ($\mathbf{r}$, t, E), où i est le type des particules (le nombre de particules, dans un élément $d\mathbf{r}\,dE$, à l'instant t est $N_i\,d\mathbf{r}dE$). Dans l'approximation discutée, pour N_i l'équation de transfert générale est de la forme (pour plus de détails, cf. [39]; la double sommation sur les indices i dans (15.51) ne se fait, certainement, pas)

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \operatorname{div}(D_i \nabla N_i) + \frac{\partial}{\partial E}(b_i N_i) = Q_i - P_i N_i + \mathcal{P}_i. \qquad (15.51)$$

Dans ce qui suit, nous caractériserons naturellement tous les termes de l'équation (15.51), mais nous commencerons par les deux premiers, puisque seulement la conservation de ces termes conduit à l'équation de diffusion

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \operatorname{div}(D_i \nabla N_i) = 0, \qquad (15.52)$$

où D_i ($\mathbf{r}$, E) est le coefficient de diffusion.

La possibilité de décrire le mouvement des rayons cosmiques dans les champs magnétiques en appliquant l'approximation de dif-

fusion (15.51), (15.52) n'est nullement évidente. Pour justifier une telle approximation il ne suffit pas que le champ ait une composante chaotique non régulière très marquée, puisque dans ce cas-là aussi la tendance des particules à se déplacer seulement le long des lignes de force du champ magnétique est très forte bien que ces lignes soient assez embrouillées. Mais, par exemple, dans la Galaxie il faut encore tenir compte de cette circonstance que sa rotation différentielle et le mouvement des nuages de gaz et des bras spiralés font que les lignes de force magnétiques sont « brassées » en permanence. Enfin, nous nous intéressons ordinairement au tableau mis en moyenne non seule ment suivant les régions de l'espace assez grandes (disons, des régions s'étalant à de dizaines et centaines de parsecs), mais aussi suivandes temps assez longs. Ainsi, pour l'estimation des gradients moyent des rayons cosmiques et de leur durée de vie dans la Galaxie $T_{r.c}$s il suffit de connaître la concentration N_i mise en moyenne pour l, temps $t \ll T_{r.c} \sim 10^7$-10^8 années, c.-à-d. le temps de la mise ene moyenne peut être de 10^5 années.

Si l'on tient compte de ces circonstances, l'approximation de diffusion semble admissible, surtout lorsque le coefficient D_i est choisi comme paramètre libre. Il est vrai que par là on ne supprime nullement la question de la possibilité de calculer D_i à l'aide d'une étude plus détaillée (par exemple, en tenant compte des instabilités du plasma), et surtout celle de la vérification de l'hypothèse elle-même du mécanisme de diffusion par la comparaison des observations avec les résultats du calcul en approximation de diffusion (sur la base des équations du type (15.51)), de l'anisotropie, de la composition chimique et d'autres grandeurs caractéristiques des rayons cosmiques ou de leurs composantes.

Dans un tableau dressé sur la base des données de la diffusion, le flux global des rayons cosmiques est égal à

$$F_{D,\,i} = 2\pi \int_0^{\pi} J(\theta) \cos\theta \sin\theta \, d\theta = D_i \, |\nabla N_i| = -D_i \frac{dN_i}{dr}\,; \qquad (15.53a)$$

de plus, la dernière expression est écrite sous l'hypothèse de la symétrie correspondante du problème; par ailleurs, l'axe polaire est choisi dans le sens du flux $\mathbf{F}_{D,\,i}$. En posant pour tous les rayons cosmiques $J(\theta) = J_0 + J_1 \cos\theta$, on obtient sans peine l'expression du degré d'anisotropie

$$\delta = \frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max} + J_{min}} = \frac{J_1}{J_0} = \frac{3F_D}{4\pi J_0} = \frac{3D}{c} \frac{1}{N_{r.c}} \left| \frac{dN_{r.c}}{dr} \right|, \qquad (15.53b)$$

où on a également utilisé la relation $J \approx J_0 = (4\pi/v) N_{r.c} = (4\pi/c) N_{r.c}$ (on examine les particules ultra-relativistes); certes, une relation

analogue peut s'écrire pour des particules de toute sorte. Si l'image est quasi sphérique,

$$\left|\frac{dN_{\text{r. c}}}{dr}\right| \sim \frac{N_{\text{r. c}}}{R},$$

où R est la distance caractéristique ; dans le cas de la Galaxie adoptons $R \sim 10^{22}$ cm (la distance du Soleil au centre galactique $R = 3\cdot 10^{28}$ cm) et $\delta \leqslant 10^{-4}$ (cf. plus haut). D'où $D \sim \sim 1/3\delta cR < 10^{28}$ cm²/s. D'autres estimations plus sûres *) sont fondées sur le calcul de la composition chimique des rayons cosmiques (cf. [39, 193a, 195] et ce qui suit). Elles donnent

$$D_{\text{disque}} \sim 3\cdot 10^{26}\ \text{cm}^2/\text{s}\,; \quad D_{\text{halo}} \sim 7\cdot 10^{27}\ \text{cm}^2/\text{s}, \qquad (15.54)$$

où les valeurs D_{disque} et D_{halo} correspondent à celles des modèles à disque et à halo respectivement.

Le coefficient de diffusion dans le gaz $D = 1/3\ vl$, où l est la longeur du libre parcours et v, la vitesse des particules. En appliquant la même relation et en admettant que la vitesse du mouvement des rayons cosmiques le long du champ $v \sim 10^{10}$ cm/s, on peut évaluer à partir de (15.54) les longueurs efficaces du libre parcours: $l_{\text{disque}} \sim 10^{17}$ cm et $l_{\text{halo}} \sim 2\cdot 10^{18}$ cm. Dans le tableau dressé sur la base de la diffusion, le carré moyen de la distance $\overline{z^2}$ parcourue par la particule dans la direction z en un temps T vaut $\overline{z^2} = 2DT$. D'après cette formule, on peut évaluer la durée de vie des rayons cosmiques dans la Galaxie en portant au lieu de $\overline{z^2}$ le carré de la dimension caractéristique du système L. Dans le modèle à disque on pose généralement $L \sim 3\cdot 10^{20}$ cm (demi-épaisseur du disque de gaz) et, dans le modèle à halo, $L \sim R \sim 10^{22}$ cm (rayon, ou plutôt demi-épaisseur du halo). Alors, en utilisant (15.54), on obtient

$$T_{\text{r. c. disque}} \sim 5\cdot 10^{6}\ \text{années}\,; \quad T_{\text{r. c. halo}} \sim 2\cdot 10^{8}\ \text{années}. \qquad (15.55)$$

Il est évident que ces estimations sont grossières, mais même cette circonstance ne rend pas encore clair pourquoi dans le modèle à disque on a pris comme dimension L la demi-épaisseur du disque de gaz et non pas la demi-épaisseur du disque radio $h \sim 10^{21}$ cm. Il en est ainsi du fait que, comme le montre sa dénomination, le gaz interstellaire se concentre justement dans le disque de gaz. Donc, en évaluant la durée de « séjour » des rayons cosmiques dans un milieu de gaz (pour le disque de gaz $N \sim 1$ cm⁻³) l'estimation de $T_{\text{r. c. disque}}$ doit se déterminer justement pour le disque de gaz. Mais ceci rend

*) Il ne s'agit pas seulement du fait que le degré d'anisotropie δ n'est pas encore mesuré (on n'a défini que sa limite supérieure, et encore cette estimation est peu sûre). Il est tout aussi essentiel que l'anisotropie peut refléter les conditions *locales* au voisinage du Système solaire, et ne pas caractériser le gradient moyen des rayons cosmiques dans la Galaxie.

particulièrement évident un caractère conventionnel d'un tel temps $T_{r.c.}$ Et nous pensons qu'aucun besoin n'est d'expliquer qu'en admettant un peu plus haut que $T_{r.c. \text{disque}} \sim 10^7$ années et $T_{r.c. \text{halo}} \sim 10^8$ années nous sommes encore loin de dépasser les limites de précision des estimations (15.55).

Le coefficient de diffusion D_i de (15.50), (15.51) peut dépendre des coordonnées **r** et de l'énergie de la particule E (on admet que le système est stationnaire, ce qui implique que les coefficients de l'équation de transfert, en particulier le coefficient D_i, ne dépendent pas du temps; dans les conditions non stationnaires, la diffusion et d'autres processus imposent une étude spéciale). Toutefois, pratiquement, le coefficient D_i des problèmes à résoudre est soit constant dans l'espace, soit constant dans quelques régions intéressant le problème (à la frontière de ces régions, la composante du flux normale à la frontière $D_i \nabla N_i$ doit être continue, la concentration N_i doit aussi rester constante). Pour ce qui est de la dépendance entre D_i et l'énergie des particules E, la persistance approchée de la composition chimique des rayons cosmiques témoigne de la constance approximative de D_i dans le domaine des énergies $\sim \epsilon \leqslant 10^{12}$ eV/nucléon et peut-être même jusqu'à l'énergie $E \sim E_c \sim 1$ à $3 \cdot 10^{15}$ eV. Avec $E \sim E_c$, on observe un changement de l'exposant γ du spectre des rayons cosmiques (cf. (15.11), (15.12)); on admet naturellement que ceci est lié à l'apparition de la dépendance marquée entre D_i et E, et notamment, à l'augmentation du coefficient de diffusion en fonction de E pour $E > E_c$. Ces derniers temps on a rendu publiques les indications déjà mentionnées [193] sur une faible dépendance entre D_i et E dans le domaine des énergies $E < 10^{12}$ eV. Il importe de souligner ici qu'une évaluation de cette dépendance est tout à fait possible dans le cadre de l'approximation de diffusion.

Examinons maintenant les autres termes (sans les deux premiers) de l'équation de transfert (15.51), qui de par eux-mêmes ont un sens des lois de conservation du nombre de particules dans l'espace des coordonnées et des énergies. Cette remarque permet de comprendre que la grandeur $b_i N_i$ est un flux de particules de type i dans l'*espace énergétique*, où b_i est la vitesse dans l'espace des énergies, c.-à-d. la variation de l'énergie de la particule par unité de temps

$$\frac{dE}{dt} = b_i(E). \tag{15.56}$$

Ainsi, $\frac{\partial}{\partial E}(b_i N_i)$ est en effet la divergence du flux. Il faut encore avoir en vue que la variation envisagée de l'énergie de la particule doit être progressive, continue (au moins, à la précision près de l'approximation appliquée). S'il s'agit des pertes d'énergie, bien entendu $b_i < 0$; un exemple de telles pertes partiquement continues peut être fourni par les pertes par ionisation examinées précédemment

$\left(\text{il est évident que } \frac{dE}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dE}{dt}\right)$ ou les pertes par freinage magnétique discutées au chapitre. 4. Si les particules sont accélérées, $b_i > 0$. Il faut également souligner que tant dans le cas des pertes que dans celui de l'accélération des particules, outre la variation moyenne régulière de l'énergie en un certain intervalle de temps, peuvent avoir lieu des fluctuations de l'énergie souvent très importantes. Ces fluctuations entraînent la redistribution énergétique des particules, même si leur énergie moyenne reste constante *). En présence des fluctuations d'énergie de ce type, il faut, sous certaines conditions, ajouter au premier membre de l'équation (15.51) le terme

$$-1/2\frac{\partial^2}{\partial E^2}(d_i N_i), \quad \text{où } d_i(E) = \frac{d}{dt}\overline{(\Delta E)^2},$$

$\overline{(\Delta E)^2}$ est la moyenne quadratique de la variation de l'énergie sous l'effet des fluctuations (pour plus de détails, cf. [39]).

Le terme Q_i (**r**, t, E) de (15.51) est l'intensité des sources « extérieures » des particules: la quantité de ces particules qui arrivent sur le système par unité de temps au voisinage $d\mathbf{r}\, dE$ du « point » **r**, E est $Q_i\, d\mathbf{r}\, dE$. Le terme $P_i N_i$ de (15.51) rend compte des processus « catastrophiques » de la fuite des particules de l'espèce i à partir de l'intervalle concerné $d\mathbf{r}\, dE$. Il semble que la particule disparaît de cet intervalle et de son voisinage. Un exemple peut en être fourni par la transformation des noyaux lorsque un noyau de l'éspèce i disparaît en général en se transformant en noyau (et en principe en d'autres particules aussi) des espèces k, l, m. Le deuxième exemple est celui des pertes par rayonnement de freinage dans les collisions électron-autres particules et émission d'un photon suffisamment dur.

Si σ_i est la section des collisions des particules du type i; v_i, la vitesse de ces particules; $N_{\text{gaz}} \equiv N$, la concentration des particules, par exemple, des noyaux dans le gaz interstellaire où les collisions ont lieu, alors

$$P_i = \sigma_i v_i N = \frac{v_i}{l_i} = \frac{1}{T_i}. \tag{15.57}$$

*) Un exemple peut en être fourni par l'accélération des particules dans un champ électrique dont la différence de potentiels V est définie en module, mais dans les conditions où le changement du signe de V est chaotique, c.-à-d. quand la particule se déplace tantôt suivant le champ, tantôt dans le sens opposé, ce qui peut avoir lieu lorsqu'elle pénètre dans le « condensateur » à partir de côtés différents. L'énergie moyenne de toutes les particules reste alors invariable, puisque $\overline{V} = 0$, mais certaines particules peuvent avoir « la chance » d'acquérir une énergie plus grande par suite de leur arrivée préférentielle dans des régions à champ parallèle à l'impulsion des particules. Autrement dit, il s'agit d'une « diffusion suivant l'énergie », de sorte que $(\overline{\Delta E_0}) \neq 0$ puisque $\overline{V^2} \neq 0$.

Il est évident que P_i a le sens du nombre de collisions (cf. chapitre 11) ; $l = 1/\delta_i N$ est la longueur du libre parcours et T_i, la « durée de vie » moyenne ou le temps du libre parcours.

Le dernier terme $\mathcal{P}_i$ de l'équation (15.51) rend compte de l'arrivée des particules (y compris par suite des collisions « catastrophiques ») dans l'intervalle considéré $d\mathbf{r}\, dE$. On peut écrire, par exemple,

$$\mathcal{P}_i = \sum_k{}' \int P_i^k(E', E)\, N_k(\mathbf{r}, t, E')\, dE', \tag{15.58}$$

où P_i^k est la probabilité du processus qui transforme la particule de l'espèce k en une particule de l'espèce i (on tient également compte du cas $k = i$) du domaine d'énergie E' dans le domaine d'énergie E.

Les équations de transfert (15.51) sont suffisamment compliquées, ce qui justifie la discussion de divers cas particuliers. A titre d'exemple, on peut donner le passage à l'équation de diffusion(15.52), où tous les autres termes sont omis. On peut généralement admettre encore une simplification dans l'analyse de la composition chimique des noyaux qui, sans être aussi importante, est pour autant essentielle. Dans les transformations nucléaires de l'espace interstellaire (si on néglige les collisions inélastiques avec production des mésons, etc.) l'énergie par nucléon $\epsilon = E/A$ est conservée. C'est pourquoi il serait raisonnable de passer de la variable E à la variable ϵ dans laquelle

$$P_i^k(E', E) = P_i^k \delta(\epsilon - \epsilon') \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_i = \sum_{k<1} P_i^k N_k(\mathbf{r}, t, \epsilon)$$

(cf. (15.58)). Ici l'indice $k < i$ indique que les noyaux de l'espèce i ne peuvent apparaître que par désintégration des noyaux plus lourds, tels que leur indice k soit considéré par convention inférieur à i. D'autre part, pour les noyaux relativistes, les pertes d'énergie sont relativement faibles (il s'agit surtout des pertes par ionisation) et peuvent être négligées. Finalement, on aboutit aux équations qui sont largement utilisées en analyse de la composition chimique des rayons cosmiques

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \operatorname{div}(D_i \nabla N_i) = Q_i(\mathbf{r}, t) - P_i N_i + \sum_{k<i} P_i^k N_k, \tag{15.59}$$

où dans Q_i on a omis la variable ϵ; on peut procéder de la sorte par rapport à $N_i(\mathbf{r}, t, \epsilon)$; bien entendu, si l'on tient compte des pertes continues, en ajoutant au premier membre de (15.59) le terme $\frac{\partial}{\partial E}(b_i N_i)$, il faut admettre en général que $Q_i = Q_i(\mathbf{r}, t, \epsilon)$ et $N_i = N_i(\mathbf{r}, t, \epsilon)$.

Il est parfois commode d'exprimer la longueur du parcours libre l_i (cf. (15.57)) en g/cm²; de plus $l_i = \frac{1}{\sigma_i N}$ cm $= \frac{M}{\sigma_i}$ g/cm², où $M = \rho/N$ est la masse moyenne des noyaux dans le gaz interstellaire de densité ρ et de concentration des noyaux (ou des atomes) N. On adopte d'ordinaire que, dans le gaz interstellaire, le taux des noyaux d'hydrogène est de 90 % et d'hélium, 10 %, les autres noyaux pouvant être négligés. Les valeurs de σ_i et l_i pour les noyaux de l'espèce (groupe) i se déplaçant dans l'hydrogène et le gaz interstellaire de composition susmentionnée sont consignées sur le tableau 15.2 (cf. également le tableau 15.1)

Il faut avoir en vue que la longueur du parcours l_i caractérise la sortie du noyau de l'espèce i du flux de telles particules indépendamment de la forme du noyau qu'il devient. En classant les noyaux suivant les groupes, il faut tenir compte de leurs transformations qui les laissent au sein du groupe concerné. La longueur efficace du parcours correspondante $\lambda_i = l_i\,(1 - P_i^i)$, où P_i^i est la probabilité de la production d'un noyau du groupe i à partir d'autres noyaux de ce même groupe. Il en résulte, par exemple, pour les noyaux du groupe M du gaz interstellaire : $\lambda_i = 7{,}8$ g/cm² pour $l_i = 6{,}9$ g/cm². D'ailleurs, il ne faut pas prêter à ces grandeurs une importance particulière, puisque les données du tableau 15.2 n'ont qu'une valeur approchée.

Dans les collisions avec les noyaux du gaz interstellaire (de section σ_i) les protons relativistes perdent en moyenne 1/3 de son énergie; c'est pourquoi sur le parcours

$$\lambda_E = 1/\sigma_E N \approx 180 \text{ g/cm}^2 \approx 10^{26}/N \text{ cm } (\sigma_E \sim 10^{26} \text{ cm}^2)$$

l'énergie des protons devient $e = 2{,}72$ fois plus faible. Une approximation grossière permet de dire que l'énergie des protons non

Tableau 15.2

Groupe de noyaux	Poids atomique moyen $\bar{A}$	Section $\sigma \cdot 10^{26}$, cm²		Longueur du parcours l_i, g/cm²	
		hydrogène	gaz interstellaire	hydrogène	gaz interstellaire
p	1	2,3	3	74	72
α	4	9,3	11	18	20
L	10	23	25	7,3	8,7
M	14	29	31	5,8	6,9
H	31	48	52	3,5	4,2
Fe	56	73	78	2,3	2,8

relativistes est régie par la loi (N est la concentration des noyaux dans le gaz interstellaire)

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{nucl}}=\frac{cE}{\lambda_E}=\sigma_E cNE\approx 3\cdot 10^{-16}NE. \qquad (15.60)$$

Comparons ces pertes dans l'hydrogène avec les pertes par ionisation des protons dans l'hydrogène atomique (cf. (15.28) à $Z=1$). Il est évident que

$$\eta_{\text{nucl. }i}=\frac{(dE/dt)_{\text{nucl}}}{(dE/dt)_i}\sim 40\frac{E/Mc^2}{4\ln(E/Mc^2)+20{,}2}. \qquad (15.61)$$

Ainsi, déjà pour $E\sim 10\ Mc^2\sim 10^{10}$ eV, les pertes nucléaires sont sensiblement plus élevées que les pertes par ionisation. Aussi, pour la partie principale des rayons cosmiques (mais non dans le domaine de faibles énergies $\epsilon_c \lesssim M_pc^2\sim 10^9$ eV), les pertes par ionisation peuvent être négligées, alors que les pertes nucléaires de (15.59) sont-elles évaluées par le terme P_iN_i (il serait plus correct de rapporter ces pertes au nombre de « catastrophiques » et la formule (15.60) peut être utilisée seulement pour évaluer les pertes moyennes pendant une grande durée de temps).

Les méthodes de résolution du système (15.59) sont discutées au chapitre 5 de [39] (cf. également [192, 193a, 195]) et nous ne nous attarderons pas à les examiner. Constatons seulement que le problème se résout ordinairement en introduisant plusieurs hypothèses supplémentaires: on admet que le problème est stationnaire (en rejetant la dérivée $\partial N_i/\partial t$), on pose que le coefficient de diffusion D_i est constant ou l'on envisage plusieurs régions dans l'espace et plusieurs domaines d'énergie en assurant un « raccord » des solutions aux frontières; l'intensité des sources Q_i se met sous la forme Q_i ($\mathbf{r}$, $t\epsilon$) $=$ $= q_i\chi$ ($\mathbf{r}$, t, ϵ), etc. Ensuite, il faut concrétiser le modèle: donner la distribution spatiale de l'intensité des sources Q_i, la région de « capture » des rayons cosmiques (disque, halo), etc.

Le cas limite de la simplification toujours plus grande du problème et du modèle peut être constitué par le modèle homogène souvent employé pour déterminer la composition chimique des rayons cosmiques. Un tel modèle admet que la diffusion est assez rapide et, par suite, la concentration des rayons cosmiques dans le système tout entier (la Galaxie) est constante. Mais, dans ces conditions, il faut donner, certes, une certaine durée de vie des rayons cosmiques dans le système déterminée par la vitesse de leur sortie de ce système. Autrement dit, les termes $\partial N_i/\partial t$ — div $(D_i\nabla N_i)$ de (15.59) sont remplacés par $N_i/T_{\text{r.c.}i}$ (le plus simple, pour obtenir un tel système, est de rejeter le terme qui traduit la diffusion et poser $\partial N_i/\partial t =$ $= N_i/T_{\text{r.c.}i}$). Alors, le système (15.59) peut s'écrire (modèle homogène)

$$\frac{N_i}{x}=q_i-\sigma_iN_i-\sum_{k<i}\sigma_{ik}N_k, \qquad (15.62)$$

où $x = c\rho T_{r.c.}$ est l'épaisseur du gaz interstellaire traversé par les rayons cosmiques (on admet que les particules sont relativistes, et donc leur vitesse $v = c$; pour simplifier on pose que le temps $T_{r.c.i} = T_{r.c.}$, c.-à-d. ne dépend pas du noyau i), et σ_i ainsi que σ_{ik} sont les sections respectives (cf. (15.57) et la détermination des grandeurs $P_i^k = \sigma_{ik}vN$; puisque nous déterminons selon l'usage l'épaisseur x_i en g/cm^2 et de ce fait introduisons la densité $\rho = MN$ g/cm^3, les sections de (15.62) représentent des quotients de sections ordinaires par la masse du « noyau moyen » dans le gaz M).

Puisque dans (15.62) q_i caractérise l'intensité des sources des rayons cosmiques, il est clair que $q_i \geqslant 0$; qui plus est, pour les noyaux peu abondants (en particulier, pour les noyaux du groupe L, c.-à-d. pour Li, Be, B) on peut adopter que $q_i = 0$. (15.62) est un système algébrique et sa résolution est assez simple; toute la difficulté réside dans l'insuffisance des renseignements sur les sections σ_i et σ_{ik}, et encore plus, dans l'insuffisance des données exactes sur la composition chimique (et, d'autant plus, isotopique) des rayons cosmiques au voisinage de la Terre. Actuellement, le modèle homogène (15.62) décrit assez bien la composition chimique des rayons cosmiques d'énergie $\mathcal{E}_c \gtrsim 1 - 2$ GeV/nucléon pour $x_i = x \approx 5$ g/cm^2 (cf. [192, 193a, 195]).

Ainsi,

$$T_{r.c} = \frac{x}{\rho c} = \frac{x}{cMN} \approx \frac{4 \cdot 10^6}{N} \text{ années,} \tag{15.63}$$

où N est la concentration du gaz (des noyaux de masse moyenne $M \sim 2 \cdot 10^{-24}$ g) dans la région occupée par les rayons cosmiques. Dans le modèle à disque, les valeurs moyennes $N \sim 0{,}3$ à 1, et dans le modèle à halo, $N \sim 1$ à $3 \cdot 10^{-2}$ cm^{-3}; finalement, les valeurs correspondantes ne contredisent pas les estimations (15.55) *). Mais il y a une chose plus importante: la composition chimique est déterminée en premier lieu par l'épaisseur x et c'est pourquoi les données sur la composition chimique ne rendent pas possible l'obtention immédiate de la durée de vie $T_{c.r.}$. Il est vrai que dans des modèles plus raffinés qui tiennent compte de la diffusion, la durée de vie définie par le coefficient de diffusion $D_i(E)$ est plus importante,

---

*) La durée de vie nucléaire caractéristique de la composante protonique des rayons cosmiques (cf. (15.60)) est

$$T_{\text{nucl}} \sim \frac{E}{|(dE/dt)_{\text{nucl}}|} \sim \frac{3 \cdot 10^{15}}{N}. \tag{15.60a}$$

Même pour le disque de gaz avec $N \sim 1$ cm^{-3} de temps $T_{\text{nucl}} \sim 10^8$ années $\gg T_{\text{r.c.disque}}$, et avec $N \sim 10^{-2}$ cm^{-3} déjà $T_{\text{nucl}} \sim 10^{10}$ années $\gg T_{\text{r.c.halo}} \sim 1$ à $3 \cdot 10^8$ années. On en tire que la durée de vie des rayons cosmiques $T_{\text{r.c}}$ est en effet définie par leur sortie de la Galaxie et non par les pertes (ceci ne se rapporte pas en général aux noyaux suffisamment lourds; cf. tableau 15.2).

mais la précision de toutes les données est encore insuffisante pour résoudre le problème. Une voie plus prometteuse est celle qui évalue le rôle des noyaux radioactifs faisant partie des rayons cosmiques (l'exemple le plus connu est celui du noyau ^{10}Be pour lequel la durée de vie moyenne du noyau est de $\tau = 2{,}2 \cdot 10^6 \, E/Mc^2$ années, où le facteur E/Mc^2 rend compte du ralentissement relativiste du temps). (15.62) ne tient pas compte de la décomposition radioactive ; pour combler cette lacune, dans le cas d'un noyau radioactif, le premier membre doit être la somme $N_i/x_i + N_i/c\rho\tau_i$. En calculant la concentration des noyaux radioactifs N_i par rapport à celle de la série de noyaux stables on peut, en principe, trouver aussi bien $x_i = c\rho T_{\text{r.c.}\, i}$ que $c\rho\tau_i$ et par là même obtenir $T_{\text{r.c.}\, i}$ et la densité moyenne du gaz ρ dans la région occupée par les rayons cosmiques. Malheureusement, sous ce rapport on n'a pas encore obtenu de résultats quelque peu sûrs (pour plus de détails, cf. [193a]).

Concrétisons maintenant les équations de transfert (15.51) pour le cas des électrons et des positrons. A cet effet, il faut évidemment admettre que dans (15.51) $N_i = N_e(\mathbf{r}, t, E)$ ou si l'on introduit la notation séparée, N_{e^-} pour les électrons et N_{e^+} pour les positrons. Des simplifications s'obtiennent sous l'hypothèse que le problème est stationnaire (on rejette la dérivée $\partial N_e/\partial t$) ou en négligeant les pertes d'énergie « catastrophiques ». Alors on a

$$-\operatorname{div}(D_e \nabla N_e) + \frac{\partial}{\partial E}(b_e(E) N_e) = Q_e(\mathbf{r}, E). \qquad (15.64)$$

Le terme Q_e doit rendre compte des électrons et (ou) des positrons produits non seulement par accélération mais aussi par désintégration de toute sorte de particules instables (mésons $\mu^\pm$, etc.) produites par les collisions nucléaires des rayons cosmiques dans le gaz (on peut y rapporter également les électrons δ et les paires électron-positron produites par les rayons gamma). Dans l'équation de la forme (15.64), il faut également introduire un terme rendant compte de leur annihilation.

Ce qui distingue le plus la composante électronique de la composante protono-nucléaire des rayons cosmiques c'est en général la nécessité de tenir compte des pertes d'énergie par les électrons. C'est la raison pour laquelle la variable E de l'équation (15.64) n'est pas conservée comme paramètre comme c'est le cas des équations (15.59) et (15.62).

L'intégration de (15.64) permet d'obtenir le spectre des électrons $N_e(\mathbf{r}, t, E)$. Si on le connaît à l'échelle de la Galaxie, on peut calculer l'intensité du rayonnement radio synchrotron reçu sur la Terre. Il en est de même, certainement, pour le rayonnement radio des enveloppes des supernovae, des radiogalaxies, etc. Nous n'effectuerons pas les calculs correspondants (cf. la traduction anglaise de [39] et surtout [193a, 196]) en nous bornant à décrire les

processus physiques dont il faut tenir compte. L'accélération des électrons dans les sources et la production des électrons et des positrons *secondaires* par la composante protono-nucléaire des rayons cosmiques détermine la puissance des sources Q_i (**r**, E). L'énergie des électrons diminue sous l'effet des pertes par ionisation, par rayonnement de freinage, par rayonnement synchrotron et par effet Compton ; toutes ces pertes ont leur part dans le coefficient $b_e(E)$ de (15.64).

Les pertes par ionisation ont été étudiées plus haut (cf. (15.23)), les pertes par freinage magnétique ont été discutées au chapitre 4 ; les pertes par rayonnement de freinage et par effet Compton seront envisagées au chapitre 16. Mais il serait peut-être utile de comparer directement toutes ces formes de pertes pour le cas des électrons ultra-relativistes.

Pertes par ionisation.

Dans l'hydrogène atomique,

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_i=\frac{2\pi e^4 N}{mc}\left(\ln\frac{E^3}{mc^2\mathcal{J}^2}-0{,}57\right)=$$
$$=7{,}62\cdot 10^{-9}N\left\{3\ln\frac{E}{mc}+20{,}2\right\}\ \mathrm{eV/s}. \quad (15.23a)$$

Dans le gaz ionisé

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_i=\frac{2\pi e^4 N}{mc}\left(\ln\frac{m^2c^2E}{4\pi e^2\hbar^2N}-3/4\right)=$$
$$=7{,}62\cdot 10^{-9}N\left\{\ln\frac{E}{mc^2}+73{,}4\right\}\ \mathrm{eV/s}. \quad (15.24)$$

Pertes par rayonnement de freinage (par radiation).

Dans le gaz atomique interstellaire (cf. (16.48))

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_r=10^{-15}N_aE\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{s}}=5{,}1\cdot 10^{-10}N_a\frac{E}{mc^2}\ \mathrm{eV/s}.$$

Dans le gaz complètement ionisé (cf. (16.46))

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_r=7\cdot 10^{-11}N\left(\ln\frac{E}{mc_2}+0{,}36\right)\frac{E}{mc^2}\ \mathrm{eV/s}$$

($N = N_a$ est la concentration des noyaux ou des électrons).

Pertes par freinage magnétique et par effet Compton.

$$-\left\{\left(\frac{dE}{dt}\right)_m+\left(\frac{dE}{dt}\right)_C\right\}=\frac{32\pi}{9}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2c\left(\frac{H^2}{8\pi}+w_{\mathrm{ph}}\right)\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2=$$
$$=1{,}65\cdot 10^{-2}\left(\frac{H^2}{8\pi}+w_{\mathrm{ph}}\right)\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2\ \mathrm{eV/s}. \quad (15.65)$$

Une partie de cette dernière expression associée aux pertes par freinage magnétique est proportionnelle à H^2 et s'obtient de la formule (4.39) sous l'hypothèse d'une orientation chaotique du champ

magnétique ; donc $H_\perp^2 = 2/3\ H^2$. Le deuxième membre de cette expression correspond aux pertes par effet Compton dans un champ de rayonnement isotrope à densité de l'énergie w_{ph} (la grandeur $H^2/8\pi + w_{ph}$) de (15.65) se mesure en ergs/cm³) ; on n'examine ici que le domaine des énergies des électrons $E \ll \frac{mc^2}{\epsilon_{ph}} mc^2$, où ϵ_{ph} est l'énergie moyenne des photons (pour plus de détails cf. chapitre 16)

Par exemple, pour un gaz ionisé, on a

$$\eta_{r,i} = \frac{(dE/dt)_r}{(dE/dt)_i} = \frac{1{,}8\cdot 10^{-8}\,(\ln(E/mc^2)+0{,}36)\,E}{\ln(E/mc^2)-\ln N+73{,}4}. \quad (15.66)$$

Même dans le gaz métagalactique $N \sim 10^{-5} - 10^{-6}$ cm^{-3} et, par conséquent, $|\ln N| < 15$. C'est pourquoi $\eta_{r,i} \lesssim 1$ pour $E \lesssim 7\cdot 10^8$ eV. Avec $E > 10^9$ eV les pertes par freinage prédominent sur les pertes par ionisation.

Le rapport des pertes par freinage magnétique et par effet Compton, d'une part, et les pertes par freinage, de l'autre, s'écrit

$$\eta_{mc,r} = \frac{(dE/dt)_m + (dE/dt)_C}{(dE/dt)_r} \approx \frac{3\cdot 10^7}{N}\left(\frac{H^2}{8\pi} + w_{ph}\right)\frac{E}{mc^2}. \quad (15.67)$$

Dans la Galaxie (dans le disque) $H^2/8\pi \sim 10^{-12}$ erg/cm³ et $w_{ph} \sim 10^{-12}$ erg/s (pour le seul rayonnement thermique cosmologique à température $T = 2{,}7$ °K la densité $w_{ph} = 4\cdot 10^{-13}$ erg/cm³) ; la Galaxie, surtout le disque, contiennent également beaucoup de photons optiques émis par les étoiles. C'est pourquoi dans le disque de gaz (pour $N \sim 1$ cm^{-3}), $\eta_{mc,r} \sim 3\cdot 10^{-5}\ E/mc^2 \gg 1$ pour $E \gg 10^{10}$ eV, alors que dans le halo (pour $N \sim 10^{-2}$ cm^{-3}), $\eta_{mc,r} \gg 1$ pour $E \gg 10^8$ eV. Ainsi, même dans le disque radio, sans rien dire du halo, le rôle essentiel, pour la composante électronique dans le domaine des énergies $E \gg 10^8 - 10^9$ eV qui nous intéresse le plus, revient aux pertes par freinage magnétique et par effet Compton. Il faut ajouter à ceci que les pertes par freinage appartiennent au fond aux pertes « catastrophiques », elles s'accompagnent essentiellement de l'émission des photons d'énergie $\hbar\omega \sim E$. Finalement l'électron « sort » tout simplement du jeu. Pour ces pertes, le temps caractéristique moyen T_r (cf. plus loin (16.48)) vaut

$$T_r \sim \frac{E}{|(dE/dt)_r|} \sim \frac{10^{15}}{N} \text{ s.} \quad (15.68)$$

Même pour $N \sim 1$ cm^{-3} le temps est $T_r \sim 3\cdot 10^7$ années, ce qui est inférieur au temps de pérégrinations des électrons dans le disque de gaz. Pour $N \sim 10^{-2}$ cm^{-3}, le temps T_r est déjà si grand (par rapport à $T_{r.c} \leqslant 1 - 3\cdot 10^8$ années) que les pertes par freinage ne jouent aucun rôle. Pour calculer le spectre électronique de la Galaxie, on ne tient donc généralement compte que des pertes d'énergie par freinage magnétique et effet Compton.

Nous arrivons ici à la fin du présent chapitre consacré à certaines questions de l'astrophysique des rayons cosmiques. A la différence des autres chapitres, nous y avons prêté une attention particulière aux matières descriptives, astrophysiques au fond, ce qui a réduit la place prévue pour les questions théoriques. Il nous a fallu procéder de cette façon du fait que, dans les cours de physique théorique et générale, l'information astrophysique n'existe pratiquement pas. Cependant, si on n'en fait pas état, si on ne l'utilise pas, il ne peut être question d'aucune astrophysique des rayons cosmiques et il n'y aurait que des résultats purement physiques qu'on peut appliquer en particulier aux rayons cosmiques. Mais le choix des matières perd alors sa détermination et l'astrophysique, son caractère particulier. Or, ce caractère particulier, nous voudrions le conserver. Dans les deux derniers chapitres nous maintiendrons cette tendance bien qu'elle ne soit pas aussi nettement suivie.

CHAPITRE 16

ASTRONOMIE DES RAYONS X

Processus qui déterminent la production des rayons X et gamma. Détermination des grandeurs utilisées dans l'astronomie des rayons X et gamma. Rayonnement de freinage des rayons X du gaz ionisé non relativiste (plasma). Rayonnement de freinage des électrons relativistes et pertes d'énergie par freinage. Diffusion des électrons relativistes sur les photons (effet Compton inverse). Pertes d'énergie par effet Compton. Rayonnement synchrotron des rayons X. Notes sur la comparaison de la théorie avec les observations

« De par eux-mêmes » (c.-à-d. si on ne s'intéresse pas à leur interaction avec la matière) les rayons X et gamma non seulement ne se distinguent que par leur longueur d'onde, mais encore « voisinent » dans le sectre des ondes électromagnétiques *). C'est pourquoi il serait raisonnable de commencer la discussion de processus de production des rayonnements X et gamma sans répartir ces rayonnements susivant des gammes d'ondes. Dénombrons donc d'abord ces processus.

Au préalable, il est vrai, il serait opportun de noter que la longueur du libre parcours ou le coefficient d'absorption même des rayons gamma durs, sans parler des photons plus mous, ne dépasse pas environ 100 g/cm². Il est donc clair que les rayonnements X et gamma cosmiques qui atteignent la Terre ne peuvent être issus des régions à densité très élevée, du sein des étoiles à neutrons, par exemple. Cela rend donc clair aussi que les processus d'émission et d'absorption des photons qu'on étudie en astronomie des rayons X et gamma sont pour ainsi dire de caractère usuel pour la physique atomique et nucléaire. Autrement dit, nous n'aurons pas à examiner ici des mécanismes inédits, encore inconnus d'émission et d'absorption. Quant au caractère particulier qui se manifeste dans l'astronomie des rayons X et gamma, il est dû en premier lieu au fait qu'en laboratoire on étudie généralement la diffusion des photons durs sur les électrons lents, alors que, dans l'espace, un grand rôle revient à la diffusion des électrons de haute énergie sur des photons optiques et radio. Il existe assurément d'autres particularités encore, mais quels que soient les cas connus, ils concernent les situations con-

---

*) Convenons d'appeler rayons X les photons d'énergie $100 < E\Gamma_X < 10^5$ eV (longueur d'onde $\lambda \approx 12\,400/(E_X\ (\text{eV}))$ Å environ de 100 à 0,1 Å. Pourtant le rayonnement émis par les noyaux atomiques, même avec $E_X \equiv E_\gamma < 10^5$ eV, s'appelle également d'après l'usage rayons gamma. L'énergie des photons X et gamma est notée ci-dessous E_X et E_γ, mais parfois par E_γ on entend l'énergie de tout photon dur (dans les domaines X et gamma).

crètes ou les paramètres caractéristiques du problème et ne touchent pas au fond même des processus élémentaires envisagés. Par conséquent, on peut estimer que tout est clair tant qu'il s'agit des processus élémentaires importants pour l'astronomie des rayons X et gamma.

Voici les processus qui sont à l'origine de ces rayons.

1. Rayonnement de freinage des électrons et des positrons (dans ce qui suit, sauf des exceptions connues, les positrons ne seront pas mentionnés à part).

On a en vue ici les collisions des électrons avec les noyaux de toute sorte, ainsi qu'avec d'autres électrons, dans lesquelles l'électron incident et l'électron diffusé appartiennent au spectre continu, alors que l'état de la particule diffusante, si on n'evisage pas le recul, reste invariable.

Une particule d'énergie cinétique E_c peut émettre un photon de freinage seulement d'énergie $E_{X,\gamma} \leqslant E_c$ (pour simplifier on a en vue la collision avec une particule au repos suffisamment lourde; en tenant compte du recul, $E_{X,\gamma} < E_c$). Ceci rend clair que le mécanisme de freinage des électrons non relativistes leur permet de produire seulement des rayons X. Les électrons relativistes sont capables également de produire des photons gamma. Pour les protons et les noyaux relativistes de masse M, l'intensité du rayonnement de freinage sur les noyaux est $(M/m)^2 \geqslant 3{,}4 \cdot 10^6$ fois plus petite que pour les électrons de même énergie totale. C'est pourquoi on a toutes les raisons de se borner à l'estimation du rayonnement de freinage des électrons. On peut aussi admettre que le rayonnement de freinage est un rayonnement qui s'accompagne de la naissance des électrons et des positrons sous l'effet de la décomposition $\pi^\pm \to \mu^\pm \to e^\pm$, ainsi que le rayonnement qui apparaît lors de la production des électrons δ (électrons de recul).

Dans ce qui suit, nous ne nous proposons nullement d'envisager tous les aspects de la théorie du rayonnement de freinage. Nous examinerons seulement deux cas: le rayonnement de freinage du plasma non relativiste à l'état d'équilibre et le rayonnement de freinage des électrons relativistes.

2. Rayonnements X de recombinaison et caractéristique qui apparaissent lors des transitions d'un électron d'un niveau dans le spectre continu au niveau atomique ou lors de sa transition d'un niveau atomique à un autre.

D'après la terminologie astrophysique, il s'agit des transitions libre-liée ou liée-liée de l'électron, alors que le rayonnement de freinage correspond aux transitions libre-libre. Dans le présent chapitre, les processus du type 2 ne seront abordés que sommairement.

3. Diffusion Compton des électrons relativistes sur les photons X optiques et radio.

Ce processus a été déjà mentionné (cf., par exemple, chapitre 15).

Les relations entre les énergies des particules incidentes et diffusées peuvent être différentes, mais nous n'examinerons que le cas

$$E > E_\gamma \gg \epsilon_{ph}, \qquad (16.1)$$

où dans le système « du laboratoire », c.-à-d. lié à la Terre et à la Galaxie, E, E_γ et ϵ_{ph} sont les énergies de l'électron primaire, du photon γ ou X diffusé et du photon primaire respectivement; dans la plupart des cas, l'énergie ϵ_{ph} concerne le rayonnement optique ($\epsilon_{ph} \sim 1$ eV) ou le rayonnement radio thermique cosmologique ($\epsilon_{ph} \sim 10^{-3}$ eV, $\lambda \sim 1$ mm), mais la diffusion des électrons sur les rayons X cosmiques eux aussi (dans ce cas, $\epsilon_{ph} \sim 10^2$ à 10^4 eV et la diffusion conduit à l'apparition des rayons gamma) et sur les photons radio, disons d'origine synchrotron (dans ces conditions, $\epsilon_{ph} \sim 10^{-5}$ à 10^{-7} eV; $\lambda \sim 10$ cm à 10 m et la diffusion conduit à la production des photons X et optiques), est tout aussi intéressante.

La diffusion des protons et des noyaux relativistes sur les photons est sensiblement moins efficace (le facteur $(m/M)^2 \leqslant 3\cdot 10^{-7}$) apparaît par rapport à la section de diffusion des électrons) et dans tous les cas connus peut pratiquement être négligée. Le rayonnement Compton est examiné dans le présent chapitre.

4. Rayonnement synchrotron.

Par commodité, écrivons encore une fois la formule (5.40a) de la fréquence caractéristique ν_m émise par un électron d'énergie $E \gg mc^2$ dans un champ magnétique

$$\nu_m = 1{,}2\cdot 10^6 H_\perp \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 = 4{,}6\cdot 10^{-6} H_\perp (E\,(\mathrm{eV}))^2\,\mathrm{Hz}. \qquad (16.2)$$

On voit aisément que, dans les champs $H_\perp \leqslant 10^{-3}$ Oe, le rayonnement de fréquence $\nu_m \sim 10^{18}$ s^{-1} ($\lambda_m = c/\nu_m \sim 3$ Å) est émis avec $E \gtrsim 10^{13}$ eV; le rayonnement de $\lambda \leqslant 0{,}1$ Å (rayons gamma) ne serait émis qu'avec $E \gtrsim 10^{14}$ eV. Ainsi, dans les galaxies, les radiogalaxies et dans la majorité des enveloppes des supernovae, le rayonnement synchrotron X et gamma ne peut apparaître qu'en présence des électrons de très haute énergie. Cette circonstance délimite manifestement les possibilités du mécanisme synchrotron dans le cas des photons durs. Il suffit de dire que les électrons d'énergie $E \gtrsim 10^{13}$ eV dans le champ $H_\perp \sim 10^{-3}$ Oe perdent la moitié de leur énergie en un temps $T_m = \frac{5{,}1\cdot 10^8 mc^2}{H_\perp^2 E}$ s $\leqslant 1$ année (cf. (4.42)). Dans les étoiles, les quasars (au voisinage de leur noyau) et peut-être dans certaines régions des enveloppes des supernovae (surtout près des pulsars) peuvent exister des champs magnétiques assez forts. Dans ces conditions évidemment, le rayonnement X synchrotron est produit par les électrons d'énergie plus faible. Ainsi, par exemple, avec $H_\perp \sim 10^2$ Oe, la fréquence $\nu_m \sim 10^{18}$ s^{-1} pour les électrons d'énergie $E \sim 5\cdot 10^{10}$ eV; de plus, pourtant, $T_m \sim 1$ s.

En vertu de ce qui vient d'être dit, il semble que l'existence des rayonnements synchrotrons X et gamma est relativement peu probable (à l'exception des pulsars et, en général, des sources compactes: naines blanches, étoiles à neutrons, « trous noirs »). Mais en fait cette conclusion est très conventionnelle, puisqu'il existe des conditions dans lesquelles l'accélération des électrons ou leur injection dans une région étendue à champ assez fort sont très efficaces. Un exemple peut en être fourni par la Nébuleuse du Crabe dont le rayonnement X est de nature synchrotron (ceci a été prouvé il n'y a pas longtemps par la mesure de la polarisation du rayonnement). Le rôle de l'injecteur efficace des électrons est assumé ici directement ou par le biais par le pulsar NP 0532 qui se trouve au sein de la Nébuleuse. Ainsi, le rayonnement synchrotron X cosmique est enregistré par observation et certainement son rôle est très important (il faut constater d'ailleurs que ce rôle ne cesse de croître à mesure de l'accumulation des données). Nous en reparlerons encore de ce rayonnement.

5. Décomposition des mésons π neutres en deux photons gamma ($\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$).

L énergie de repos des mésons π^0 vaut $m_\pi c^2 = 135$ MeV; par conséquent, les mésons π^0 ne sont produits que par des rayons cosmiques. Leur naissance est due essentiellement aux collisions p-p et p-α ou α-p (p est le proton, α, le noyau d'hélium).

D'ailleurs, la photoproduction des mésons π^0 s'observe également lorsque les énergies sont assez grandes, dans les collisions des rayons cosmiques avec les photons (radio, optiques et X) de l'espace cosmique. L'expression générale du seuil de la photoproduction E_{min} des particules de masse au repos m_π dans les collisions d'un noyau (énergie totale $E \gg Mc^2$, masse au repos $M = AM_p$) avec un photon d'énergie ϵ_{ph} est de la forme *)

$$E_{min} = \frac{2M + m_\pi}{4\epsilon_{ph}} m_\pi c^4 = \epsilon_{ph,\,0} \frac{Mc^2}{2\epsilon_{ph}}, \qquad (16.3)$$

*) Les valeurs des seuils de production des particules s'obtiennent comme on sait, à partir des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion. De nos jours, il est d'usage de simplifier les calculs correspondants en utilisant les quadrivecteurs. Ainsi, obtenons l'expression (16.3) en désignant les quadrivecteurs correspondants de la particule incidente, du méson π et du photon par

$$p_i = \{\mathbf{p},\ iE/c\}, \quad \pi_i = \{\boldsymbol{\pi},\ iE_\pi/c\}, \quad k_i = \{\mathbf{k},\ i\epsilon_{ph}/c\},$$
$$p_i^2 = p^2 - E^2/c^2 = -M^2c^2, \quad \pi_i^2 = -m_\pi^2 c^2, \quad k_i^2 = 0$$

(il existe d'autres notations, par exemple $p^i = (E/c;\ \mathbf{p})$; cf. [6]). La loi de conservation de l'énergie et de l'impulsion dans la photoproduction du méson π est de la forme $k_i + p_{1,i} = p_{2,i} + \pi_i$. En élevant cette relation au carré et en tenant compte des notations ci-dessus, on obtient $-M^2c^2 + 2k_ip_{1,i} = (p_{2,i} + \pi_i)^2$. Mais au seuil de la photoproduction $(p_{2,i} + \pi_i)^2 = -(M + m_\pi)^2 c^2$, puisque dans le calcul de cette grandeur on peut utiliser tout système de référence, alors que dans le système du centre de masse, au seuil de la

où

$$\epsilon_{ph,\,0} = \frac{(2M + m_\pi)}{2M} m_\pi c^2 \approx m_\pi c^2 \qquad (16.4)$$

est le seuil de la photoproduction du méson π sur le noyau au repos de masse M. Le seuil ϵ_{ph} de la photoproduction des mésons π^0_{ph} sur les nucléons au repos est d'environ 150 MeV ; par conséquent, l'énergie des protons cosmiques producteurs des mésons π^0, par exemple, sur les photons optiques de $\epsilon_{ph} \sim 1$ eV doit dépasser l'énergie $E_{min} \approx 150 \frac{M_p c^2}{2\epsilon_{ph}}$ MeV $\sim 10^{17}$ eV. Pour $\epsilon_{ph} \sim 10^{-3}$ eV (rayonnement cosmologique), $E_{min} \sim 10^{20}$ eV. C'est précisément de tels processus de photoproduction qui en général doivent « couper » le spectre des rayons cosmiques à $E_{min} \gtrsim 10^{19} - 10^{20}$ eV.

Les rayons gamma ne se forment certainement pas seulement par décomposition des mésons π^0, mais aussi par celle d'autres particules instables. Leur production fera l'objet d'étude du chapitre 17.

6. Annihilation des électrons et des positrons ($e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$).

Dans l'espace, il existe toujours une certaine quantité de positrons du fait qu'ils sont produits par décomposition $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \rightarrow e^+$ et par plusieurs autres processus. Il convient de distinguer l'annihilation des positrons relativistes, ou en tout cas des positrons rapides en mouvement, et celle des positrons au repos (lents). Dans le premier cas il se forme des rayons gamma au spectre continu ou très large. Dans le deuxième cas (annihilation des positrons fixes) le rayonnement gamma est monochromatique ($E_\gamma = mc^2 = 0{,}51$ MeV) et d'après cet indice peut en principe être dégagé sur le fond du spectre continu.

Le rayonnement gamma produit par l'annihilation antiprotons-protons ou par d'autres particules-antiparticules pratiquement ne peut jouer aucun rôle s'il ne s'agit pas des régions hypothétiques où la matière et l'antimatière sont en contact. Selon nous l'existence de telles régions est très peu probable et en tout cas, il n'existe pas à cet effet des indications suffisamment sûres (pour plus de détails, cf. [205, 206]).

7. Rayons gamma nucléaires produits par les transitions radiatives dans les noyaux atomiques.

---

naissance, il y a la particule et le méson π au repos. Ensuite, pour le photon et la particule qui se déplacent l'un à la rencontre de l'autre,

$$2k_i p_i = -2\frac{\epsilon_{ph}}{c}|p_1| - 2\frac{\epsilon_{ph}E}{c^2} \approx -4\frac{\epsilon_{ph}E_1}{c^2},$$

où la dernière expression se rapporte au cas $E_1 \gg Mc^2$. Ainsi, nous amenons tout de suite l'expression (16.3) pour $E_1 = E_{min}$. Pour la photoproduction sur une particule au repos, $2k_i p_i = -2\epsilon_{ph}M$ et on obtient la formule (16.4) pour $\epsilon_{ph} = \epsilon_{ph,0}$.

L'excitation des noyaux dans les atmosphères des étoiles et pendant les explosions (du type des explosions des supernovae) qui est à l'origine du rayonnement gamma résulte des réactions nucléaires et des collisions avec les particules rapides. Dans les espaces interstellaire et intergalactique l'agent excitateur est constitué par les rayons cosmiques et subcosmiques. Il importe de souligner que le spectre du rayonnement gamma peut aussi bien être continu que discret (c.-à-d. posséder des raies plus ou moins bien marquées). Ce dernier cas correspond aux réactions nucléaires, lorsque l'excitation concerne les particules lentes (noyaux dans le milieu interstellaire). Mais si le noyau appartenant aux rayons cosmiques est excité par collision, il garde dans les cas courants une grande vitesse et en tenant compte de la contribution des rayons cosmiques d'énergies différentes, son rayonnement gamma tombe dans le spectre continu.

Rappelons maintenant certaines définitions et notations principales (nous nous inspirons ici et dans certaines autres parties du présent chapitre de l'article [207]).

Les mesures portent sur l'une des grandeurs suivantes: intensité $J_\gamma(E_\gamma)$ et flux $F_\gamma(E_\gamma)$ d'après le nombre de photons, ainsi que l'intensité $I_\gamma(E_\gamma)$ et le flux $\Phi_\gamma(E_\gamma)$ d'après l'énergie:

$$\left.\begin{aligned} F_\gamma(E_\gamma) &= \int_\Omega J_\gamma(E_\gamma)\,d\Omega, \quad I_\gamma(E_\gamma) = E_\gamma J_\gamma(E_\gamma), \\ \Phi_\gamma(E_\gamma) &= E_\gamma F_\gamma(E_\gamma) = E_\gamma \int_\Omega J_\gamma(E_\gamma)\,d\Omega. \end{aligned}\right\} \quad (16.5)$$

Ce sont là des intensités et des flux différentiels; par exemple, $J_\gamma(E_\gamma)\,dE_\gamma$ est le nombre de photons d'une énergie qui varie dans l'intervalle E_γ, $E_\gamma + dE_\gamma$ traversant par unité de temps une aire unité normale à l'impulsion des photons et rapporté à l'angle solide unité. Les grandeurs intégrales correspondantes sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} J_\gamma(>E_\gamma) &= \int_{E_\gamma}^{\infty} J_\gamma(E'_\gamma)\,dE'_\gamma, \\ I_\gamma(>E_\gamma) &= \int_{E_\gamma}^{\infty} I_\gamma(E'_\gamma)\,dE'_\gamma = \int_{E_\gamma}^{\infty} E_\gamma J_\gamma(E'_\gamma)\,dE'_\gamma, \\ F_\gamma(>E_\gamma) &= \int_{E_\gamma}^{\infty} F_\gamma(E'_\gamma)\,dE'_\gamma = \int_\Omega \int_{E_\gamma}^{\infty} J_\gamma(E'_\gamma)\,dE'_\gamma\,d\Omega, \\ \Phi_\gamma(>E_\gamma) &= \int_{E_\gamma}^{\infty} \Phi_\gamma(E'_\gamma)\,dE'_\gamma. \end{aligned}\right\} \quad (16.6)$$

Supposons que dans un élément de volume dV de la source des rayons X ou gamma il se forme par unité de temps $q(E_\gamma)\,dE_\gamma dV d\Omega$ photons se déplaçant dans un élément d'angle solide $d\Omega$ et dont l'énergie varie dans les limites E_γ, $E_\gamma + dE_\gamma$. La grandeur $q(E_\gamma)$ s'appelle pouvoir émissif (d'après le nombre de photons). Le pouvoir émissif ε_ν utilisé auparavant (cf., par exemple, (5.52)) est lié à $q(E_\gamma)$ par la relation évidente $E_\gamma q(E_\gamma)\,dE_\gamma = \varepsilon_\nu d\nu$, d'où $q(E_\gamma) = \varepsilon_\nu / h^2\nu$. Si le rayonnement est isotrope, il est commode aussi d'employer le pouvoir émissif dans toutes les directions

$$\tilde{q}(E_\gamma) = 4\pi q(E_\gamma) = \frac{4\pi\varepsilon_\nu}{h^2\nu}. \tag{16.7}$$

Dans l'astronomie gamma on utilise surtout le pouvoir émissff $q(E_\gamma)$, alors que dans l'astronomie X on emploie tout aussi bien le pouvoir émissif ε_ν et en général les quantités énergétiques. Si les rayons X ou gamma sont produits par les rayons cosmiques (ou par d'autres particules) à intensité isotrope $J(E)$, on a

$$\tilde{q}(E_\gamma)\,dE_\gamma = 4\pi q(E_\gamma)\,dE_\gamma = 4\pi N(\mathbf{r})\,dE_\gamma \int_{E_\gamma}^{\infty} \sigma(E_\gamma, E)\,J(E)\,dE. \tag{16.8}$$

Ici $N(\mathbf{r})$ est la concentration des atomes (ou, par exemple, des électrons, des photons mous, etc.) dans la source, et

$$\sigma(E_\gamma, E)\,dE_\gamma = dE_\gamma \int \sigma(E_\gamma, E, \Omega')\,d\Omega' \tag{16.9}$$

est la section de la production des photons par la particule d'énergie E intégrée sur les angles de fuite (d'énergie s'échelonnant sur l'intervalle E_γ, $E_\gamma + dE_\gamma$).

Supposons que la source se trouve à la distance R de l'observateur. Alors le flux de rayonnement issu de la source délimité par l'ouverture $d\Omega$ de l'angle solide est égal à

$$dF_\gamma(E_\gamma) = J_\gamma(E_\gamma)\,d\Omega = d\Omega \int_0^L \frac{\tilde{q}(E_\gamma)}{4\pi R^2} R^2\,dR = d\Omega \int_0^L q(E_\gamma)\,dR \tag{16.10}$$

et

$$J_\gamma(E_\gamma) = \int_0^L q(E_\gamma)\,dR = \tilde{N}(L) \int_{E_\gamma}^{\infty} \sigma(E_\gamma, E)\,J(E)\,dE, \tag{16.11}$$

où

$$\tilde{N}(L) = \int_0^L N(R)\,dR \tag{16.12}$$

est le nombre d'atomes (ou d'autres particules avec lesquelles les rayons cosmiques producteurs de rayons gamma entrent en collision) dans le rayon visuel; dans le cas de l'effet Compton, au lieu de $\tilde{N}(L)$ il faut utiliser le nombre de photons mous $\tilde{N}_{ph}(L) = \int_0^L N_{ph} dR$ sur le rayon visuel. De plus, dans (16.11) on admet que l'intensité des rayons cosmiques est constante sur le parcours L tout entier. On n'a aucune difficulté à rejeter cette hypothèse. Dans le cas des rayons gamma, les intensités $J_\gamma(E_\gamma)$ et $J_\gamma(>E_\gamma)$ sont souvent appelées spectres énergétiques différentiel et intégral des rayons gamma.

Dans le cas des sources discrètes (surtout lorsque leurs dimensions angulaires sont petites) on utilise pour le flux les expressions suivantes:

$$F_\gamma(E_\gamma) = \int_\Omega J_\gamma(E_\gamma)\, d\Omega = \frac{\int q(E_\gamma)\, dV}{R^2} \approx \frac{\tilde{N}_V}{R^2} \int_{E_\gamma}^\infty \sigma(E_\gamma, E)\, J(E)\, dE, \tag{16.13}$$

où l'intégration est faite sur l'angle solide sous lequel on voit la source à la distance R de l'observateur; de plus,

$$\tilde{N}_V = R^2 \int_\Omega \tilde{N}(L)\, d\Omega \approx \int N(\mathbf{r})\, dV \tag{16.14}$$

est le nombre total de particules ou de photons mous de la source.

Passons à l'étude du mécanisme du rayonnement X en commençant par le rayonnement X de freinage du gaz chaud non relativiste (plasma).

Le gaz chaud en partie ou complètement ionisé est une source de rayonnement X de freinage, de recombinaison, des raies (caractéristiques). Lorsque la température est assez élevée (nous expliquerons plus loin ce que cela signifie) le rôle essentiel revient au rayonnement de freinage. D'autant plus si le plasma est d'hydrogène ou d'hydrogène-hélium, il ne peut être en général question du spectre X des raies. Le rayonnement X de freinage est observé dans les « étoiles » X ainsi que dans le spectre du Soleil.

Nous donnerons dans ce qui suit les formules principales relatives au rayonnement X de freinage (pour une approche plus générale, cf. [1, 3, 189, 208, 209]). Outre les problèmes de l'astronomie des rayons X, l'intérêt de ce rayonnement est également grand pour la recherche thermonucléaire et dans le domaine de l'utilisation du plasma chaud en laboratoire comme source puissante de rayons X.

On peut admettre que les électrons assez rapides mais non encore relativistes satisfont aux conditions suivantes:

$$e^2 Z/\hbar v \ll 1, \quad 1/2\, mv^2 \ll mc^2. \qquad (16.15)$$

Etant donné que $e^2/\hbar c = 1/137$, la première condition (16.15) ne sera certainement pas remplie pour les éléments très lourds, mais nous avons en vue le cas des éléments légers. L'énergie totale émise par une collision est égale à (cf. § 25 de [1])

$$W = \int E_\gamma \sigma(E_\gamma, E)\, dE_\gamma = \frac{16 e^6 Z^2}{3mc^3 \hbar} = \frac{16}{1} \alpha r_e^2 Z^2 mc^2, \qquad (16.16)$$

où l'énergie du photon est toujours notée E_γ et $r_e = e^2/mc^2$. Les pertes d'un électron par rayonnement de freinage par unité de temps sont

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_r = WN_a v = \frac{16 e^6 Z^2 N_a v}{3mc^3 \hbar} = 2{,}5 \cdot 10^{-33} Z^2 N_a v \text{ erg/s}, \qquad (16.17)$$

où N_a est la concentration des noyaux dans le milieu. Pour $E \sim \sim mc^2$ et $v \approx c$ la formule (16.17), tout comme la formule (16.46) mentionnée plus loin et associée à une région relativiste de $Z = 1$, donnent à peu près la même valeur $-\left(\frac{dE}{dt}\right)_r \approx 8\frac{e^6 N_a}{mc^2 \hbar}$. Notons qu'en une approximation non relativiste le rayonnement produit par les collisions électron-électron est sensiblement plus faible que celui produit par les collisions électron-proton. Il en est ainsi parce que dans les collisions de mêmes particules il n'y a pas de rayonnement dipolaire en vertu de la loi de conservation de l'impulsion, alors que le rayonnement quadripolaire est $(v/c)^2$ fois plus faible, quant à l'ordre de grandeur, que le rayonnement dipolaire.

Pour un plasma à l'état d'équilibre, la concentration des électrons de vitesse s'échellonnant dans l'intervalle $v + dv$, v est égale à

$$\left.\begin{aligned} dN = N(v)\, dv = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi \varkappa T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2\varkappa T}\right) dv, \\ \int N(v)\, dv = N. \end{aligned}\right\} \qquad (16.18)$$

C'est pourquoi l'intensité totale du rayonnement fournie par unité de volume du plasma est

$$4\pi\varepsilon = \int \left|\frac{dE}{dt}\right|_r dN = \int_0^\infty WN_a N 4\pi \left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2\varkappa T}\right) v^3\, dv =$$

$$= \frac{32\sqrt{2}\, e^6 Z^2 N_a N (\varkappa T/m)^{1/2}}{3\sqrt{\pi}\, mc^3 \hbar}. \qquad (16.19)$$

Le facteur 4π s'emploie ici parce que le pouvoir émissif intégral $\varepsilon = \int \varepsilon_\nu d\nu$ est défini comme se rapportant à l'angle solide unité. En vertu de la condition de la quasi-neutralité d'habitude remplie, dans un plasma d'atomes de même espèce totalement ionisé, $N = ZN_a$. Ainsi, pour un plasma d'hydrogène on a d'après (16.19)

$$4\pi\varepsilon = 1{,}57 \cdot 10^{-27} N^2 \sqrt{T} \text{ erg/cm}^3 \cdot \text{s}, \tag{16.20}$$

où la température T est mesurée en degrés (de par le sens, T est la température électronique) ; il est évident que T (en degrés) $= \frac{\varkappa}{1{,}6 \cdot 10^{-12}} T$ (eV) $= 1{,}16 \cdot 10^4$ T (eV) et N est la concentration des électrons en un cm^{-3}. Des calculs un peu plus précis qui rendent compte des collisions électron-électron et des corrections relativistes, conduisent à l'expression

$$4\pi\varepsilon = 1{,}6 \cdot 10^{-27} N^2 \sqrt{T} (1 + 4{,}4 \cdot 10^{-10} T). \tag{16.21}$$

Les formules (16.19), (16.20) ne sont applicables que sous la condition (16.15), ce qui avec $Z = 1$ donne $v \gg 3 \cdot 10^8$ cm/s ou

$$T \sim \frac{mv^2}{3\varkappa} \gg \frac{e^4 m}{\hbar^2 \varkappa} \sim 10^5 \,°\text{K}. \tag{16.22}$$

D'autre part, la condition de petitesse des corrections relativistes amène

$$T \ll \frac{mc^2}{\varkappa} \sim 10^{10} \,°\text{K}. \tag{16.23}$$

Le pouvoir émissif intégral ε n'est pas le seul à présenter de l'intérêt, il y a encore le pouvoir émissif différentiel ε_ν introduit auparavant. Par définition

$$\varepsilon = \int_0^\infty \varepsilon_\nu \, d\nu = \int_0^\infty dE_\gamma \, E_\gamma \int_{E_\gamma}^\infty \sigma(E_\gamma, E) \, v(E) \, N(E) \, dE =$$

$$= h^2 \int_0^\infty \nu \, d\nu \int_{\sqrt{2h\nu/m}}^\infty \sigma(h\nu, E) \, vN(v) \, dv,$$

où $E_\gamma = h\nu = \hbar\omega$ est l'énergie du photon et $E = 1/2 \, mv^2$, l'énergie des électrons ; à l'équilibre thermique, $N(v) \, dv$ est définie par l'expression (16.18).

La section $\sigma(E_\gamma, E)$ ne dépend que très faiblement (suivant une allure logarithmique) de E (cf. [1, 209]) et en première approximation on peut poser $\sigma(E_\gamma, E) = \text{const}/E_\gamma = \text{const}/\nu$, d'où $\varepsilon_\nu = \text{const} \cdot \exp(-h\nu/\varkappa T)$. La constante se définit aisément à partir

de la condition $\int\limits_0^\infty \varepsilon_\nu d\nu = \varepsilon$; de cette façon on a

$$\varepsilon_\nu = \varepsilon \frac{h}{\varkappa T} \exp\left(-\frac{h\nu}{\varkappa T}\right) = \frac{7{,}7\cdot 10^{-38} N^2}{4\pi \sqrt{T}} \exp\left(-\frac{h\nu}{\varkappa T}\right) \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3\cdot\text{s}\cdot\text{Hz}}. \quad (16.24)$$

Considérons maintenant un autre cas limite de basses énergies (basses températures), lorsque

$$\frac{e^2 Z}{hv} \gg 1. \quad (16.25)$$

Sous la condition (16.25) le calcul peut se faire suivant la méthode classique. En effet, la longueur d'onde de l'électron est $\lambda = h/mv = 2\pi\hbar/mv$, alors que la distance minimale entre un électron et un noyau est déterminée par la condition $Ze^2/r_{\min} = 1/2\, mv^2$ et est égale à $r_{\min} = 2Ze^2/mv^2$. Il est évident que si l'on observe l'inégalité (16.25), $r_{\min} \gg \lambda/\pi$ et la description du mouvement de l'électron peut être classique. Le rayonnement peut aussi être décrit suivant la méthode classique, mais pour intégrer sur les fréquences il faut introduire un élément quantique et poursuivre l'opération seulement jusqu'à la fréquence $\nu = mv^2/2h$, où v est la vitesse de l'électron avant l'émission *). Le calcul classique du rayonnement d'une particule se déplaçant dans un champ coulombien est décrit en détail au § 70 de [6]. La grandeur qui nous intéresse ici est

$$dW = \int \widetilde{W}(p)\, 2\pi p\, dp,$$

où $W(p)$ est l'énergie émise dans l'intervalle ω, $\omega + d\omega$ lorsque la particule de charge e passe à la distance p du noyau de charge eZ (la masse de la particule, que nous allons considérer comme un électron, vaut m; nous négligeons le recul). Si

$$\omega \gg \frac{mv^3}{e^2 Z} \left(\text{c.-à.d. } \frac{e^2 Z}{hv} \gg \frac{mv^2}{h\omega}\right), \quad (16.26)$$

alors

$$dW = \frac{16\pi e^6 Z^2}{3\sqrt{3}\, v^2 m^2 c^3}\, d\omega = \frac{32\pi^2 e^6 Z^2}{3\sqrt{3}\, v^2 m^2 c^3}\, d\nu. \quad (16.27)$$

Assurément, la même formule peut s'obtenir par les méthodes de la mécanique quantique, mais dans le cas considéré le calcul classique est tout à fait suffisant (la condition (16.25) est justement la condition d'application de l'approximation quasi classique au champ coulombien)

*) Plus précisément, une étude classique convient sous la condition $h\nu = \hbar\omega \ll {}^1/_2\, mv^2$; dans plusieurs cas pour le calcul approché on peut utiliser les formules classiques pour $h\nu \leqslant {}^1/_2\, mv^2$ aussi.

L'énergie totale émise par une collision

$$W=\int_0^{h\nu_{max}=1/2mv^2} dW=\frac{16\pi^2e^6Z^2}{3\sqrt{3}\,mc^3h}\,. \tag{16.28}$$

Dans l'intégration sur les fréquences, l'imprécision de l'expression initiale (16.27) définie par la condition (16.26) peut être négligée. Ce qui importe plus, c'est la contrainte associée à l'utilisation de l'expression (16.27) jusqu'à la fréquence $\omega = mv^2/2\hbar$ (cf. ci-dessous). La distribution maxwellienne des vitesses dans un plasma d'hydrogène s'écrit

$$4\pi\varepsilon_\nu=\int_0^{\sqrt{2h\nu/m}}\frac{dW}{d\nu}N^2 4\pi\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2}v^3\exp\left(-\frac{mv^2}{2\varkappa T}\right)dv=$$

$$=\frac{32\pi\sqrt{2\pi}\,N^2\exp(-h\nu/\varkappa T)}{3\sqrt{3}\,m^{3/2}(\varkappa T)^{1/2}c^3}=4\pi\varepsilon\frac{h\exp(-h\nu/\varkappa T)}{\varkappa T}=$$

$$=6{,}8\cdot10^{-38}\frac{N^2}{\sqrt{T}}\exp\left(-\frac{h\nu}{\varkappa T}\right)\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3\cdot\text{s}\cdot\text{Hz}}\,. \tag{16.29}$$

En déduisant cette formule on a tenu compte qu'un photon d'énergie $h\nu$ ne peut être émis que par un électron d'énergie $1/2\,mv^2 \gg h\nu$. Le pouvoir émissif intégral ε vaut

$$4\nu\varepsilon=\int 4\pi\varepsilon_\nu\,d\nu=\int W\,dN=\frac{16\sqrt{2\pi}\,e^6N^2(\varkappa T/m)^{1/2}}{3\sqrt{3}\,mc^3\hbar}=$$

$$=1{,}42\cdot10^{-27}N^2\sqrt{T}\,\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3\cdot\text{s}}\,. \tag{16.30}$$

La valeur de (16.30) ne se distingue de (16.20) que par le facteur $1{,}57/1{,}42 = 1{,}1$ que dans les applications aux problèmes d'astrophysique on peut admettre égal à l'unité. Ainsi, bien que dans le domaine des températures (cf. (16.25) avec $Z = 1$)

$$T\sim\frac{mv^2}{3\pi}\ll\frac{e^4m}{\hbar^2\varkappa}\sim10^5\,{}^\circ\text{K}, \tag{16.31}$$

il faut utiliser les formules (16.29), (16.30), mais en fait on peut toujours appliquer les formules (16.20), (16.21) et (16.24). Plus précisément, l'utilisation de (16.20), (16.21) et (16.24) est admissible pour toutes les températures s'il s'agit des erreurs aux dizaines de pour cent près (de plus, (16.24) est inexacte pour $h\nu/\varkappa T \ll 1$). Dans le domaine de hautes températures (16.22), (16.23), la formule (16.21) est probablement très exacte. La formule (16.24) même aux températures élevées, est assez exacte seulement pour $h\nu/\varkappa T \gtrsim 1$ (dans le domaine $h\nu/\varkappa T \ll 1$ il faut multiplier ε_ν par $\frac{\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{4\varkappa T}{1{,}781\,h\nu}$; cf. plus loin). L'utilisation des expressions classiques fait que (16.28)-

(16.30) sont des formules approchées jusqu'à la fréquence $\nu = mv^2/2h$ y comprise. Les formules exactes se distinguent de (16.29) et (16.30) par le facteur supplémentaire $g(\nu, T)$ qu'on appelle ordinairement facteur de Gaunt. Les expressions et les graphiques de $g(\nu, T)$ correspondants sont donnés dans [210]. Le facteur $g \sim 1$ et c'est pourquoi, comme nous l'avons noté, dans les calculs aux dizaines de pour cent près, les formules (16.20), (16.21) et (16.24) peuvent être utilisées d'habitude pour toutes les températures. Cette conclusion, de même que la plupart des conclusions analogues, doit être adoptée avec précaution, puisque la précision dépend naturellement de la marge des énergies concernée des rayons X. Par exemple pour le plasma à $\varkappa T = 6$ KeV, dans la marge des énergies des photons de 2 à 20 KeV le facteur de Gaunt varie de 1,35 à 0,55, c.-à-d. change de 2,5 fois environ. Une telle variation, surtout lorsque la précision des mesures en astronomie des rayons X ne cesse de croître, est assez importante et ne doit pas être ignorée [211]. Il faut également avoir en vue qu'à basse température on observe la recombinaison, et ordinairement le plasma ne peut pas être considéré comme complètement ionisé.

L'intensité maximale du rayonnement de recombinaison $4\pi\varepsilon_{rec,\,max} \approx 10^{-21}N/\sqrt{T}$ et par conséquent

$$\frac{\varepsilon_{rec}}{\varepsilon_{frein}} \leqslant \frac{8\cdot 10^5}{T}. \qquad (16.32)$$

Ainsi pour $T \leqslant 10^6$ °K il faut tenir compte du rayonnement de recombinaison (transitions libres-liées et liées-liées; cf. [208]). A $T \gg 10^6$ °K le plasma d'hydrogène n'émet pratiquement que le rayonnement de freinage (cf. (16.21) et (16.24)). Le rayonnement de recombinaison fait que dans le domaine $T \leqslant 10^5$ °K l'imprécision des formules (16.21) et (16.24) est généralement d'autant moins importante.

Sous les conditions (16.26) le coefficient d'absorption du rayonnement associé aux transitions libre-libre (c.-à-d. au processus inverse au rayonnement de freinage) est égal à *)

$$\mu = \mu_\nu = \frac{16\pi^2 e^6 Z^2 N N_a}{3\sqrt{3}\,hc\,(2\pi m)^{3/2}(\varkappa T)^{1/2}\nu^3}\left(1-\exp\left(-\frac{h\nu}{\varkappa T}\right)\right) =$$
$$= \mu_{\nu,0}\left(1-\exp\left(-\frac{h\nu}{\varkappa T}\right)\right) =$$
$$= 3{,}68\cdot 10^8 \frac{N^2}{\sqrt{T}\,\nu^3}\left(1-\exp\left(-\frac{h\nu}{\varkappa T}\right)\right)\ \text{cm}^{-1}, \qquad (16.33)$$

*) La déduction détaillée de la formule (16.33a) (par la méthode des coefficients d'Einstein) est donnée au § 37 de [64]. La relation (16.33) s'obtient exactement de la même façon, mais en remplaçant la formule donnée (37.7) dans [64] par (37.7a), et la différence $N_2 - N_1 = Nh\nu/\varkappa T$ par $N_2 - N_1 = N(1 - \exp(-h\nu/\varkappa T))$, puisque maintenant on n'utilise pas la condition $h\nu \ll \varkappa T$.

où la dernière expression se rapporte au plasma d'hydrogène $Z = 1$, $N = N_a$). Constatons que le facteur $(1 - \exp(-h\nu/\varkappa T))$ rend compte de la contribution de l'émission induite qui entraîne la décroissance du rayonnement observé. Pour $h\nu \ll \varkappa T$, la formule (16.33) devient

$$\mu_\nu = \frac{0{,}018N^2}{T^{3/2}\nu^2} \tag{16.34}$$

Pourtant, dans ce cas limite, la formule (16.33), et donc (16.34) sont inexactes du fait qu'en les déduisant on a considéré que la fréquence était assez grande (condition (16.26)). Pour $h\nu \ll \varkappa T$ on vérifie la formule

$$\mu = \frac{8e^6N^2}{3\sqrt{2\pi}\,(\varkappa Tm)^{3/2}\,c\nu^2} \ln\left[\frac{(2\varkappa T)^{3/2}}{2{,}115\cdot 2\pi e^2 m^{1/2}\nu}\right] \approx$$

$$\approx \frac{10^{-2}N^2}{T^{3/2}\nu^2}\left[17{,}7 + \ln\left(\frac{T^{3/2}}{\nu}\right)\right] \tag{16.33a}$$

ou pour $T \gg 10^5$ °K on obtient la même formule, mais en remplaçant

$$\ln \frac{(2\varkappa T)^{3/2}}{2{,}115\cdot 2\pi e^2 m^{1/2}\nu} \quad \text{par} \quad \ln \frac{2\varkappa T}{1{,}781\cdot h\nu}$$

ou en remplaçant dans la dernière expression de (16.33a) $\ln (T^{3/2}/\nu)$ par $\ln (10^3\, T/\nu)$. Si on utilise pour μ l'expression (16.33a) en remplaçant le terme logarithmique par $\ln (4\varkappa T/1{,}781\, h\nu)$, comme il faut le faire dans les conditions (16.22), alors on aboutit en procédant comme suit à la formule (16.24) munie du facteur complémentaire $\frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{4\varkappa T}{1{,}781\, h\nu}$. Cette circonstance a été déjà notée (il s'agit de la mise au point de la formule (16.24) pour $h\nu \ll \varkappa T$). Si on ignore le terme logarithmique, les formules (16.33a) et (16.34) dépendent de la même façon de $N = N_e$, T et ν et donnent le même résultat quant à l'ordre de grandeur. Le domaine d'application et la précision de la formule (16.33) sont les mêmes que celles de (16.29). Qui plus est, l'une d'elles se déduit de l'autre (c'est pourquoi nous nous arrêtons sur cette question en la detaillant).

En effet, d'après le théorème (la loi) de Kirchhoff, le pouvoir émissif à l'état d'équilibre s'écrit

$$\varepsilon_\nu = B_\nu \mu_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\, \mu_{\nu,0} \exp\left(-\frac{h\nu}{\varkappa T}\right), \tag{16.35}$$

où

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\, \frac{1}{\exp(h\nu/\varkappa T) - 1}$$

est la densité spectrale du rayonnement de corps noir rapportée à l'unité de volume et à l'unité d'angle solide, et où on utilise la notation $\mu_\nu = \mu_{\nu,0}(1 - \exp(-h\nu/\varkappa T))$. En portant dans (16.35) l'expression (16.29) on amène la formule (16.33) et inversement. A première vue, ceci peut sembler être un cas particulier, puisqu'en toute rigueur la théorie de Kirchhoff concerne l'état d'équilibre thermodynamique local. Or, en fait, le domaine d'application de la formule (16.35) est bien plus large en vertu de la faiblesse de l'interaction du rayonnement électromagnétique avec la matière. Pour cette raison, par exemple, le rayonnement de freinage du gaz ne dépend pas en général de l'état du champ de rayonnement et sera à l'état d'équilibre (thermique) même en l'absence de l'équilibre radiatif. Voici une autre définition plus détaillée et plus exacte. La condition d'application de la formule (16.35) consiste en l'existence de l'état d'équilibre thermique des électrons (autrement dit, la fonction de distribution des électrons suivant les vitesses doit être maxwellienne). Dans les conditions d'une faible interaction du rayonnement avec les particules *), dans plusieurs cas l'état du champ d'émission n'intervient pas sur la fonction de distribution électronique, et si cette dernière reste à l'état d'équilibre, le pouvoir émissif garde l'équilibre aussi.

Dans ce qui précède nous avons calculé et discuté les expressions du pouvoir émissif (les grandeurs ε_ν et $\varepsilon = \int \varepsilon_\nu d\nu$). Pour déterminer l'intensité ou le flux du rayonnement émis par la source il faut en général résoudre l'équation de transfert qui rend compte de l'absorption du rayonnement et, en particulier, de sa réabsorption (cf. chapitre 9). Toutefois, le résultat s'obtient immédiatement dans deux cas limites, dans celui d'une couche « épaisse » et d'une couche « mince ». Si la couche du plasma émetteur est « épaisse », c.-à-d. parfaitement opaque, elle émet comme un corps noir (la densité spectrale du rayonnement est proportionnelle à $\nu^3/[\exp(h\nu/\varkappa T) - 1]$). Dans le cas d'une couche parfaitement transparente (« mince »), son rayonnement est simplement proportionnel à $\varepsilon_\nu L$ (L est l'épaisseur de la couche considérée comme homogène). De plus, il s'ensuit de (16.24) et (16.29) que le spectre est exponentiel : il est de la forme $\exp(-h\nu/\varkappa T)$ (il est vrai que pour $h\nu \ll \varkappa T$ le spectre n'est pas constant étant fonction logarithmique de la fréquence ; cf. (16.33a)).

---

*) Formellement la faiblesse de l'interaction électromagnétique se manifeste dans la petitesse de la constante de la structure fine $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$. Pour le champ mésique avec $g^2/\hbar \gg 1$ en déséquilibre, un analogue de la loi de Kirchhoff serait en général faux. D'autre part, déjà dans le cas électromagnétique, des situations sont possibles où le déséquilibre du rayonnement conduit à la violation de la loi de Kirchhoff (le résultat dépend aussi bien de l'intensité du champ de rayonnement que de la probabilité de telles ou telles transitions radiatives dans le système).

Evidemment, une couche peut être considérée comme mince tant que $\mu L \ll 1$.

Dans le cas où les rayons X sont émis par des sources qui ont à leur base le rayonnement de freinage (nuage ou atmosphère de plasma chaud), il est particulièrement commode à évaluer à partir les formules (16.21) et (16.24.). Par exemple, pour une source homogène de volume V la luminosité X (puissance du rayonnement)

$$L_X = 1{,}6 \cdot 10^{-27} N^2 \sqrt{T}\, V. \tag{16.36}$$

Ici on suppose, certes, que la source est « mince ». Dans le cas de la distribution quasi homogène de la densité, les valeurs moyennes de $N \sim \sqrt{\overline{N^2}}$ et, par conséquent, pour la masse de gaz $M = M_p NV$ et l'énergie interne $W_T = 3/2 \varkappa TNV$, on a dans la source

$$\left.\begin{aligned} M &\sim 2 \cdot 10^{-24} V \sqrt{\overline{N^2}} = \frac{(L_X V)^{1/2}}{2 \cdot 10^{10} T^{1/4}}\, \text{g}, \\ W_T &\sim \sqrt{\overline{N^2}}\, \varkappa TV \sim 3 \cdot 10^{-3} (L_X V)^{1/2} T^{3/4}\ \text{erg}. \end{aligned}\right\} \tag{16.37}$$

Ces formules bien simples permettent de tirer certaines conclusions sur le « modèle à rayonnement de freinage » de diverses sources X.

Considérons maintenant le rayonnement de freinage des électrons et des positrons relativistes. Ce rayonnement peut présenter un mécanisme important des pertes d'énergie (pertes radiatives). Cet aspect a déjà été traité au chapitre 15. Or, ce qui nous intéresse ici, c'est le rayonnement de freinage lui-même et encore seulement le cas des électrons ultra-relativistes ainsi que l'émission des photons d'énergies suffisamment grandes (plage des rayons gamma) *).

Ainsi, examinons le rayonnement de freinage des électrons ultra-relativistes en notant $E \equiv E_1$ et E_2 respectivement l'énergie initiale et finale de l'électron, et E_γ, l'énergie du photon de freinage émis. Dans le cas de la diffusion des électrons sur les noyaux (cas qui nous délimitera ici) on peut ordinairement admettre que le noyau est fixe. Dans ces conditions le noyau ne reçoit que l'impulsion, alors que son énergie cinétique peut être négligée, c.-à-d. après le rayonnement, l'énergie de l'électron est $E_2 = E - E_\gamma$.

Sous la condition que

$$E \gg mc^2, \quad E_2 = E - E_\gamma \gg mc^2 \tag{16.38}$$

*) Cette question est pourtant examinée dans le présent chapitre et non pas au chapitre 17, du fait qu'il est plus logique d'étudier le rayonnement de freinage des électrons relativistes immédiatement après le rayonnement de freinage des électrons non relativistes.

la fuite des photons est limitée par l'angle $\theta \sim mc^2/E$, la direction de l'impulsion de l'électron incident étant $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_1$. La section s'écrit alors

$$\sigma_r(E_\gamma, E)\, dE_\gamma = 4\frac{e^2}{\hbar c}Z^2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{dE_\gamma}{E_\gamma}\left[\left\{1+\left(1-\frac{E_\gamma}{E}\right)^2\right\}\Phi_1 + \right.$$
$$\left. + \left\{1-\frac{E_\gamma}{E}\right\}\Phi_2\right], \quad (16.39)$$

où Z est la charge de l'atome diffuseur et les fonctions Φ_1, Φ_2 sont données ci-dessous. Par définition, la probabilité d'émission par un électron d'énergie $E \gg mc^2$ d'un photon par unité de temps, d'énergie E_γ dans l'intervalle E_γ, $E_\gamma + dE_\gamma$ est égale à $P(E_\gamma, E)\, dE_\gamma = \sigma_r(E_\gamma, E)\, F dE_\gamma$, où F est le flux d'électrons passant par l'aire unité. S'il s'agit d'un noyau « dépouillé », c.-à-d. de la diffusion sur un centre coulombien, il vient

$$\Phi_1 = \ln\left(\frac{2E}{mc^2}\frac{E-E_\gamma}{E_\gamma}\right) - \frac{1}{2}, \qquad \Phi_2 = -\frac{2}{3}\Phi_1. \quad (16.40)$$

Dans la diffusion sur les atomes, les électrons des enveloppes du cortège atomique font écran à la charge du noyau, ce qui fait varier la section. La valeur de cet effet est définie par le paramètre

$$\xi = \frac{\hbar c}{e^2}\frac{mc^2}{E}\frac{E_\gamma}{E-E_\gamma}Z^{-1/3}.$$

Le sens de ce paramètre devient clair si l'on songe que dans la diffusion d'un électron sur un noyau, ce dernier reçoit l'impulsion $\Delta p \sim \hbar/r$, où r est la distance efficace entre le noyau et l'électron qui passe dans son voisinage (pour plus de détails, cf., par exemple, § 25 de [1]). Ensuite, il résulte des lois de conservation

$$\Delta p = \frac{1}{2}\frac{mc^2}{E}\frac{E_\gamma}{E-E_\gamma}mc,$$

et donc

$$r \sim \frac{\hbar}{mc}\frac{E(E-E_\gamma)}{mc^2 E_\gamma}$$

D'autre part, dans le modèle statistique, le rayon de l'atome $a \sim a_0 Z^{-1/3}$ où $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{\hbar}{mc}\frac{\hbar c}{e^2} = 5{,}3\cdot 10^{-9}$ cm. Le paramètre ξ introduit ci-dessus est évidemment de l'ordre du rapport a/r. Plus le photon émis est dur, plus l'électron doit passer près du noyau et plus l'effet d'écran est faible; de plus, si le paramètre $\xi \gg 1$, alors les expressions (16.40) sont vraies. Des photons plus mous sont émis lorsque l'électron passe à une distance importante du noyau. Pour $\xi \ll 1$, la protection est grande et pour les atomes lourds on a

$$\Phi_1 = \ln(191\cdot Z^{-1/3}), \quad \Phi_2 = -2/3\ln(191\cdot Z^{-1/3}) + \frac{1}{9}\cdot \quad (16.41)$$

Les formules (16.39)-(16.41) rendent clair que la relation entre $\sigma(E_\gamma, E)$ et E est faible, et la dépendance par rapport à E_γ est déterminée par le facteur $1/E_\gamma$ (cette remarque est pertinente surtout dans le cas d'une protection totale (16.41)). Par ailleurs, la formule (16.41) n'est pas exacte dans le cas des éléments légers.

S'il s'agit des erreurs non inférieures à quelques pour cent, la section relative au rayonnement de freinage dans les conditions d'une protection totale d'un effet d'écran total peut être mise sous la forme

$$\sigma_r(E_\gamma, E)\, dE_\gamma = \frac{M\, dE_\gamma}{t_r E_\gamma}, \tag{16.42}$$

où t_r est l'unité de longueur de radiation (en g/cm²) dans un gaz atomique de masse M ; dans les conditions (16.41),

$$\frac{1}{t_r} = 4\frac{e^2}{\hbar c} Z^2 M^{-1} \ln(191\cdot Z^{-1/3})$$

et pour l'hydrogène ($Z = 1$, $M = 1{,}67\cdot 10^{-24}$ g) nous aurions $t_r \approx$ ≈ 73 g/cm². En réalité, l'imprécision de la formule (16.41) fait que pour les éléments légers la valeur de t_r pour l'hydrogène est légèrement inférieure même si l'on tient compte de la contribution des collisions électron-électron. Des calculs détaillés [212] de t_r conduisent aux valeurs $t_H = 62{,}8$; $t_{He} = 93{,}1$; $t_C = 43{,}3$; $t_N = 38{,}6$; $t_0 = 34{,}6$; $t_{Fe} = 13{,}9$ g/cm² (ici l'indice r est omis et remplacé par le symbole de l'élément). Pour le milieu interstellaire non ionisé (environ 90 % de H et 10 % de He) on peut poser avec une précision suffisante que $M = 2\cdot 10^{-2}$ g et $t_r = 66$ g/cm².

L'intensité des photons gamma de freinage est égale à

$$J_{\gamma.\,\text{frein}}(E_\gamma) = \int_0^L dR \int_{E_\gamma}^{\infty} N_a(\mathbf{R})\,\sigma_r(E_\gamma, E)\, J_e(E, \mathbf{R})\, dE, \tag{16.43}$$

où J_e est l'intensité de la composante électronique génératrice; $N_a(\mathbf{R})$, la concentration des atomes du milieu interstellaire. En appliquant la formule (16.42) et en supposant que dans le rayon de vision l'intensité J_e est constante, on obtient

$$J_{\gamma.\,\text{frein}}(E_\gamma) = \frac{M\tilde{N}(L)}{t_r}\frac{J_e(>E_\gamma)}{E_\gamma} = 1{,}5\cdot 10^{-2}\,\tilde{M}(L)\frac{J_e(>E_\gamma)}{E_\gamma}, \tag{16.44}$$

où $\tilde{M}(L) = M\tilde{N}(L)$ est la masse de gaz le long du rayon visuel (en g/cm²) et $J_e(>E_\gamma) = \int_{E_\gamma}^{\infty} J_e(E)\, dE$.

Dans l'hydrogène non ionisé pour $E_\gamma \lessdot E$, le paramètre $\xi =$ $= 10^2\, mc^2/E$ et $\xi \ll 1$ pour $E \gg 5\cdot 10^7$ eV ; c'est cette condition qui rend possible l'utilisation des formules (16.42) et (16.44). Dans un milieu complètement ionisé il est pratiquement toujours possible

d'ignorer l'effet d'écran. En effet, dans notre cas, le rayon de l'effet d'écran est la longueur de Debye $r_D = \sqrt{\varkappa T/8\pi e^2 N}$, qui, par exemple pour $T \sim 10^4$ °K, $N \sim 0{,}1$ cm^{-3}, est d'ordre 10^3 cm. Dans cet exemple, $r_D \sim r \sim (\hbar/mc)\,(E/mc^2)$ (cf. plus haut) seulement avec $E/mc^2 \sim \sim 3\cdot 10^{13}$, c.-à-d. $E \sim 10^{19}$ eV. Ainsi, dans un gaz ionisé, d'ordinaire, $r \ll r_D$ et l'effet d'écran est peu important. En l'absence de l'effet d'écran dans les conditions (16.38) il faut utiliser les expressions (16.39), (16.40) et (16.43). Notons que dans ces conditions on ne tient pas compte du rayonnement de freinage produit par les collisions de l'électron incident avec les électrons élémentaires (et en général, les électrons du milieu, par exemple, du plasma). Pour évaluer grossièrement l'influence des collisions électron-électron sur la section (16.39), on peut remplacer le facteur Z^2 par $Z\,(Z+1)$. Le sens de cette substitution consiste évidemment dans le fait que la section $\sigma\,(E_\gamma, E)$ des collisions électron-électron est à peu près la même que celle des collisions électron-proton ; en outre, on tient compte, certes, que l'atome possède Z électrons. Soulignons que l'estimation approchée par le mode indiqué des collisions électron-électron n'est en général possible que s'il s'agit de la section intégrée sur les angles. C'est précisément pour cette raison que l'apport dans la section intégrale $\sigma\,(E_\gamma, E)$ des processus associés au transfert à l'électron du cortège atomique d'une impulsion élevée s'avère insignifiant. La valeur $t_r = 66$ g/cm^2 donnée précédemment pour le milieu interstellaire est obtenue compte tenu du rayonnement de freinage lors des collisions électron-électron (cf. [212]). Dans ce qui suit, les collisions électron-électron sont également évaluées en remplaçant Z^2 par $Z\,(Z+1)$ ou en choisissant convenablement la valeur de t_r.

Le rayonnement de freinage fait que les électrons perdent de l'énergie, les pertes correspondantes se nommant, comme nous l'avons dit, pertes par rayonnement de freinage ou pertes radiatives. Soulignons que ces pertes se manifestent essentiellement par de grandes portions, c.-à-d. appartiennent aux pertes « catastrophiques » (cf. chapitre 15). Par exemple, (16.42) montre clairement que l'énergie transmise

$$\int E_\gamma \sigma\,(E_\gamma, E)\,dE_\gamma \sim \int_0^E \text{const}\cdot dE_\gamma \sim \text{const}\cdot E,$$

c.-à-d. qu'elle est définie par l'émission des photons d'énergie $E_\gamma \sim \sim E$. C'est pourquoi les pertes par rayonnement de freinage sont fortement fluctuantes. Toutefois, nous allons nous borner au calcul des pertes moyennes par unité de parcours

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_r = \int_0^E N_a E_\gamma \sigma\,(E_\gamma, E)\,dE_\gamma, \qquad (16.45)$$

où N_a est la concentration des atomes et où on a tenu compte que la section $\sigma(E_\gamma, E)$ est normée sur le flux unité des électrons (d'autre part, en vertu de (16.38) la limite supérieure de l'intégrale $E - mc^2$ est remplacée par E); pour les électrons ultra-relativistes envisagés, les pertes par unité de temps $\left(\frac{dE}{dt}\right)_r$ s'obtiennent en multipliant simplement la valeur de (16.45) par $c = 3\cdot 10^{10}$ cm/s.

D'après (16.39), (16.40) et (16.45), pour un gaz complètement ionisé (plasma) en l'absence d'effet d'écran, on a

$$-\frac{1}{E}\left(\frac{dE}{dt}\right)_r = \frac{4e^6 N_a Z(Z+1)}{m^2c^4\hbar}\left[\ln\frac{2E}{mc^2} - \frac{1}{3}\right] =$$
$$= 1{,}37\cdot 10^{-16} N_a \left\{\ln\frac{E}{mc^2} + 0{,}36\right\} \text{s}^{-1} =$$
$$= 2{,}74\cdot 10^{-3}\left\{\ln\frac{E}{mc^2} + 0{,}36\right\} \text{g}^{-1}\cdot\text{cm}^2 =$$
$$= 4{,}6\cdot 10^{-27} N_a \left\{\ln\frac{E}{mc^2} + 0{,}36\right\} \text{cm}^{-1}, \quad (16.46)$$

où pour passer aux trois dernières expressions on a posé $Z = 1$ (hydrogène) *).

Dans le cas de l'effet d'écran total on obtient pour les éléments lourds

$$-\frac{1}{E}\left(\frac{dE}{dt}\right)_r = \frac{4e^6 N_a Z(Z+1)}{m^2c^4\hbar}\{\ln(191 Z^{-1/3} + 1/18\} =$$
$$= 7{,}26\cdot 10^{-16} N_a \text{ s}^{-1}, \quad (16.47)$$

où les valeurs numériques se rapportent à l'hydrogène ($Z = 1$) lorsque la formule (16.47) est déjà inexacte. Nous indiquons quand même le résultat numérique pour comparer les formules (16.46) et (16.47) dans le cas d'hydrogène. Il est évident qu'avec $E/mc^2 = 10^3$ les pertes (16.46) et (16.47) s'égalisent; dans un hydrogène non ionisé la formule (16.46) doit être utilisée pour $E/mc^2 \lesssim 10^2$, et (16.47), pour $E/mc^2 \gg 10^2$. Dans ce dernier cas (effet d'écran total) une valeur plus exacte pour le milieu interstellaire s'obtient si l'on admet que l'unité de longueur de radiation t_r est égale à 66 g/cm². Alors, (16.42) et (16.45) entraînent immédiatement

$$-\frac{1}{E}\left(\frac{dE}{dt}\right)_r = \frac{McN_a}{t_r}\text{ s}^{-1} = \frac{1}{t_r}\text{g}^{-1}\cdot\text{cm}^2 = 1{,}5\cdot 10^{-2}\text{ g}^{-1}\cdot\text{cm}^2 \approx$$
$$\approx 10^{-15} N_a \text{ s}^{-1} \approx 3\cdot 10^{-26} N_a \text{ cm}^{-1}. \quad (16.48)$$

En vertu de (16.48) les pertes d'énergie d'un électron sont régies en moyenne par la loi $E = E_0 \exp(-L/66)$, où E_0 est son énergie

*) Expliquons une fois de plus que les pertes calculées par g/cm² s'obtiennent à partir des pertes rapportées à l'unité de parcours en remplaçant la concentration N_a des atomes par $1/M$, où M est la masse de l'atome.

initiale et L, la voie qu'il parcourt en g/cm². Puisque les pertes par rayonnement de freinage sont essentiellement « catastrophiques » (pertes d'énergie en un acte $\Delta E \sim E$), on peut admettre en approximation grossière que la probabilité pour que l'électron couvre le parcours L (en g/cm²) sans aucune perte par rayonnement de freinage est égale à $\exp(-L/66)$.

Outre les photons gamma, la diffusion des électrons ultrarelativistes peut produire des paires électron-positron e^+, e^-, ainsi que d'autres particules (par exemple, les paires μ^+, μ^-). Pour que les collisions électron-proton ou électron-électron assurent la naissance des paires e^+, e^-, la section totale correspondante doit être de l'ordre de

$$\sigma_{\text{paires}} \sim \left(\frac{1}{\pi}\right)\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \ln^2\frac{E}{mc^2} \qquad (16.49)$$

(plus précisément, dans les collisions électron-proton sous le signe de logarithme il y a le facteur E/M_pc^2, où M_p est la masse du proton). Par contre, en l'absence d'effet d'écran (de même que dans (16.49)) pour le rayonnement de freinage dans l'hydrogène (cf. (16.39), (16.40)) la section vaut

$$\sigma_r = \int \sigma(E_\gamma, E)\, dE_\gamma \sim 4\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \ln\frac{E}{mc^2}\,. \qquad (16.50)$$

Ainsi

$$\sigma_{\text{paires}} \sim \left(\frac{1}{4\pi}\right)\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\sigma_r \ln^2\frac{E}{mc^2} \sim 10^{-3}\sigma_r \ln^2\frac{E}{mc^2},$$

et en l'absence d'effet d'écran, $\sigma_{\text{paires}} \ll \sigma_r$ tant que $E/mc^2 \ll$ $\ll 10^{12}\text{-}10^{13}$ (ou $E \ll 10^{18}$ eV).

Considérons maintenant le rayonnement dû à la production des électrons et des positrons par désintégration $\pi^\pm \to \mu^\pm \to e^\pm$. Son intensité est d'habitude très faible par rapport aux émissions d'une autre nature (rayonnement de freinage des électrons, rayons gamma émis par la désintégration des mésons π^0). C'est pourquoi nous ne donnerons que des estimations.

La production d'une particule de charge e et d'énergie

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \gg mc^2$$

s'accompagne en approximation classique de l'émission de l'énergie (cf. chapitre 7 et § 69 de [6])

$$\left.\begin{aligned} dW_\gamma &= \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{c}{v}\ln\frac{c+v}{c-v} - 2\right) dE_\gamma \approx \frac{2\alpha}{\pi}\left(\ln\frac{2E}{mc^2} - 1\right)\, dE_\gamma, \\ \alpha &= e^2/\hbar c \approx 1/137. \end{aligned}\right\} \qquad (16.51)$$

Quand $E_\gamma \ll E$, cette expression convient aussi pour les estimations (en fait, la constante de Planck $\hbar = h/2\pi$ ne figure pas dans (16.51)

parce que $dE_\gamma = hd\nu$). Le nombre de photons apparus est égal à dW_γ/E_γ; par conséquent, l'intensité

$$J_{\gamma,\,\text{nais}}(E_\gamma) = \frac{L}{4\pi}\int_{E_\gamma}^{\infty}\frac{dW_\gamma}{dE_\gamma}\frac{q_e(E)\,dE}{E_\gamma} \approx$$

$$\approx 4\cdot 10^{+4}\left(\ln\frac{2\overline{E}_\gamma}{mc^2}-1\right)\frac{Q_e(E>E_\gamma)}{E_\gamma}, \quad (16.52)$$

où $Q_e(E > E_\gamma) = L\int_{E_\gamma}^{\infty} q_e(E)\,dE$ est le nombre d'électrons d'énergie $E > E_\gamma$ produits par seconde sur le parcours le long du rayon visuel d'une longueur L, et $\overline{E}_\gamma$, une certaine moyenne. Les estimations relatives à la Galaxie témoignent du fait que l'intensité $J_{\gamma,\,\text{nais}}$, par exemple pour $E_\gamma = 5\cdot 10^7$ eV, est de quelques ordres inférieure à l'intensité du rayonnement de freinage $J_{\gamma,\,\text{frein}}$. Pour ce qui est de la comparaison de l'intensité de $J_{\gamma,\,\text{nais}}$ (il s'agit de la naissance des produits de désintégration des mésons $\pi^\pm$) avec $J_{\gamma,\,\pi^0}$ (l'intensité des rayons gamma produits par la désintégration des mésons π^0), dans ces cas l'estimation est possible indépendamment du spectre et de l'intensité des composantes protono-nucléaire et électronique des rayons cosmiques. En effet, il apparaît environ deux fois moins de mésons π^0 que de mésons $\pi^\pm$. Il est donc clair que dans la désintégration $\pi^0 \to 2\gamma$ il se forme autant de photons gamma que d'électrons et de positrons dans la désintégration $\pi^\pm \to \mu^\pm \to e^\pm$. Ensuite, la probabilité qu'en naissant un électron (positron) émet un photon comporte le facteur complémentaire $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$. Par conséquent, l'intensité des photons gamma qui accompagnent la désintégration $\pi^\pm \to \mu^\pm \to e^\pm$ est de deux ordres inférieure à l'intensité des rayons gamma émis par la désintégration d'un méson π^0.

Le processus important que nous allons étudier maintenant est celui de la diffusion des électrons relativistes sur les photons, appelé souvent effet Compton inverse *).

Supposons que dans le système du laboratoire (dans les conditions qui nous intéressent c'est un système de coordonnées lié à la Terre ou un autre système de référence astronomique) on ait un électron d'impulsion

$$\mathbf{p}_1 = \frac{m\mathbf{v}_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}$$

*) L'apparition de ce terme est due au fait que l'effet Compton a été découvert et étudié en laboratoire dans les conditions où le photon gamma est diffusé sur un électron au repos ou lent. Dans tous les cas qui suivent indépendamment des énergies des photons et des électrons nous disons simplement diffusion Compton.

et d'énergie

$$E_1 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}},$$

ainsi qu'un photon d'impulsion $\hbar\mathbf{k}$ et d'énergie $\epsilon_{ph.1} = \hbar\omega$ ($k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi c/\lambda = ck$) ; supposons d'autre part que le milieu soit absent ou qu'il n'exerce aucune influence, ce qu'on peut admettre si $\omega \gg \omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 N/m} = 5{,}64 \cdot 10^4 \sqrt{N}$. En se diffusant l'un sur l'autre, l'électron et le photon échangent l'énergie et l'impulsion,

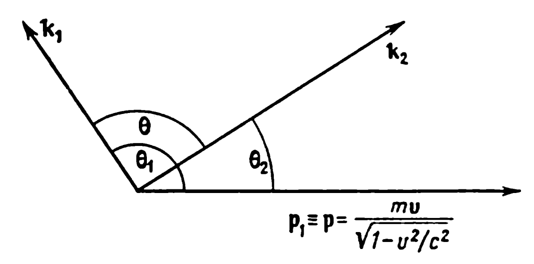


Fig. 16.1. Diffusion d'un photon d'impulsion $\hbar\mathbf{k}$ et d'énergie $\epsilon_{ph.1} \equiv \epsilon_{ph}$ sur un électron d'impulsion $\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{p}$ et d'énergie $E_1 \equiv E$

L'impulsion du photon diffusée est $\hbar\mathbf{k}_2$ et son énergie, $\epsilon_{ph.2} = E_\gamma$. Les vecteurs $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ et $\mathbf{p}$, en général, n'appartiennent pas au même plan.

de sorte qu'à l'état final les quantités correspondantes sont $\mathbf{p}_2$, E_2, $\mathbf{k}_2$ et $\epsilon_{ph.2}$. Puisque $E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$ et $\epsilon_{ph} = \hbar ck$, le problème de diffusion, $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{k}_1$ étant données, compte six inconnues (impulsions $\mathbf{p}_2$ et $\mathbf{k}_2$). Les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion donnent quatre relations ; de cette façon, l'énergie du photon diffus qui nous intéresse $\epsilon_{ph.2}$ peut s'obtenir seulement en donnant deux quelconques des paramètres. On choisit généralement comme tels l'angle θ_2 entre $\mathbf{k}_2$ et $\mathbf{p}_1$ et l'angle θ entre $\mathbf{k}_2$ et $\mathbf{k}_1$ (en fixant par là même la direction de $\mathbf{k}_2$; cf. fig. 16.1). Par commodité, ayant en vue l'application aux photons durs (photons 2), on utilisera ordinairement les notations

$$\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E_1 \equiv E, \quad \epsilon_{ph.1} = \epsilon_{ph}, \quad \epsilon_{ph.2} = E_\gamma \tag{16.53}$$

θ_1 est l'angle entre $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{p}$; θ_2, l'angle entre $\mathbf{k}_2$ et $\mathbf{p}$; θ, l'angle entre $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$.

L'énergie d'un photon diffus

$$E_\gamma = \frac{\epsilon_{ph}(1 - (v/c)\cos\theta_1)}{1 - (v/c)\cos\theta_2 + (\epsilon_{ph}/E)(1 - \cos\theta)} = \varphi(\epsilon_{ph}, E, \theta_1, \theta_2, \theta). \tag{16.54}$$

Si

$$E > E_\gamma \gg \epsilon_{ph}, \tag{16.55}$$

on a approximativement

$$E_\gamma = \frac{\epsilon_{ph}\,(1-(v/c)\cos\theta_1)}{1-(v/c)\cos\theta_2+(\epsilon_{ph}/E)\,(1-(v/c)\cos\theta_1)\cos\theta_2}. \qquad (16.56)$$

La forme invariante (cf. [3]) de la section de la diffusion des particules non polarisées est la plus commode:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_C(\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{v})\,d\Omega_2 = 2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{E_\gamma^2}{m^2c^4\varkappa_1^2}\Bigl\{4\left(\frac{1}{\varkappa_1}+\frac{1}{\varkappa_2}\right)^2 - {}\\
-4\left(\frac{1}{\varkappa_1}+\frac{1}{\varkappa_2}\right)-\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}+\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)\Bigr\}\,d\Omega_2,\\
\varkappa_1 = -\frac{2}{m^2c^4}\epsilon_{ph}E\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta_1\right),\\
\varkappa_2 = \frac{2}{m^2c^4}E_\gamma E\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta_2\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (16.57)$$

où $d\Omega_2$ est l'élément de l'angle solide associé à la direction $\mathbf{k}_2$ (l'angle solide Ω_1 utilisé ci-dessous se rapporte à la direction $\mathbf{k}_1$).

Si à l'état initial l'électron est au repos (c.-à-d. si $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_1 = 0$) alors (16.54) et (16.57) amènent les expressions bien connues

$$E_\gamma = \frac{\epsilon_{ph}}{1+(\epsilon_{ph}/mc^2)\,(1-\cos\theta)}, \qquad (16.58)$$

$$\sigma_C\,d\Omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{E_\gamma}{\epsilon_{ph}}\right)^2\left(\frac{\epsilon_{ph}}{E_\gamma}+\frac{E_\gamma}{\epsilon_{ph}}-\sin^2\theta\right)d\Omega_2 \qquad (16.59)$$

A la limite non relativiste, lorsque dans (16.59) $\epsilon_{ph} \ll mc^2$, on peut poser $E_\gamma = \epsilon_{ph}$ (ceci est rendu clair également par (16.58)) et alors

$$\sigma_C\,d\Omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1+\cos^2\theta)\,d\Omega_2. \qquad (16.60)$$

En intégrant la section (16.59) suivant l'angle solide $d\Omega_2 = 2\pi\sin\theta\,d\theta$ (l'angle θ_2 dans ce cas peut être identifié à l'angle θ entre $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$), on obtient la section Thomson

$$\sigma_T = \int \sigma_C\,d\Omega_2 = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = 6{,}65\cdot 10^{-25}\ \text{cm}^2. \qquad (16.61)$$

Soulignons encore une fois qu'on admet que les électrons et les photons à l'état initial ne sont pas polarisés, alors que la section déterminée d'après (16.57), (16.59) et (16.60) est déjà sommée suivant les polarisations à l'état final. Le développement de l'astronomie des rayons X et gamma rendra assurément possible la mesure importante et intéressante de la polarisation des rayons X et gamma cosmiques, ce qui est essentiel pour établir la nature du rayonnement; par exemple, la polarisation du rayonnement X synchrotron de la Nébuleuse du Crabe doit être assez forte, fait confirmé par l'ob-

servation, alors que le rayonnement de freinage d'un gaz chaud n'est pas polarisé (pour plus de détails, cf. ce qui suit). Nous admettrons pourtant pour simplifier que le rayonnement diffus (photons 2) n'est pas polarisé. Il en sera ainsi dans le cas où le rayonnement mou (photons 1) ne l'est pas (sur les effets de polarisation de la diffusion Compton, cf. § 87 de [3]).

Rappelons que d'après la définition de la section efficace (cf., par exemple, [209]), $\sigma_C d\Omega_2 F$ est le nombre de photons diffusés par unité de temps dans l'angle $d\Omega_2$; de plus, $F = N_{ph}(c - v\cos\theta_1)$ est la densité du flux des photons diffusés sur les électrons (N_{ph} est la concentration des photons; $v \equiv v_1$, la vitesse des électrons diffuseurs; θ_1, l'angle entre $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{v}$); la section $\sigma_C d\Omega_2$ est un invariant relativiste. Admettons maintenant que les photons d'énergie ϵ_{ph} sont répartis isotropiquement suivant les directions, alors que nous nous intéressons aux photons diffusés d'énergie E_γ aussi indépendamment de la direction de leur propagation. Dans ces conditions, il faut calculer la section (cf. (16.54) et (16.57))

$$\sigma(E_\gamma, \epsilon_{ph}, E) = \frac{1}{4\pi}\int\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1\right)\sigma_C(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{v}) \times \\ \times \delta(E_\gamma - \varphi(\epsilon_{ph}, E, \theta_1, \theta_2, \theta))\, d\Omega_1\, d\Omega_2. \qquad (16.62)$$

En effet, désignons la concentration des photons mous 1 de direction de propagation quelconque et d'énergie s'échelonnant dans l'intervalle ϵ_{ph}, $\epsilon_{ph} + d\epsilon_{ph}$ par $N_{ph}(\epsilon_{ph})\, d\epsilon_{ph}$. Alors, le nombre de photons durs 2 produits par unité de temps par la diffusion des photons mous sur un électron vaut justement $c\int\sigma(E_\gamma, \epsilon_{ph}, E)\, N_{ph}(\epsilon_{ph})\, d\epsilon_{ph}$. Soit

$$4\epsilon_{ph}\frac{E}{mc^2} \ll mc^2 \qquad (16.63)$$

t, d'autre part, la condition (16.55) est respectée. Alors, les expressions (16.56) et (16.57) permettent de calculer la section (16.62), puis la grandeur $\sigma_t = \int\sigma(E_\gamma\epsilon_{ph}, E)\, dE_\gamma$. Sous la condition (16.63) on obtient

$$\sigma(E_\gamma, \epsilon_{ph}, E) = 1/4\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{(mc^2)^4}{\epsilon_{ph}^2 E^3} \times \\ \times\left\{2\frac{E_\gamma}{E} - \frac{(mc^2)^2 E_\gamma^2}{2\epsilon_{ph}E^3} + 4\left(\frac{E_\gamma}{E}\right)\ln\frac{(mc^2)^2 E_\gamma}{4\epsilon_{ph}E^2} + \frac{8\epsilon_{ph}E}{(mc^2)^2}\right\}; \qquad (16.64)$$

de plus, E_γ est comprise dans les limites $\epsilon_{ph} \leqslant E_\gamma \leqslant 4\epsilon_{ph}(E/mc^2)^2$; en fait, le domaine d'application de la formule (16.64) est légèrement plus large. Ensuite,

$$\sigma_t = \int\sigma(E_\gamma, \epsilon_{ph}, E)\, dE_\gamma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = \sigma_T. \qquad (16.65)$$

Nous ne sommes pas entrés dans le détail des calculs correspondants du fait que le résultat (16.65) est parfaitement clair *). Dans le système de coordonnées lié à l'électron l'énergie du photon 1 vaut $\epsilon'_{ph,1} = (E/mc^2)\,\epsilon_{ph}\,(1 - (v/c)\cos\theta_1)$. Pour le rayonnement isotrope $\bar{\epsilon}'_{ph} = (E/mc^2)\,\bar{\epsilon}_{ph}$ et, par ailleurs, sous la condition $\bar{\epsilon}'_{ph} \ll \ll mc^2$, les formules (16.60), (16.61) sont vraies; autrement dit, on peut admettre que la diffusion est classique. Mais en vertu de ce qui a été dit, la condition $\bar{\epsilon}'_{ph} \ll mc^2$ est équivalente à la condition $\bar{\epsilon}_{ph}\,(E/mc^2) \ll mc^2$ qui au fond coïncide avec (16.63). Ainsi, sous la condition

$$E \ll 1/4 \left(\frac{mc^2}{\epsilon_{ph}}\right) mc^2 \approx \frac{6\cdot 10^{10}}{\epsilon_{ph}\,(\mathrm{eV})}\,\mathrm{eV}, \qquad (16.66)$$

la diffusion des photons sur les électrons en mouvement est classique et la section totale est égale à σ_T. Dans la diffusion des électrons sur des photons optiques, $\bar{\epsilon}_{ph} \sim 1$ eV (rayonnement thermique des étoiles) et la condition (16.66) est de la forme $E \ll 10^{11}$ eV; et s'il s'agit de la diffusion sur les photons radio, la condition (16.66) est certes encore plus lâche. Dans la plupart des situations relatives à l'astronomie, les conditions (16.63) et (16.66) sont remplies et dans ce qui suit nous nous bornerons essentiellement à ce cas là (d'ailleurs, nous donnerons également les expressions approchées d'un autre cas limite et un exemple réel de l'inobservation de la condition (16.66)).

Calculons les pertes moyennes (pertes Compton) que subit un électron d'énergie E par suite de la diffusion sur les photons.

Lorsque la condition (16.66) est respectée, la diffusion des électrons sur les photons suffisamment mous donne

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_C = c\int \sigma(E_\gamma,\ \epsilon_{ph},\ E)\,N_{ph}(\epsilon_{ph})\,E_\gamma\,dE_\gamma\,d\epsilon_{ph} =$$
$$= \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 c\cdot\frac{4}{3}\int \epsilon_{ph}N_{ph}(\epsilon_{ph})\,d\epsilon_{ph} =$$
$$= cN_{ph}\sigma_T\cdot\frac{4}{3}\bar{\epsilon}_{ph}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 = \frac{32\pi}{9}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 c w_{ph}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2, \qquad (16.67)$$

où la concentration totale des photons, la densité de leur énergie et l'énergie moyenne d'un photon sont déterminées par les relations

$$N_{ph} = \int N_{ph}(\epsilon_{ph})\,d\epsilon_{ph},\quad w_{ph} = \int \epsilon_{ph}N_{ph}(\epsilon_{ph})\,d\epsilon_{ph} = \bar{\epsilon}_{ph}N_{ph}. \qquad (16.68)$$

*) Donnons une seule explication relative à la dimension de l'expression (16.62). C'est la dimension surface·énergie^{-1}, ou encore cm^2/erg, puisque la dimension de σ_T est cm^2, alors que la dimension de $\delta(E_\gamma)$ est celle de $1/E_\gamma$, étant donné que $\int \delta(E_\gamma)\,dE_\gamma = 1$. Il est donc clair que la quantité σ_t est en effet la section efficace (nous utilisons également le terme de section pour $\sigma(E_\gamma,\ \epsilon_{ph},\ E)$ bien qu'il soit plus correct de dire densité énergétique de la section).

(16.65) et (16.67) rendent clair que l'énergie moyenne d'un photon diffusé (photon dur 2) vaut

$$E_\gamma = \frac{4}{3} \epsilon_{ph} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2. \tag{16.69}$$

Un calcul précis (cf. (16.67)) impose ici l'utilisation de la section $\sigma (E_\gamma, \epsilon_{ph}, E)$ déterminée par la formule (16.64). Pourtant, si on néglige le facteur $^4/_3$, la relation (16.69) s'établit facilement par calcul élémentaire qui recourt à la loi de conservation de l'énergie et de l'impulsion. Nous ne décrirons pas ici ce calcul (cf., par exemple, [39]), puisque le résultat (16.69) peut s'obtenir d'une façon encore plus simple à partir des idées ondulatoires ou de la formule de l'effet Doppler. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre 5, l'application de l'effet Doppler fait apparaître le facteur d'ordre $(E/mc^2)^2$ ou, autrement dit, une fréquence calculée sans l'effet Doppler se transforme en une fréquence $\nu \sim \nu_0 (E/mc^2)^2$; pour le rayonnement de freinage magnétique $\nu_0 \sim eH_\perp/2\pi mc$ et $\nu \sim (eH_\perp/2\pi mc)(E/mc^2)^2$ (cf. (5.7) et (5.40)). Dans le cas de la diffusion, $\nu_0 \sim \epsilon_{ph}/h$, $\nu \sim$ $\sim (\epsilon_{ph}/h)(E/mc^2)^2$, et pour $E_\gamma = h\nu$ on obtient l'expression de la forme (16.69).

En comparant les pertes synchrotron du champ magnétique chaotique suivant les directions (dans un tel champ $H_\perp^2 = {}^2/_3 H^2$) avec les pertes Compton (16.67) on trouve l'expression des pertes totales

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{mC} = -\left\{\left(\frac{dE}{dt}\right)_m + \left(\frac{dE}{dt}\right)_C\right\} =$$
$$= \frac{32\pi}{9}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 c \left(\frac{H^2}{8\pi} + w_{ph}\right)\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 =$$
$$= 2{,}65 \cdot 10^{-14} \left(\frac{H^2}{8\pi} + w_{ph}\right)\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \text{erg}/s. \tag{16.70}$$

où $H^2/8\pi + w_{ph}$ est mesurée en erg/cm^3; cette formule a été déjà donnée au chapitre 15 (cf. (15.65)).

Ce résultat qui traduit l'équivalence des pertes d'énergie par rayonnement synchrotron et par effet Compton pour une même énergie du champ magnétique isotrope (en moyenne) et du rayonnement respectivement, n'a rien de fortuit. Il en est ainsi du fait que dans le domaine classique (et la formule (16.67) se rapporte seulement au domaine classique (16.66)) l'intensité du rayonnement est définie par l'accélération de la charge et, par conséquent, par la force que subit cette dernière. Mais dans une onde électromagnétique dans le vide, le champ électrique $E = H$ et pour une particule ultra-relativiste la force de Lorentz (e/c) $[\mathbf{vH}]$ pour $\mathbf{v} \perp \mathbf{H}$ est égale à la force produite par le champ électrique $e\mathbf{E}$. Par ailleurs, pour $v \to c$, c'est justement l'accélération perpendiculaire à la vitesse qui est essentielle; il en résulte que, dans le cas isotrope, les pertes totales

sont déterminées par la densité de l'énergie du champ électromagnétique $(E^2 + H^2)/8\pi$ indépendamment de la composition spectrale du champ (cette composition spectrale détermine pourtant la composition spectrale du rayonnement apparu, dans notre cas, du rayonnement synchrotron et des ondes électromagnétiques diffusées).

Il importe de souligner que lorsque la condition (16.66) est compromise, les pertes Compton augmentent faiblement avec l'énergie. En effet, dans le cas limite,

$$E \gg \frac{(mc^2)^2}{\epsilon_{ph}} \tag{16.71}$$

l'énergie des photons 1 dans le système de référence lié à l'électron vérifie la condition $\epsilon'_{ph} = (E/mc^2)\,\epsilon_{ph} \gg mc^2$. Dans ce cas la section totale de la diffusion qu'on peut tirer de (16.59) est de la forme (cf. [1, 3])

$$\sigma_t = 3/8\sigma_T \frac{mc^2}{\epsilon'_{ph}} \left\{ \ln\left(\frac{2\epsilon'_{ph}}{mc^2}\right) + 1/2 \right\}. \tag{16.72}$$

Dans les conditions (16.71), chaque collision associée à la section (16.72) fait émettre un photon gamma *) d'énergie $E_\gamma \sim E$. Ainsi, l'électron perd par diffusion une énergie

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_C \sim \sigma_t N_{ph} cE \approx 3/8c\sigma_T w_{ph} \left(\frac{mc^2}{\bar{\epsilon}_{ph}}\right)^2 \ln\left(\frac{2E\bar{\epsilon}_{ph}}{m^2c^4} + 1/2\right) \approx$$

$$\approx 10^{-14} \left(\frac{mc^2}{\bar{\epsilon}_{ph}}\right)^2 w_{ph} \ln\left(\frac{2E\bar{\epsilon}_{ph}}{m^2c^4}\right) \text{erg/s.} \tag{16.73}$$

qui rend compte que $\bar{\epsilon}'_{ph} \sim (E/mc^2)\,\bar{\epsilon}_{ph}$ et $w_{ph} = N_{ph}\bar{\epsilon}_{ph}$.

Comme il se doit, pour $(E/mc^2)\,(\bar{\epsilon}_{ph}/mc^2) \sim 1$, les pertes (16.67) et (16.73) sont les mêmes quant à l'ordre de grandeur. De la sorte l'augmentation des pertes Compton est proportionnelle au carré de l'énergie E^2 seulement tant que $E \leqslant (mc^2)^2/4\epsilon_{ph}$. Quant au cas limite (16.71), les pertes Compton sont pratiquement constantes.

Dans la plupart des cas qui se sont présentés jusque-là en astrophysique, la condition (16.66) est observée (comme nous l'avons dit, dans la diffusion sur les photons optiques de $\bar{\epsilon}_{ph} \sim 1$ eV, cette condition est de la forme $E \ll 10^{11}$ eV, alors que l'énergie des électrons relativistes responsables du rayonnement radio cosmique observé est ordinairement $E \leqslant 10^{10}$ eV). On peut pour autant indiquer dès à présent les exceptions importantes. Premièrement, on observe dans plusieurs sources (Nébuleuse du Grabe, Vierge A, quasars) le rayon-

---

*) Dans la diffusion des électrons sur les photons sous les conditions (16.71), en plus des photons peuvent se former des paires électron-positron e^-, e^+. Les pertes énergétiques correspondantes se distinguent des pertes (16.73) par le facteur d'ordre $2\cdot10^{-3} \ln(E\bar{\epsilon}_{ph}/m^2c^4)$. Dans la plupart des cas connus, ce facteur est sensiblement inférieur à l'unité.

nement synchrotron optique dont la responsabilité incombe aux électrons de haute énergie ($E \gg 10^{10}$ eV). C'est pourquoi pour de tels électrons la condition (16.66) sera compromise même avec $\varepsilon_{ph} \sim 1$ eV. Deuxièmement, on a découvert un puissant rayonnement X des sources galactiques et extragalactiques. Dans ces sources et dans leur voisinage, la densité de l'énergie des photons X de $\varepsilon_{ph} \sim 3\text{-}5 \cdot 10^3$ eV ($\varepsilon_{ph} \sim \varkappa T$, $T \sim 5 \cdot 10^7$ °K) est très grande. La condition (16.66) de la diffusion sur les photons de ce type est de la forme $E \ll 10^7$ eV et elle n'est déjà plus observée pour les électrons responsables du rayonnement radio cosmique. Ainsi, en astronomie des rayons X et gamma, la limitation de (16.66) au domaine classique n'a pas et de loin le caractère universel.

Passons à la question du spectre énergétique des photons diffus (durs). Désignons comme toujours par $J_e(E)\,dE$ l'intensité des électrons relativistes, c.-à-d. le nombre d'électrons qui traversent par unité de temps une aire unité (normalement à l'aire) dans un angle solide unité, leur marge d'énergie étant E, $E + dE$. Alors, l'intensité des rayons gamma est égale (cf. (16.11)) à

$$J_\gamma(E_\gamma) = \int_0^L dR \int_{E_\gamma}^\infty J_e(E, \mathbf{R})\,dE \int_0^\infty \sigma(E_\gamma, \epsilon_{ph}, E)\, N_{ph}(\epsilon_{ph}, \mathbf{R})\, d\epsilon_{ph} =$$

$$= \tilde{N}_{ph}(L) \int_{E_\gamma}^\infty \sigma(E_\gamma, E)\, J_e(E)\, dE, \qquad (16.74)$$

où pour passer à la dernière expression on admet que dans le rayon de vision J_e ne dépend pas de $\mathbf{R}$ (l'intégration sur dR se fait le long du rayon visuel) et

$$\tilde{N}_{ph}(L)\,\sigma(E_\gamma, E) = \int \sigma(E_\gamma, \epsilon_{ph}, E)\, N_{ph}(\epsilon_{ph}, \mathbf{R})\, d\epsilon_{ph}\, dR. \qquad (16.75)$$

Pour le spectre monoénergétique des électrons, $J_e(E) = J_0\delta(E - E_0)$ et l'intensité $J_\gamma(E_\gamma)$ est déterminée par l'expression (16.64) pour $\sigma(E_\gamma, \epsilon_{ph}, E_0)$. Il arrive plus souvent de tomber sur le spectre puissance

$$J_e(E) = K_J E^{-\gamma}. \qquad (16.76)$$

Il est évident que, pour la distribution isotrope des électrons relativistes à concentration $N(E) = K_e E^{-\gamma}$,

$$J_e(E) = \frac{c}{4\pi} N(E).$$

Pour éviter des calculs lourds dans la recherche de $J_\gamma(E_\gamma)$ du spectre puissance (16.76) (la marche de ces calculs est parfaitement

claire), utilisons d'abord comme section mise en moyenne suivant le spectre des photons thermiques (mous) l'expression

$$\left.\begin{aligned} \sigma(E_\gamma, E) &= \frac{1}{N_{ph}} \int_0^\infty \sigma(E_\gamma, \epsilon_{ph}, E) N_{ph}(\epsilon_{ph})\, d\epsilon_{ph} = \\ &= \sigma_T \delta\left(E_\gamma - \frac{4}{3}\bar{\epsilon}_{ph}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2\right), \\ \sigma_T &= \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2, \quad N_{ph} = \int N_{ph}(\epsilon_{ph})\, d\epsilon_{ph}. \end{aligned}\right\} \quad (16.77)$$

Autrement dit considérons que tous les photons durs ont une énergie moyenne (16.69), alors que conformément à (16.77) la section totale de la diffusion est égale à σ_T. Ainsi, la section (16.77) conduit à l'avance aux expressions correctes pour $\int \sigma_T(E_\gamma, E)\, dE_\gamma$ et $\int E_\gamma \sigma(E_\gamma, E)\, dE_\gamma$.

En portant (16.77) dans (16.74) on obtient pour la distribution uniforme de toutes les grandeurs sur la longueur L (c'est pourquoi $\tilde{N}_{ph}(L) = N_{ph}L$)

$$\begin{aligned} J_\gamma(E_\gamma) &= \sigma_T N_{ph} L \int J_e(E)\, \delta\left(E_\gamma - 4/3\,\bar{\epsilon}_{ph}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2\right) dE = \\ &= \frac{\sqrt{3}\, N_{ph} L \sigma_T mc^2}{4\sqrt{\bar{\epsilon}_{ph} E_\gamma}} J_e\left(mc^2 \sqrt{\frac{3E_\gamma}{4\bar{\epsilon}_{ph}}}\right) = \\ &= 1/2 N_{ph} L \sigma_T (mc^2)^{1-\gamma} (4/3\bar{\epsilon}_{ph})^{1/2(\gamma-1)} K_J E_\gamma^{-1/2(\gamma+1)}. \end{aligned} \quad (16.78)$$

Le calcul décrit est tout à fait analogue au calcul du chapitre 5 appliqué au rayonnement synchrotron (cf. (5.51)). Le calcul précis [207, 213] fait apparaître dans (16.78) le facteur numérique $f(\gamma)$. Ce facteur vaut 0,84 ; 0,86 ; 0,99 et 1,4 pour $\gamma = 1, 2, 3$ et 4 respectivement.

Pour le rayonnement thermique, $\bar{\epsilon}_{ph} = 2{,}7\,\varkappa T$, où T est la température du rayonnement. A titre d'exemple, indiquons que pour $T = 5000$°K ($\bar{\epsilon}_{ph} = 1{,}2$ eV)

$$\begin{aligned} J_\gamma(E_\gamma) &= 2{,}8\cdot 10^{-25} (7{,}9\cdot 10^{-2})^{\gamma-1} \times \\ &\times f(\gamma)\, L w_{ph} K_J E_\gamma^{-1/2(\gamma+1)} \frac{\text{photon}}{\text{cm}^2\cdot\text{sr}\cdot\text{GeV}}, \end{aligned} \quad (16.79)$$

où $w_{ph} = N_{ph}\bar{\epsilon}_{ph}$; E_γ est mesurée en GeV et K_J, en unités $(\text{GeV})^{\gamma-1}(\text{cm}^2\cdot\text{s}\cdot\text{sr})^{-1}$.

S'il s'agit non pas de l'intensité suivant le nombre de particules, mais de l'intensité suivant l'énergie, alors $I_\gamma(E_\gamma) = E_\gamma J_\gamma(E_\gamma)$. Dans le cas du spectre puissance (16.76), il est évident que $I_\gamma(E_\gamma) \sim$

$\backsim E_\gamma^{-1/2(\gamma-1)} \backsim \nu^{-\alpha}$, $\alpha = {}^1/_2\,(\gamma - 1)$. Comme il fallait s'attendre pour le rayonnement Compton sous la condition (16.66) (nous avons vu que sous cette condition les rayonnements synchrotron et Compton s'apparentent), le résultat obtenu coïncide avec la relation (5.50) du rayonnement synchrotron.

Nous avons déjà dit que dans les conditions cosmiques le rayonnement X synchrotron de freinage dans un certain sens « n'est pas typique », mais il est observé et probablement sa part dans les études ultérieures ne cessera de croître. En général, il est évident que le rayonnement synchrotron peut posséder une fréquence aussi grande que l'on veut, sa description pouvant se faire par théorie classique tant que

$$h\nu \ll E. \tag{16.80}$$

Le rayonnement synchrotron cosmique appartient le plus souvent à la gamme des ondes radio du fait que dans les régions correspondantes l'intensité du champ magnétique n'est pas grande ($H \leqslant 10^{-3}$ Oe), de même que l'énergie des électrons E. Ainsi, l'intensité du rayonnement synchrotron de l'électron d'énergie totale $E \gg mc^2$ est maximale à la fréquence (cf. (5.40) et (16.2))

$$\nu_m = 1{,}2\cdot 10^{-6} H_\perp \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 = 4{,}6\cdot 10^{-6} H_\perp\,(E\,(\text{eV}))^2\ \text{Hz}. \tag{16.81}$$

Même pour $H_\perp = H \sin\chi = 10^{-3}$ Oe et $E = 10^{10}$ eV la fréquence $\nu_m = 4{,}6\cdot 10^{11}$ Hz ($\lambda_m = c/\nu_m \sim 6{,}5\cdot 10^{-2}$ cm). Ainsi, le rayonnement synchrotron cosmique optique et X apparaît soit en présence des électrons de très haute énergie $E > 10^{11}$ eV (Nébuleuse du Crabe, Vierge A), soit lorsque l'intensité du champ magnétique est très grande ($H \gtrsim$ 10-100 Oe) et en présence des électrons d'énergie atteignant 10^{9}-10^{10} eV (probablement ceci est caractéristique des quasars, sans rien dire des pulsars avec leurs champs magnétiques formidables).

Pour évaluer les champs et les énergies qui déterminent l'émission des ondes de fréquences différentes, il est commode d'appliquer la formule déduite de (16.81)

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{H_{\perp,2}}{H_{\perp,1}}\frac{E_2^2}{E_1^2}. \tag{16.82}$$

Soit, par exemple, $\nu_1 = 3\cdot 10^{8}$ Hz ($\lambda_1 = c/\nu_1 = 1$ m) dans le champ $H_{\perp 1} = 3\cdot 10^{-6}$ Oe typique de la Galaxie. Alors, d'après (16.81) l'énergie des électrons rayonnants $E_1 \sim 5\cdot 10$ eV. Dans ce même champ $H_{\perp,2} = H_{\perp,1}$ les ondes de fréquences optiques $\nu_2 \sim$ $\sim 10^{14}$-10^{15} Hz ($\lambda = 0.3$-3μ) ne peuvent être émises que par les électrons d'énergie $E_2 \sim 5\cdot 10^{12}$ eV. Pour les rayons X, $\nu_2 \sim 10^{18}$ Hz et, par conséquent, pour un champ magnétique constant l'énergie des électrons doit être $E_2 \sim 3\cdot 10^{14}$ eV.

Il faut retenir que les pertes synchrotron sont proportionnelles à $H_\perp^2 E^2$ (cf. (4.39)) ; il en résulte que les particules de très haute énergie ou se déplaçant dans un fort champ magnétique sont rapidement ralenties. Pour évaluer l'énergie et la « durée de vie » dans un champ magnétique il est commode de faire appel aux formules (4.41) et (4.42). A cet effet, dans la formule (4.42) l'énergie de l'électron peut être exprimée par la fréquence caractéristique de son rayonnement (16.81), en fournissant ainsi une liaison directe avec la fréquence observée et la durée de vie caractéristique (temps nécessaire pour que l'énergie se dédouble) des électrons émetteurs

$$T_m = \frac{5\cdot 10^8}{H_\perp^2}\frac{mc^2}{E}\ \text{s} \approx \frac{5{,}5\cdot 10^{11}}{H_\perp^{3/2}\nu^{1/2}} \approx \frac{1{,}8\cdot 10^4}{H^{3/2}\nu^{1/2}}\ \text{années.} \qquad (16.83)$$

Ici $H_\perp$ se mesure en œrsteds et ν, en hertz. La durée de vie T_m exprimée à travers la fréquence est, bien entendu, quelque peu conventionnelle, puisqu'on a choisi comme ν la fréquence associée au maximum du spectre du rayonnement des électrons monoénergétiques.

Dans le champ $H_\perp = 3\cdot 10^{-6}$ Oe la durée T_m des électrons d'énergie $5\cdot 10^9$; $5\cdot 10^{12}$ et $3\cdot 10^{14}$ eV est $2\cdot 10^8$; $2\cdot 10^5$ et $3\cdot 10^3$ années respectivement. Pour notre Galaxie et en général, pour les galaxies normales où la valeur $H_\perp = 3\cdot 10^{-6}$ Oe peut être considérée comme typique, la durée caractéristique T_m de l'ordre de 10^5 années, et d'autant plus de 10^3 années, est très petite ; il est donc naturel que le rayonnement synchrotron optique et X est faible. La situation peut changer seulement dans les conditions d'une injection puissante dans l'espace interstellaire des électrons de haute énergie issus d'une source quelconque, par exemple des enveloppes de supernovae.

Nous avons déjà dit que le rayonnement synchrotron optique et X peut être complètement décrit par les formules données précédemment (cf. chapitre 5; la condition (16.80) est considérée comme remplie). Il devient même possible de simplifier du fait que les fréquences élevées permettent de négliger l'écart de l'unité de l'indice de réfraction $\tilde{n}(\omega)$ dans la région émettrice, ainsi que d'ignorer la réabsorption et la rotation du plan de polarisation dans le plasma cosmique. Ce ne sont que l'absorption du rayonnement sur son parcours de la source à la Terre ou dans la source elle-même (gaz, poussière) qu'il faut prendre en considération.

Par commodité donnons pourtant quelques expressions utiles pour le calcul. Dans le domaine des rayons X et parfois en optique on recourt souvent non au flux d'énergie mais au flux ou à l'intensité suivant le nombre de particules (photons) que nous notons F_ν et J_ν respectivement. Il est évident que le passage se réalise par division des quantités énergétiques par l'énergie du photon $h\nu$.

Ainsi, d'après (5.48), l'intensité suivant le nombre de photon est

$$J(\nu) = \frac{I_\nu}{h\nu} = 3{,}26 \cdot 10^{-15} a(\gamma)\, L K_e H^{1/2(\gamma+1)} \times$$

$$\times \left(\frac{6{,}26 \cdot 10^{18}}{\nu} \right)^{1/2(\gamma+1)} \frac{\text{photons}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{sr} \cdot \text{Hz}}, \qquad (16.84)$$

ou, si l'on passe de la fréquence ν à l'énergie d'un photon $\epsilon_{ph} = h\nu$, exprimée en eV,

$$J(\epsilon_{ph}) = J(\nu) \frac{d\nu}{d\epsilon_{ph}} =$$

$$= 0{,}79 a(\gamma)\, L K_e H^{1/2(\gamma+1)} \left(\frac{2{,}59 \cdot 10^4}{\epsilon_{ph}} \right)^{1/2(\gamma+1)} \frac{\text{photons}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{sr} \cdot \text{eV}}; \qquad (16.85)$$

ici L est mesurée en cm ; K_e, en erg $^{\gamma-1} \cdot \text{cm}^{-3}$; H en Oe et ϵ_{ph} en eV.

D'une façon analogue, le flux de photons issus d'une source discrète (cf. (5.59)) vaut

$$F(\nu) = \frac{\Phi(\nu)}{h\nu} =$$

$$= 3{,}26 \cdot 10^{-15} a(\gamma) \frac{V K_e H^{1/2(\gamma+1)}}{R^2} \left(\frac{6{,}26 \cdot 10^{18}}{\nu} \right)^{1/2(\gamma+1)} \frac{\text{photons}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Hz}}, \qquad (16.86)$$

ou, si on le rapporte à l'énergie d'un photon $\epsilon_{ph} = h\nu = 4{,}14 \cdot 10^{15}$ eV,

$$F(\epsilon_{ph}) = 0{,}79 a(\gamma) \frac{V K_e H^{1/2(\gamma+1)}}{R^2} \left(\frac{2{,}59 \cdot 10^4}{\epsilon_{ph}} \right)^{1/2(\gamma+1)} \frac{\text{photons}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Ve}}. \qquad (16.87)$$

Ensuite, si on peut admettre que le spectre électronique est le même dans tout le volume de la source, il est commode d'appliquer l'expression suivante pour la relation entre les flux de rayonnement de fréquences différentes ν_1 et ν_2 (cf. (5.59) ou (16.86))

$$\frac{\Phi_2(\nu_2)}{\Phi_1(\nu_1)} = \frac{V_2}{V_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \right)^{1/1(\gamma+1)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^{1/2(\gamma-1)}. \qquad (16.88)$$

On adopte ici que le rayonnement de fréquence ν_1 apparaît dans le volume V_1 de la source, où l'intensité du champ magnétique est H_1, alors que le rayonnement de fréquence ν_2 vient du volume V_2 dont le champ est H_2. Alors, s'il s'agit de l'émission des électrons de même énergie $E_2 = E_1$, les fréquences ν_1 et ν_2 sont associées par la relation (16.82) et le rapport entre les flux s'écrit

$$\frac{\Phi_2(\nu_2)}{\Phi_1(\nu_1)} = \frac{V_2 H_2}{V_1 H_1}. \qquad (16.89)$$

Les formules (16.88) et (16.89) sont utiles si dans un petit domaine V_2 de la source de volume total V_1 le champ $H_2 \gg H_1$, alors que le spectre des électrons comporte une coupure du côté des hautes énergies, de façon que les électrons du volume V_1 n'émettent pas aux fréquences $\nu_2 \gg \nu_1$, et que le rayonnement du volume V_2 aux fré-

quences ν_1 est faible par suite de la petitesse de ce volume. Le rapport observé entre les flux de fréquences ν_2 et ν_1 est déterminé alors par le rapport des flux issus des volumes V_2 et V_1. Cette situation peut avoir lieu, par exemple, dans le cas d'une nébuleuse ayant dans la région centrale un domaine à champ magnétique très fort, disons, autour d'un pulsar.

Une particularité caractéristique du rayonnement synchrotron est que dans un champ ordonné ce rayonnement est très polarisé. Ainsi, pour le spectre puissance des électrons $N_e(E) = K_e E^{-\gamma}$ le degré de polarisation dans un champ uniforme (cf. (5.46) s'écrit

$$\Pi_0 = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{\gamma + 1}{\gamma + 7/3}. \qquad (16.90)$$

Comme nous l'avons dit, dans le domaine des rayons X il n'existe pas de facteurs dépolarisateurs conditionnés par la présence du milieu (formes différentes de la rotation de Faraday). C'est pourquoi, l'exposant γ étant donné, le degré de polarisation ne reflète que le niveau d'ordonnancement du champ et atteint la valeur maximale de (16.90) dans un champ homogène.

Le rayonnement de freinage n'est polarisé que dans le cas où la fonction de distribution des électrons (ou, en toute rigueur, la fonction de distribution de la vitesse relative des particules en collision) est anisotrope. Par exemple, une polarisation du rayonnement de freinage apparaît en présence du flux dirigé des électrons diffusés dans un plasma froid. Dans les conditions cosmiques, si on ne parle pas du Soleil et de certaines régions stationnaires, il n'y a pas de raisons spéciales de prévoir dans la distribution des électrons suivant les vitesses une anisotropie tant soit peu forte (cf. chapitre 15; qui plus est, en présence des collisions la relaxation de la distribution anisotrope des électrons suivant les vitesses, c.-à-d. leur isotropisation, sera encore plus rapide que dans le cas sans collisions). Dans la diffusion du rayonnement électromagnétique sur les particules, le degré de polarisation peut en principe être élevé. Ceci est bien connu, par exemple, pour la diffusion de la lumière dans les gaz ou le plasma (cf. chapitre 14). Pourtant, dans le cas de la diffusion des photons mous, non polarisés, sur les électrons relativistes avec production des photons durs (rayons X et gamma), le degré de polarisation de ces derniers est de l'ordre de $(mc^2/E)^2$, c.-à-d. très faible.

Pour tous les autres mécanismes du rayonnement sauf le rayonnement synchrotron et synchrotron Compton (cf. fin du chapitre 15) on n'a pas non plus à s'attendre, dans les conditions cosmiques, à la découverte d'une polarisation perceptible. Par là même, la découverte de la polarisation du rayonnement X et gamma cosmiques, comme dans le cas du rayonnement radio cosmique, autorise à penser que le rayonnement correspondant est de nature synchrotron ou synchrotron Compton. En particulier, la nature synchrotron (et non

de freinage) du rayonnement X de la Nébuleuse du Crabe n'a été définitivement établie que par l'observation de la polarisation du rayonnement X.

Si la découverte de la polarisation du rayonnement X témoigne de sa nature synchrotron, la réciproque, bien entendu, ne sera pas vraie: il suffit de dire que, dans le champ magnétique chaotique, le rayonnement synchrotron n'est pas polarisé *). Ainsi, établir la nature du rayonnement X cosmique n'est pas si facile. Le critère essentiel, outre la polarisation, est la forme du spectre. Celui du rayonnement de freinage d'un plasma chaud et exponentiel (cf., par exemple, (16.24); de plus, dans le cas du plasma chaud, on peut observer en principe des raies du rayonnement X caractéristique des éléments lourds (en premier lieu du fer). Le rayonnement X Compton est produit par les électrons relativistes dont le spectre est ordinairement un spectre puissance (16.76) à exposant γ; de plus, pour le rayonnement X, $J_\gamma(E_\gamma) \backsim E^{-\beta}$, $\beta = {}^1/_2(\gamma + 1)$ (cf. (16.78) et $I_\gamma(E_\gamma) \backsim E_\gamma^{-\alpha}$, $\alpha = {}^1/_2(\gamma - 1)$. D'autre part, pour un objet connu donné, les électrons relativistes peuvent produire également un rayonnement synchrotron, dont le spectre permet de déterminer γ (rappelons encore une fois que pour le rayonnement synchrotron, comme pour le rayonnement Compton, $I(\gamma) \backsim \nu^{-\alpha}$, $\alpha = {}^1/_2(\gamma - 1)$, cf. chapitre 5). Dans cette voie, comme nous l'avons déjà dit, le champ du rayonnement, siège de la diffusion Compton, étant connu, on peut également trouver un champ magnétique dans la même région émettrice. Malheureusement, en pratique cela n'est pas aussi simple: tout d'abord, il faut constater que les spectres puissance ne le sont pas d'une façon rigoureuse et les mêmes électrons relativistes produisent le rayonnement synchrotron et Compton d'une α donné seulement dans les plages des fréquences $\Delta\nu$ limitées, inconnues à l'avance (gammes radio et X). Pour autant, les grands progrès à venir pourraient être enregistrés précisément dans la voie des explorations complexes de la gamme la plus large des fréquences (radio, optique, X) combinées aux mesures polarimétriques, ainsi qu'aux mesures à pouvoir de résolution angulaire élevé. Cette dernière exigence est due au fait que le faible pouvoir de résolution angulaire, actuellement caractéristique de la plupart des observations astronomiques des rayons X, non seulement ne permet pas d'élucider la structure des sources discrètes des rayons X, mais encore empêche de mettre en lumière la nature pour le moment obscure du fond X qui peut être produit partiellement (et, en principe, presque complètement) par un ensemble des sources discrètes, non résolues.

---

*) Il faut en outre avoir en vue que les mesures polarimétriques dans le domaine des rayons X, surtout dans les conditions du degré de polarisation peu élevé et pour les flux du rayonnement X cosmique relativement faibles, sont très difficiles à réaliser et pratiquement ne se font presque pas.

L'état actuel de l'astronomie X qui dès à présent connaît des succès brillants (découverte des sources puissantes de rayons X: « étoiles X », y compris les pulsars, etc.), mais qui dans l'ensemble vit encore le stade de devenir et d'essor rapide, rend particulièrement inutile la discussion des données d'observation dans le cadre du présent ouvrage [206, 214]. C'est pourquoi nous terminerons ce chapitre seulement par quelques remarques faites à titre d'orientation.

Les sources des rayons X observées (étoiles X) appartiennent à plusieurs types. Au sein de la Galaxie, elles sont de deux espèces: les enveloppes des supernovae (au fond, ce sont des sources étendues) et les étoiles X au sens propre du mot, sources brillantes dans la gamme des X et pratiquement ponctuelles. Dans la plupart des cas, et peut-être presque toujours, ces dernières font partie des systèmes d'étoiles doubles; on y rapporte les pulsars X et les *fluctuars* (ces derniers sont peut être ce qu'on appelle *trous noirs*); l'exception est faite par le pulsar NP 0532 de la Nébuleuse du Crabe qui est une source *X ponctuelle* (étoile à neutrons et sa magnétosphère) qui ne fait pas partie d'un système double. Le rayonnement X des enveloppes des supernovae est soit un rayonnement synchrotron (Nébuleuse du Crabe), soit surtout un rayonnement de freinage du plasma chaud (température caractéristique 10^6 à 10^8 °K, à laquelle correspond l'énergie moyenne des particules de 10^2 à 10^4 eV). L'existence des sources X puissantes, dans les systèmes doubles serrés, est parfaitement claire : ce sont des cas d'une accrétion intense, c.-à-d. de l'écoulement du plasma de l'étoile plus légère à l'étoile plus lourde. Dans ces conditions, surtout dans le cas d'une étoile compacte (naine blanche, étoile à neutrons), les flux de plasma en s'approchant de sa photosphère acquièrent une grande vitesse ; leur freinage (leur « chute » sur l'étoile) fait que le plasma s'échauffe fortement ($T \sim 10^7$ à 10^9 °K). Si le champ magnétique de l'étoile est assez fort, il peut s'avérer que le rayonnement synchrotron est tout aussi important que le rayonnement de freinage.

La puissance (la luminosité X) des sources X galactiques L_X atteint 10^{37}-10^{38} erg/s *), ce qui est de 4 à 5 ordres supérieur à la luminosité totale du Soleil $L_\odot = 3{,}86 \cdot 10^{33}$ erg/s. Pour $L_X \sim \sim 10^{38}$ erg/s et un rayonnement isotrope, le flux de rayons X frappant la Terre est égal à

$$\Phi_X = \frac{L_X}{4\pi R^2} \sim \frac{L_X/10^{38}}{[R\,(\mathrm{pc})]^2} \sim \frac{1}{(R\,(\mathrm{pc}))^2}\,\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm}^2\cdot\mathrm{s}}, \qquad (16.91)$$

où R (pc) est la distance à la source en parsecs.

*) Assurément, sous ce rapport notre Galaxie ne fait pas exception. Des sources analogues sont déjà découvertes dans les Nuages de Magellan et existent évidemment dans d'autres galaxies.

En accord avec cette estimation pour la Nébuleuse du Crabe ($R \approx 2000$ pc) dans toute la gamme X, $\Phi_X \approx 2 \cdot 10^{-7}$ erg/cm²·s (le flux des photons d'énergie 2 à 10 keV est $F_X \approx 2$ photons/cm²·s). A titre de comparaison notons qu'un corps noir de température T (en degrés) émet par unité de surface un flux

$$\Phi_0 = \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{\pi^2 \varkappa^4}{60 \hbar^3 c^2} = 5{,}67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{degrés}^4}, \qquad \Phi(R) = \Phi_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2, \tag{16.92}$$

où $\Phi(R)$ est le flux émis par une sphère noire de rayon r, observée à la distance R.

Le flux du rayonnement solaire qui frappe la Terre est

$$\Phi_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi R^2} = 1{,}4 \cdot 10^6 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}$$

($R \approx 1{,}5 \cdot 10^{13}$ cm, $L_{\odot} = 4\pi r_{\odot}^2 \Phi_{\odot}$, $T_{\odot} \approx 5700$ °K), mais le rayonnement se concentre dans la partie optique du spectre. Le flux des rayons X du Soleil calme est égal à $\Phi_{\odot, X} \sim 10^{-4}$-$10^{-5}$ erg/cm²·s et seulement pendant des explosions puissantes, il atteint une valeur de $\Phi_{\odot, X} \sim 1$ erg/cm²·s. Il s'ensuit que le rayonnement X de l'étoile la plus proche ($R \sim 4 \cdot 10^{18}$ cm), si elle émet comme le Soleil, sera très faible: $\Phi_X \sim 10^{-11}$ $\Phi_{\odot, X} \leqslant 10^{-11}$ erg/cm²·s. C'est justement pourquoi la découverte, en 1962, d'une « étoile » X brillante dans le Scorpion (Sco XR-1) telle que $\Phi_X \sim 10^{-6}$ erg/cm²·s a fait sensation. Puisque Sco XR-1 se trouve à la distance $R \leqslant 500$ pc, sa luminosité X totale ne dépasse probablement pas celle de la Nébuleuse du Crabe et peut-être lui est d'un ordre inférieure. Bien entendu, une grande luminosité X est liée à une énergie relativement élevée des électrons et, notamment, aux sources thermiques à des températures élevées. Ainsi, une étoile de mêmes dimensions que le Soleil de température superficielle $T \sim 6 \cdot 10^6$ °K aurait la luminosité formidable de $L_X \sim 3 \cdot 10^{45}$ erg/s et encore à peu près dans la gamme des rayons X (le maximum d'intensité, dans le spectre du corps noir, tombe sur la longueur d'onde $\lambda_m = \frac{hc}{4{,}965 \varkappa T} \approx \frac{3 \cdot 10^7}{T\,(°\text{K})}$ Å).

Une étoile ordinaire ne peut avoir une température aussi élevée (il s'agit de la photosphère qui émet à peu près comme un corps noir) du fait d'une perte d'énergie par rayonnement pratiquement trop grande, impossible à restituer. Pour une étoile à neutrons de rayon $r \sim 7 \cdot 10^5$ cm $\sim 10^{-5}$ $r_{\odot}$, pour $T \sim 6 \cdot 10^6$ °K déjà $L_X \sim 3 \cdot 10^{35}$ erg/s, ce qui pour quelque temps est admissible. Pour ce qui est des sources thermiques moins compactes, elles sont « minces », ou comme on dit, « optiquement minces », mais nous évitons d'employer ce terme parce que, pour la gamme des ondes X, il peut prêter à confusion.

Si pour cette raison on utilise les formules (16.36) et (16.37), on voit aisément que pour $T \sim 6 \cdot 10^6$ °K, la luminosité $L_X \sim 10^{38}$ erg/s sera celle, par exemple, d'un nuage de plasma de volume $V \sim$ $\sim 10^{30}$ cm³ de masse relativement petite $M \sim 10^{22}$ g $\sim 10^{-11}$ $M_{\odot}$ (la masse du Soleil $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}$ g) ; de plus, la concentration des électrons dans ce nuage $N \sim \sqrt{\overline{N^2}} \sim 10^{16}$ cm^{-3}.

Les sources X discrètes extragalactiques sont des galaxies (en particulier, des radiogalaxies), des quasars et des amas des galaxies. La luminosité X d'une galaxie normale (y compris de notre Galaxie) ne dépasse pas 10^{39}-10^{40} erg/s. C'est pourquoi le flux issu d'une telle galaxie se trouvant à la distance $R \sim 10^7$ pc (distance à la radiogalaxie Vierge A ≡ NGC 4486 ≡ 87) serait $\Phi_X \sim 10^{-12}$-10^{-13} erg/cm²·s (cf. (16.91). Or, la radiogalaxie M 87 émet un rayonnement X sensiblement plus puissant, de façon que pour elle $L_X \sim 10^{43}$-10^{44} erg/s. Tant dans ce cas que dans celui d'autres sources puissantes de rayons X : galaxies, quasars et amas de galaxies, le rayonnement ne se ramène pas évidemment à l'ensemble du rayonnement des « étoiles X » ; il est produit également par les électrons relativistes (mécanismes synchrotron et Compton) et par le plasma chaud (mécanisme de rayonnement de freinage) qui remplissent la galaxie, l'amas ou la « couronne » du quasar.

En principe tout est particulièrement « simple » dans le cas du plasma chaud d'une source étendue du type de l'amas des galaxies. Par exemple, à la température $T \sim 6 \cdot 10^6$ °K, le plasma de volume $V \sim 3 \cdot 10^{73}$ cm³ a une luminosité $L_X \sim 10^{44}$ erg/s pour $N \sim 10^{-3}$ cm^{-3}, à quoi correspond la masse $M \sim 2 \cdot 10^{-24}$ $NV \sim 10^{13}$ $M_{\odot}$; pour un amas de galaxies, une telle masse est encore admissible. Mais déjà cet exemple montre qu'il n'est pas aisé d'expliquer les luminosités formidables des sources puissantes de rayons X extragalactiques, ou pour être plus exact, une telle explication impose des hypothèses très poussées qui doivent être vérifiées, et peuvent l'être en principe, par tout une série de méthodes.

Tout ceci montre d'autre part la valeur potentielle exceptionnelle de l'astronomie des rayons X, par exemple pour l'étude du plasma chaud dans l'espace (cf. également [214a]).

Outre les sources discrètes, on observe un fond constitué de rayons X, c.-à-d. un rayonnement qui vient de toutes les directions et qui dans la sphère céleste n'a aucune structure « granulée » tant soit peu exprimée. Il n'est pas exclu non plus que ce fond est lié en partie ou complètement à l'ensemble des sources discrètes inséparables par les moyens actuels. Par ailleurs, il est peut-être possible et même probable, qu'un fond de rayons X (vrai) se forme dans l'espace interstellaire et surtout intergalactique. Ce fond serait produit par le rayonnement de freinage du gaz chaud intergalactique et (ou) la diffusion Compton des électrons relativistes sur le rayonnement thermique cosmologique (dans l'espace intergalactique), et dans la Gala-

xie, de plus sur le rayonnement d'une autre nature (on a en vue, notamment, la diffusion Compton sur les photons infrarouges et optiques).

Le spectre du fond X (dans le domaine des énergies $E_X > 1$ KeV, $\lambda < 10$ Å), de même que celui des sources discrètes, est décroissant; son intensité diminue avec l'augmentation de l'énergie des photons $E_X = h\nu_X$. La forme du spectre n'est pas encore établie sûrement, mais nous donnerons à titre d'exemple le spectre suivant ($20 < E_X < 1000$ KeV) *)

$$J_X(E_X) = 25\left(\frac{E_X}{1\ \text{KeV}}\right)^{-2} \frac{\text{photons}}{\text{cm}^2\cdot\text{s}\cdot\text{sr}\cdot\text{KeV}}, \qquad (16.93)$$

où l'énergie des photons se mesure en KeV (au fond, ceci est traduit par la forme de l'écriture, mais nous le répétons pour éliminer toute confusion).

Dans la littérature, on discute beaucoup, sans avoir encore trouvé une solution, de la forme du spectre pour $E_X <$ 20-40 KeV; ainsi, on a évoqué l'existence pour $E_X + 40$ KeV d'une « brisure » dans le spectre, alors que le spectre lui-même, dans l'intervalle $0{,}2 < E_X < 20$ KeV, se présenterait sous la forme

$$J_X(E_X) = 15\,(E/1\ \text{KeV})^{-1{,}8}\ \text{photons/cm}^2\cdot\text{s}\cdot\text{sr}\cdot\text{KeV}.$$

Voici une autre approximation du spectre (cf. [214]):

$$J_X(E_X) = 12{,}4\,(E_X/1\ \text{KeV}^{-1{,}7\pm0{,}2},$$
$$1 < E_X < 40\quad \text{KeV},$$
$$J_X(E_X) = 20\,(E/\text{KeV})^{-2}\ \text{photons/cm}^2\cdot\text{s}\cdot\text{sr}\cdot\text{KeV},$$
$$E_X > 60\quad \text{KeV}.$$

Le mécanisme qui fait apparaître le fond de rayons X n'est pas encore clair, quant aux possibilités qui se présentent, nous les avons déjà examinées.

L'astronomie des rayons X, c.-à-d. l'étude du rayonnement X cosmique et la comparaison des données correspondantes avec la théorie et avec toute autre information astronomique ouvre devant l'astronomie dans son ensemble des horizons exceptionnels et présente des possibilités très importantes de l'étude du plasma cosmique chaud et des électrons cosmiques relativistes. L'intérêt de cette méthode est difficile à surestimer.

---

*) Ici on a évidemment pénétré dans le domaine des ondes gamma molles et avec la même raison on peut au lieu de $J_X(E_X)$ écrire $J_\gamma(E_\gamma)$. Constatons que, dans la littérature, cette intensité différentielle suivant le nombre de photons est également notée dN/dE, $N(E)$, etc.

CHAPITRE 17

ASTRONOMIE DES RAYONS GAMMA

Rayonnement gamma produit par la composante protono-nucléaire des rayons cosmiques. Exemple des Nuages de Magellan et de la partie centrale de la Galaxie. Absorption des rayons X et gamma

Deux mécanismes importants du rayonnement gamma, à savoir, le rayonnement de freinage et l'effet Compton, ont été examinés au chapitre 16. Il en est de même du mécanisme synchrotron dont l'intérêt est moindre pour le cas des rayons gamma, du fait que pratiquement il ne peut prendre de l'importance que dans les régions à champ très fort, par exemple, au voisinage des pulsars. Pour ce qui est du rayonnement de freinage des électrons relativistes, et surtout de leur diffusion Compton, leur contribution peut être sensible et même jouer un rôle déterminant dans toute la gamme des ondes gamma. Par exemple, dans la diffusion sur des photons optiques ($\epsilon_{ph} \sim 1$ eV), le domaine classique (16.66) s'étend jusqu'aux énergies des électrons $E \sim 5 \cdot 10^{10}$ eV, alors que les photons produits dans ces conditions ont une énergie $E_\gamma \sim \epsilon_{ph} (E/mc^2)^2 \leqslant 10^{10}$ eV (cf. (16.69)). Quant au domaine des énergies des électrons encore plus grandes, surtout dans le domaine quantique (16.71), l'énergie des photons Compton $E_\gamma \sim E$. Par ailleurs, aux hautes énergies, en vertu de grandes pertes, les « conditions d'existence » des électrons sont moins favorables que celles des protons et des noyaux. De plus, l'accélération des électrons dans l'espace est moins efficace que celle des protons, et en tout cas, dans la Galaxie, l'intensité de la composante électronique est de deux ordres inférieure à celle de la composante protonique (cf. chapitre 15). C'est pourquoi on est autorisé d'admettre qu'avec l'augmentation de l'énergie et, peut-être, même déjà pour $E > 50$ MeV (cf. plus loin), le rayonnement gamma cosmique soit engendré essentiellement par la composante protono-nucléaire des rayons cosmiques. Rien n'est encore clair ici sur le plan expérimental, et en général, dans le domaine des observations, l'astronomie des rayons gamma n'est qu'à ses premiers pas (pour le tour d'horizon des données disponibles, cf. [205, 206, 214, 215]).

Tous les mécanismes du rayonnement gamma cosmique présentent de l'intérêt dans tous les domaines d'énergie ; le but que poursuit cette affirmation bien triviale est seulement celui de

dégager une possibilité d'une importance et d'un intérêt particuliers. D'après nous, la possibilité la plus importante est celle d'obtenir par la méthode de l'astronomie gamma des renseignements sûrs sur la composante protono-nucléaire des rayons cosmiques loin de la Terre. Nous avons déjà souligné aux chapitres 5 et 15 que l'absence de l'information immédiate dans ce domaine crée les difficultés de principe dans le développement de l'astronomie des rayons cosmiques (il s'agit d'établir la valeur inconnue jusqu'à présent des coefficients $\varkappa_e = w_{\text{r.c.}}/w_c$ et $\varkappa_H = w_H/w_{\text{r.c.}}$ (cf. (15.16)).

Considérons cette question plus en détail sans craindre les répétitions. Utilisons aussi les données d'observation qui seront sans doute précisées lorsque paraîtra le présent ouvrage. Notre but n'est pourtant pas tant de communiquer des résultats concrets que d'illustrer le caractère des estimations et des arguments employés en astrophysique des hautes énergies.

Les protons et les noyaux qui font partie des rayons cosmiques entrent en collision avec les protons et les noyaux du gaz intergalactique et interstellaire. En particulier, ces collisions donnent naissance aux mésons π^0 et hypérons Σ^0 qui se décomposent rapidement avec production des rayons gamma. La désintégration d'un méson π^0 avec une probabilité de 98,8 % (c.-à-d. que pratiquement elle a toujours lieu) marche suivant le processus $\pi^0 \to 2\gamma$, dont il s'ensuit que l'énergie des rayons gamma fournie par la décomposition d'un méson π^0 au repos vaut $E_\gamma = {}^1/_2 m_\pi c^2 = 67{,}5$ MeV; la durée de vie moyenne d'un méson π^0 est de $0{,}84 \cdot 10^{-16}$ s. Un hypéron Σ^0 se décompose (avec en fait une probabilité de 100 %) suivant le processus $\Sigma^0 \to \Lambda + \gamma$, son énergie est $E_\gamma \approx 77$ MeV, la durée moyenne de sa vie est inférieure à 10^{-14} s. Outre la production directe des mésons π^0 lors des collisions nucléaires, ils sont également produits par la désintégration des mésons et des hypérons de toute sorte ($K^\pm \to \pi^\pm + \pi^0$, $\Lambda \to n + \pi^0$, etc.), dont il résulte encore une émission des rayons gamma. La probabilité et la cinétique de toutes les réactions importantes sont assez bien connues [205, 207], ce qui permet de calculer le spectre des rayons gamma avec une précision suffisante pour les applications astrophysiques discutées. Ce qui importe encore, c'est que le flux des rayons gamma cosmiques est produit certes non pas par des particules monoénergétiques, mais par des rayons cosmiques d'une certaine intensité $J_{\text{r.c.}}(E)$ isotropes suivant la direction. C'est pourquoi on observe la mise en moyenne par rapport au spectre et, notamment, l'intensité des rayons gamma d'énergie E_γ est égale à

$$J_\gamma(E_\gamma) = \tilde{N}(L) \int_{E_\gamma}^{\infty} \sigma(E_\gamma, E)\, J_{\text{r.c.}}(E)\, dE, \tag{17.1}$$

où σ est la section efficace correspondante mise en moyenne compte tenu de la composition chimique des rayons cosmiques et du gaz (on tient également compte du fait que la désintégration du méson π^0 donne naissance à deux photons), et $\tilde{N}(L) = \int_0^L N(R)\, dR$ est le nombre de particules dans le gaz le long du rayon visuel (dans l'expression (17.1) qui coïncide avec (16.11), ainsi que dans les formules ci-dessous, l'intensité $J_{\text{r.c.}}$ est considérée comme indépendante des coordonnées). L'intensité intégrale est

$$J_\gamma(>E_\gamma) = \int_{E_\gamma}^{\infty} J_\gamma(E_\gamma)\, dE_\gamma.$$

Pour un flux de rayons gamma issus d'une source discrète, on a

$$F_\gamma(>E_\gamma) = \int_\Omega J_\gamma(>E_\gamma)\, d\Omega \approx \frac{(\overline{\sigma I_{\text{r. c.}}})\, N(V)}{R^2} \approx$$

$$\approx \frac{5\cdot 10^{23}\, (\overline{\sigma J_{\text{r. c.}}})\, M}{R^2} \frac{\text{photons}}{\text{cm}^2\cdot\text{s}}, \qquad (17.2)$$

où Ω est l'angle solide ; R, la distance à la source (en cm) ; $N(V) = NV$, le nombre de particules (noyaux) de la source (V, le volume ; N, la concentration moyenne du gaz) et $M = 2\cdot 10^{-24}\, N(V)$, la masse du gaz de la source en grammes (on admet que la composition chimique de la source correspond à la répartition moyenne des éléments et c'est pourquoi, surtout pour évaluer les noyaux de He, on adopte pour la masse d'un noyau « moyen » de gaz la valeur $2\cdot 10^{-24}$g). Pour le spectre des rayons cosmiques au voisinage de la Terre (intensité $J_{\text{r.c.0}}(E) \equiv J_0(E)$) la valeur $\sigma J_0(>E_\gamma) = \int_{E_\gamma}^{\infty}\int_{E=E_\gamma}^{\infty} \sigma(E_\gamma, E) J_{\text{r.c.0}}(E)\, dE\, dE_\gamma$ est donnée sur la figure 17.1 tirée de [205]. Dans ce qui suit, nous utiliserons la valeur $\overline{\sigma J_0(E_\gamma > 100\ \text{MeV})} = 10^{-26}\ \text{s}^{-1}\cdot\text{sr}^{-1}$ et, par conséquent,

$$F_\gamma(E_\gamma > 100\ \text{MeV}) = \frac{10^{-26} NV\, (w_{\text{r. c.}}/w_0)}{R^2} =$$

$$= \frac{5\cdot 10^{-3} M\, (w_{\text{r. c.}}/w_0)}{R^2} \frac{\text{photons}}{\text{cm}^2\cdot\text{s}}, \qquad (17.3)$$

où $w_{\text{r.c.}}$ est la densité de l'énergie des rayons cosmiques dans la source sous l'hypothèse que la forme de leur spectre est la même qu'au voisinage de la Terre (c'est pourquoi $w_{\text{r.c.}}/w_0 = J_{\text{r.c.}}/J_{\text{r.c.0}}$, où $w_{\text{r.c.0}} \equiv w_0 \sim 10^{-12}$ erg/cm^3 est la densité de l'énergie des rayons cosmiques près de la Terre ; cf. (15.9)). Dans les limites de notre

approximation pour les sources du type de la Galaxie où domine l'hydrogène atomique non ionisé, $M \approx 1{,}2\ M_{\text{HI}}$, où M_{HI} est la masse de l'hydrogène neutre; la précision des calculs peut être améliorée du fait que les données sur la raie d'hydrogène ($\lambda = 21$ cm) permettent tout de suite d'obtenir le rapport M_{HI}/R^2. Dans ce qui suit nous éviterons de faire de telles mises au point qui pour le moment ne correspondent pas encore aux connaissances disponibles.

Remarquons enfin que le spectre des rayons gamma d'origine nucléaire dont il est question se concentre essentiellement pour des raisons bien claires dans le domaine des énergies $E_\gamma \gtrsim 50$-100 MeV (bien entendu, le redshift n'est pas pris en considération, et nous avons donc en vue des sources pas trop éloignées). Ce qui vient d'être dit est visualisé par la figure 17.1 et illustré par l'exemple tiré de [216]: pour les rayons gamma résultant de la décomposition des mésons π^0 on a la relation

$$\xi = \frac{F_\gamma(E_\gamma > 50 \text{ MeV}) - F_\gamma(E_\gamma > 100 \text{ MeV})}{F_\gamma(E_\gamma > 100 \text{ MeV})} = 0{,}12.$$

Par ailleurs, pour les électrons relativistes de spectre $J_e(E) = K_e E^{-2,6}$, dans le cas des rayons gamma de freinage $\xi = 2{,}03$ et pour les rayons gamma d'origine synchrotron ou émis par la diffusion Compton inverse, $\xi = 0{,}74$. Ainsi, les mesures spectrales du flux gamma permettent en principe d'établir avec une facilité relative leur nature « nucléaire ». Si cela a été fait, les mesures du flux $F_\gamma(E_\gamma > 100 \text{ MeV})$ ou de l'intensité correspondante J_γ nous fournissent tout de suite le rapport $w_{\text{r.c.}}/w_0$ pour la source, c.-à-d. le paramètre principal qui nous manquait jusqu'ici. On avance, certes, l'hypothèse sur l'identité des spectres de la source et au voisinage de la Terre. Il existe des raisons qui étayent cette hypothèse et, d'autre part, dans les conditions réelles, elle ne peut probablement qu'amener un coefficient numérique de l'ordre de l'unité. En tout cas, si l'on obtenait de cette façon la densité de l'énergie ou l'énergie totale $W_{\text{r.c.}} = w_{\text{r.c.}}V$ des rayons cosmiques dans les sources, ce serait effectuer un pas de principe dans la progression.

Ce qui vient d'être dit peut être concrétisé sur l'exemple des Nuages de Magellan et de la partie centrale de la Galaxie.

L'étude des Nuages de Magellan présente certainement de l'intérêt par elle-même. Pourtant, cet exemple est encore plus important si l'on veut répondre à la question: comment établir la justification la plus probante des modèles métagalactiques de l'origine des rayons cosmiques? A cet effet il suffit, comme nous l'avons dit au chapitre 15, de déterminer la densité de l'énergie des rayons cosmiques w_{Mg} dans la région circumgalactique. S'il s'avère que $w_{\text{Mg}} \ll w_{\text{r.c.G.}} \sim 10^{-12}$ erg/cm^{-3}, alors les modèles métagalactiques devront être rejetés. La meilleure des voies connues pour résoudre ce problème est justement la mesure du flux des rayons gamma issus des Nuages

de Magellan. Pour ces Nuages (Grand Nuage: GNM; petit Nuage: PNM), la distance jusqu'au Soleil et la masse de l'hydrogène neutre valent respectivement

$$R\,(\mathrm{GNM}) = 55\ \mathrm{kpc};\quad R\,(\mathrm{PNM}) = 63\ \mathrm{kpc};$$

$$M_{\mathrm{HI}}\,(\mathrm{GNM}) = 1{,}1\cdot10^{42}\ \mathrm{g};\quad M_{\mathrm{HI}}\,(\mathrm{PNM}) = 0{,}8\cdot10^{42}\ \mathrm{g}.$$

C'est pourquoi d'après (17.3), pour $w_{\mathrm{r.c.}} = w_0$, on a

$$\left.\begin{aligned} F_{\gamma,\,\mathrm{GNM}}\,(E_\gamma > 100\ \mathrm{MeV}) &\approx 2\cdot10^{-7}\ \mathrm{photons/cm^2\cdot s};\\ F_{\gamma,\,\mathrm{PNM}}\,(E_\gamma > 100\ \mathrm{MeV}) &\approx 1\cdot10^{-7}\ \mathrm{photons/cm^2\cdot s}\end{aligned}\right\}\quad (17.4)$$

Comme nous l'avons déjà dit, le calcul de ces flux peut être encore plus précis. Ce qui importe ici réside ailleurs: dans tous les modèles métagalactiques connus, les flux (17.4) s'obtiennent immédiatement, car dans ces modèles le rôle des sources propres des rayons cosmiques des Nuages de Magellan, de même que de la Galaxie, n'est pas grand, c'est pourquoi $w_{\mathrm{Mg}} \approx w_{\mathrm{r.c.G}} \approx w_{\mathrm{GNM}} \approx w_{\mathrm{PNM}}$. Par contre, il n'y a aucune raison de s'attendre qu'une telle égalité serait observée dans les modèles galactiques. Même si l'activité des sources des rayons cosmiques est identique, il est très probable que $w_{\mathrm{r.c.G}} > w_{\mathrm{GNM}} > w_{\mathrm{PNM}}$ du fait des dimensions plus petites des Nuages et, respectivement, de la fuite plus rapide des rayons cosmiques à partir de ces Nuages.

Ainsi, pour réfuter résolument les modèles métagalactiques d'origine des rayons cosmiques *) il suffirait d'établir que pour les deux Nuages pris ensemble, $F_{\gamma,\,\mathrm{NM}}\,(E_\gamma > 100\ \mathrm{MeV}) \ll 3\cdot10^{-7}$ photons/cm²·s ou $F_{\gamma,\,\mathrm{PNM}} \ll {}^1/_2 F_{\gamma,\,\mathrm{GNM}}$. En mettant au point les calculs, le symbole « négligeable » peut être remplacé par le symbole « inférieur ». Ce qui importe dans ces conditions, c'est que tout apport des rayons gamma dans le flux associé aux électrons relativistes n'amènerait que l'augmentation des flux F_γ et n'exercerait aucune influence sur l'interprétation donnée, par exemple sur celle du résultat $F_{\gamma,\,\mathrm{NM}}\,(E_\gamma > 100\ \mathrm{MeV}) \ll 3\cdot10^{-7}$ photons/cm²·s. Disons que ce résultat est négatif et constatons qu'il existe, comme il arrive souvent, une certaine asymétrie dans l'interprétation des résultats positifs et négatifs de l'expérience. Ainsi, si les mesures des rayons gamma issus des Nuages de Magellan témoignaient de la présence d'un flux perceptible $F_{\gamma,\,\mathrm{NM}} \gtrsim 3\cdot10^{-7}$ photon/cm²·s (nous convenons de dire que ce résultat est positif), nous n'aurions pas encore la preuve de la validité des modèles métagalactiques, du fait qu'un tel flux

*) Ce qui importe ici c'est qu'il s'agit de tous les modèles connus, alors que les mesures du fond isotrope des rayons gamma produits dans l'espace intergalactique (cf. [39, 205-207, 215]) peuvent désavouer seulement ceux des modèles, où les rayons cosmiques couvrent une très grande région, en particulier, tout l'espace métagalactique (de plus, la densité du gaz intergalactique n'est pas encore établie).

pourrait en principe être produit également par les rayons cosmiques (ainsi que par les électrons relativistes) accélérés dans les Nuages eux-mêmes. Malheureusement la mesure du flux gamma émis pour les Nuages de Magellan est un problème ardu et sa résolution est encore à venir. Il est bien plus simple et tout aussi intéressant d'explorer le rayonnement gamma en provenance de la région centrale de la Galaxie. Ce rayonnement (de $E_\gamma > 100$ MeV) a été observé,

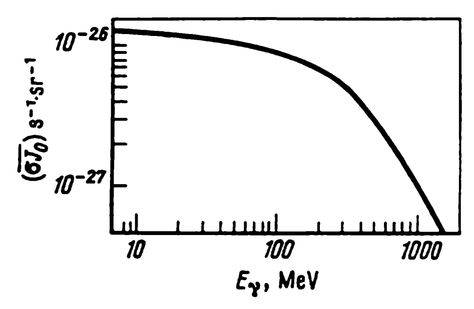


Fig. 17.1. Mise en moyenne de la valeur de $\overline{\sigma J_0 (>E_\gamma)}$ par rapport au spectre des rayons cosmiques galactiques, en fonction de l'énergie des rayons gamma produits

l'intensité de la source linéaire correspondante (« équivalente ») est de 1-2,5·10⁻⁴ photon/cm²·s·rad (cf. [216, 217, 51]). Si cette valeur est multipliée par le pouvoir de résolution angulaire (environ $\pi/6$), alors, pour le flux de la source galactique centrale, on obtient

$$F_\gamma (E_\gamma > 100 \text{ MeV}) = 3 = 10 \cdot 10^{-5} \text{ photon/cm}^2 \cdot \text{s}. \quad (17.5)$$

Ce résultat et la validité de son interprétation en tant que témoignage de l'existence d'une source étendue de rayons gamma dans la direction du centre de la Galaxie, a été mis en doute, mais il est clair à présent [206, 221] que le rayonnement gamma correspondant existe réellement, bien que ses sources ne se concentrent pas tout près du centre galactique (ce qui a été supposé auparavant [51, 216, 217]). Dans ce qui suit nous admettrons que la valeur de (17.5) est réelle. Alors, sur la base des mesures spectrales *) de même qu'à partir de plusieurs considérations indirectes, il semble qu'il s'agit de rayons gamma produits par les rayons cosmiques (c.-à.-d. es-

*) [216] a réalisé justement la mesure du rapport susmentionné

$$\xi = \frac{F_\gamma (E_\gamma > 50 \text{ MeV}) - F_\gamma (E_\gamma > 100 \text{ MeV})}{F_\gamma (E_\gamma > 100 \text{ MeV})}$$

qui s'est avéré inférieur à 0,5. [216] en a tiré la conclusion que la probabilité du fait que les rayons gamma observés doivent tirer leur origine du rayonnement synchrotron Compton n'est que de 6 %.

sentiellement des produits de décomposition des mésons π^0). Adoptons cette interprétation et tirons-en quelques conclusions.

Si l'on porte la valeur de (17.5) dans (17.3), on peut conclure que puisque $w_0 \equiv w_{\text{r.c. }0} \sim 10^{-12}$ erg/cm³ et la distance de la source centrale au Soleil $R = 10$ kpc, la source galactique centrale (le symbole correspondant est affecté d'indice c) est le siège où se concentrent les rayons cosmiques d'énergie totale

$$W_c = w_c V_c \sim 3 = 10 \cdot 10^{66} \frac{w_0}{N_c} \sim 3 = 10 \cdot \frac{10^{54}}{N_c} \text{ ergs.} \qquad (17.6)$$

Si on n'admet pas que la source centrale est petite (dimension caractéristique L_c est de l'ordre de 300 pc ou inférieure), la concentration du gaz adoptée N_c ne peut être inférieure environ à l'unité (pour $L_c \sim 10^{21}$ cm, le volume $V_c \sim 10^{63}$ cm³ et la masse du gaz $M_c \sim \sim 2 \cdot 10^{24} N_c V_c \sim 10^6 N_c M_\odot$; pour $N_c \sim 10$ cm^{-3} déjà $M_c \sim 10^7 M_\odot$, ce qui est probablement une limite pour la région de volume retenu).

Pour $N_c \sim 1$ cm^{-3}, on obtient de (17.6) l'estimation $W_c \sim \sim 3\text{-}10 \cdot 10^{54}$ ergs, ce qui n'est que d'un ordre inférieur à l'énergie totale des rayons cosmiques dans la Galaxie (cf. (15.18)). D'autre part, c'est précisément la valeur d'ordre 10^{55} ergs que l'on obtient de l'analyse des données astronomiques qui témoignent d'une explosion du noyau galactique il y a environ 10^7 années.

Si la dimension de la source centrale des rayons gamma était inférieure à 200-300 pc, la valeur $N_c \gtrsim 10$ cm^{-3} ne serait pas exclue. Alors, certes, l'énergie diminuera (cf. (17.6)), tandis qu'en général l'intensité des rayons cosmiques $J_{\text{r.c.}, c} \equiv J_c$, elle, ne diminuera pas. Par exemple, on tire de (17.6) pour $N_c \sim 10$ et $V_c \sim 10^{63}$

$$W_c \sim 3\text{-}10\ 10^{53}, \quad J_c/J_{\text{r.c. }0} = w_c/w_0 \sim 3 \cdot 10^2\text{-}3 \cdot 10^3.$$

Il semble très difficile de maintenir pendant 10^7 années les rayons cosmiques dans une région plus petite (par exemple, pour $T_c = = 3 \cdot 10^{14}$ s, le parcours de diffusion est $\sqrt{2DT_c} \sim 10^{21}$ cm pour $D \sim 10^{27}$ cm²·s^{-1}, ce qui correspond à une très petite valeur de $l \sim 0.03$ pc pour la longueur efficace du libre parcours $l \sim D/v$, $v \sim 10^{10}$ cm/s). C'est pourquoi la valeur $W_c \sim 3 \cdot 10^{53}$ ergs nous paraît être minimale au possible, et plutôt $W_c \sim 3 \cdot 10^{54}$ ergs. Dans ce cas, une source centrale jouerait un rôle important dans le bilan énergétique des rayons cosmiques de la Galaxie (puissance moyenne de l'injection $U_c \sim W_c/T_c \gtrsim 10^{40}$ ergs/s, ce qui est du même ordre de grandeur que la puissance totale de l'injection dans les modèles galactiques; cf. (15.20)).

Si la valeur de (17.5) est vraie, le flux total issu de la source centrale est égal à $\mathcal{F}_\gamma (E_\gamma > 100 \text{ MeV}) = 4\pi R^2 F_\gamma \sim 3\text{-}10 \cdot 10^{41}$ photons/s, à quoi correspond la luminosité $L_\gamma \sim \bar{E}_\gamma \mathcal{F}_\gamma \sim 10^{38}$ ergs/s. Par ailleurs, toute la Galaxie, si elle était remplie uniformément de rayons cosmiques, émettrait $\mathcal{F}_{\gamma, \text{G}} (E_\gamma > 100 \text{ MeV}) =$

$= 4 \cdot 10^{-34} 4\pi M_G \sim 10^{41}$ photons/s, puisque la masse totale du gaz de la Galaxie est $M_G \sim 3 \cdot 10^{42}$ g.

Ce qui vient d'être dit ne suffit pas, puisqu'on peut, et il le faut, comparer les données de l'astronomie gamma avec les résultats de la radioastronomie. Malheureusement, les données disponibles relatives au cas de la source étendue de rayonnement radio non thermique de la région centrale de la Galaxie sont vieilles (cf. les références de [51]). D'après ces données, le flux de la source étendue de dimension $1° \times 3°$ (volume probable $V \sim 10^{63}$ cm³) est égal à $\Phi_\nu = 3 \cdot 10^{-20}$ erg/cm²·s·Hz à la fréquence $\nu = 85{,}5$ MHz; de plus, l'indice spectral $\alpha = 0{,}7$ ($\gamma = 2\alpha + 1 = 2{,}4$). En portant ces paramètres dans les formules (5.70), (5.71) on aboutit pour la source radio centrale aux valeurs (l'indice r indique qu'on a utilisé ici les données radio)

$$W_{c,r} = \varkappa_e W_{e,r} \sim g\ 10^{61} \varkappa_H^{-3/7} \varkappa_e^{4/7} \text{ ergs}, \quad H \sim 10^{-5} (\varkappa_H \varkappa_e)^{2/7} \text{ Oe}, \quad (17.7)$$

où on admet que l'indice spectral du rayonnement radio est $\alpha = 0{,}7$ dans la bande 10^7-10^9 Hz; le choix de cette bande, ainsi que, dans certaines limites, le choix d'autres paramètres n'influe pas beaucoup sur les estimations. Si maintenant on pose de même que pour le voisinage de la Terre $\varkappa_e \sim 100$ et $\varkappa_H \sim 1$, alors (pour $V \sim 10^{63}$ cm³), on a

$$\left.\begin{aligned} &W_{c,r} \sim 3 \cdot 10^{52} \text{ ergs}, \quad W_{e,r} \sim 3 \cdot 10^{50} \text{ ergs}, \\ &H \sim 3 \cdot 10^{-5} \sim 10 H_G, \\ &w_{c,r} = \frac{W_{c,r}}{V} \sim 3 \cdot 10^{-11} \sim 30 w_{r.c.,G}, \\ &w_{e,r} = \frac{W_{e,r}}{V} \sim 3 \cdot 10^{-13} \sim 30 w_{e,G} \end{aligned}\right\} \quad (17.8)$$

Aussi grossières que soient les données initiales (et donc, dans une certaine mesure, les estimations), la valeur mentionnée de $W_{c,r}$ semble être bien inférieure à la valeur de $W_c \sim 3 \cdot 10^{53}$-10^{55} ergs fournie par les données sur les rayons gamma.

Nous pourrions donner une explication assez naturelle de cette divergence [51], mais nous passerons outre et pour une très bonne raison. Les estimations précédentes sont dans telle ou telle mesure fondées sur l'hypothèse que les sources de rayonnement gamma d'intensité accrue, observées dans la direction du centre galactique, se concentrent en une région voisine du centre lui-même. C'est cette interprétation précisément [51, 216, 217] qui était considérée comme la plus probable jusqu'aux observations rendues publiques en 1973-1974 [206, 221]. D'après ces dernières, le rayonnement concerné est issu non pas de la région galactique la plus centrale, mais d'une région très étendue entre le Soleil et le centre de la Galaxie. L'une des interprétations éventuelles de ces résultats consiste à dire

que l'intensité des rayons cosmiques (ceci peut se rapporter seulement aux particules d'énergie $E \sim$ 1-10 GeV), dans la région torique à la distance entre 4 et 5 kpc du centre galactique, est d'un ordre supérieur à celle des rayons cosmiques au voisinage de la Terre. L'intensité accrue des rayons cosmiques dans la région considérée pourrait à son tour être impliquée à leur accélération supplémentaire et à leur capture dans la région correspondante [221]. Il se peut pourtant que, dans la région mentionnée, l'intensité des rayons cosmiques est la même qu'au voisinage de la Terre, mais la densité du gaz y est sensiblement plus élevée au dépens de l'hydrogène moléculaire [222]. Pourtant, comme il s'agit des données et hypothèses préliminaires, il serait déplacé d'entrer dans le détail, d'autant plus que le but que nous nous proposons est tout autre. Nous voulons non seulement professer mais aussi illustrer par un exemple concret les possibilités que présente l'utilisation des données sur l'intensité des rayons gamma cosmiques d'énergie $E_\gamma > 50$ MeV produits par la décomposition des mésons π^0 et d'autres particules dont la naissance dans le gaz est due à l'action des rayons cosmiques (cf. également [193a]).

Dans ce qui précède, nous avons porté notre attention surtout sur les rayons gamma d'origine nucléaire, c.-à-d. résultant des collisions nucléaires des rayons cosmiques. Qui plus est, dans ce cas-là aussi, il était seulement question des énergies $E_\gamma \geqslant$ 50-100 MeV. Or, il existe certes bien d'autres possibilités. Ainsi, le domaine des énergies $E_\gamma =$ 1-50 MeV est d'un grand intérêt; c'est le domaine auquel appartiennent les rayons gamma produits par la désintégration des mésons π^0 émis par des objets à redshift z important il s'agit du rayonnement gamma du modèle cosmologique de Lemaître, de l'annihilation de la matière et de l'antimatière pour $z \gg 1$, etc.) *). Bien entendu, pour $E_\gamma < 50$ MeV, la concurrence des processus distincts de la décomposition des π^0 est bien plus importante que pour $E_\gamma > 50$ MeV. Pour autant, il existe sans aucun doute certaines possibilités pour réaliser des mesures dans le domaine des énergies $E_\gamma \sim$ 1-50 MeV (cf. [206, 215]). On peut en dire autant des observations des rayons gamma d'énergie $E_\gamma > 10^{11}$ eV qui se font par réception de la lumière Tchérenkov dans l'atmosphère [215]. Une mention spéciale méritent les rayons gamma émis par les noyaux excités résultant des réactions nucléaires et le rayonnement dû à l'annihilation positron-électron (si on ne tient pas compte du redshift, l'énergie des rayons gamma correspondants doit se concentrer au voisinage de 0,51 MeV). Nous avons déjà parlé de ces processus au début du chapitre 16. Le schéma du calcul des intensités

*) Pour une source dont la distance est caractérisée par le paramètre z, l'énergie observée sur la Terre est $E\gamma = \frac{E_{\gamma,0}}{1+z}$, où $F_{\gamma,0}$ est l'énergie d'un photon dans la source.

correspondantes est décrit, par exemple, dans l'article [207] (cf. également [205, 206] et la bibliographie de [51, 215]). Il est parfaitement possible que toutes ces branches de l'astronomie gamma ou leur majorité connaissent un essor. Cependant, il semble que de nos jours aucune d'entre elles n'est aussi prometteuse et aussi universelle que l'étude de la composante protono-nucléaire des rayons cosmiques. C'est pourquoi nous nous sommes étendus aussi longuement sur cette méthode sans traiter d'autres éventualités plus particulières.

Pour conclure ce chapitre, examinons la question de l'absorption des rayons gamma (ainsi que partiellement des rayons X), ce problème ayant un caractère de principe.

Dans le calcul du coefficient d'absorption μ des rayons gamma ou X, il importe ordinairement d'évaluer l'atténuation du rayonnement, c.-à-d. prendre en considération aussi bien l'absorption que la diffusion. Par définition, la quantité μ figure dans la relation *)

$$\frac{dJ}{dz} = -\mu J, \quad \mu = \sigma N, \tag{17.9}$$

où σ est la section efficace totale de l'absorption et de la diffusion et N, la concentration des particules (atomes, électrons) responsables de l'absorption et de la diffusion. En approximation de l'optique géométrique, toujours applicable dans les cas qui nous intéressent, et à laquelle se rapporte l'équation donnée, on a pour l'intensité: $J(\nu) = J_0 e^{-\tau}$ et pour l'épaisseur optique: $\tau = \int_{\infty}^{L} \mu \, dR$ (ou dans un milieu homogène, $\tau = \mu L$).

(17.9) suppose de plus que dans le rayon visuel l'émission des photons n'a pas lieu. Mais si cette émission est observée, l'équation de transfert devient

$$\frac{dJ(\nu)}{dz} = q(\nu) - \mu(\nu) J(\nu), \tag{17.10}$$

où $q(\nu)$ est le pouvoir émissif (suivant le nombre de photons) à la fréquence considérée $\nu = E_\gamma / h$ (cf. (16.7)).

En principe, il existe de très nombreux processus apportant leur contribution à τ; ce sont

1. Effet photoélectrique (ionisation des atomes).
2. Diffusion Compton.
3. Transitions dans le spectre continu (absorption libre-libre).
4. Transitions entre niveaux atomiques (excitation des atomes).

*) Nous ne tenons pas compte ici de l'hypothèse de l'absorption ou de la diffusion induites; autant qu'on peut en juger, elle est justifiée pour les rayons gamma et X, mais dans l'ensemble cette question impose une étude plus poussée.

5. Production des paires e^+, e^- dans le milieu.

6. Production des paires e^+, e^- sur les photons thermiques et en général « mous » (processus $\gamma + \gamma' \rightarrow e^+ \leqslant e^-$, où γ' est un photon mou).

7. Absorption sur les noyaux (effet photoélectrique nucléaire et excitation des noyaux).

8. Naissance des mésons $\pi^\pm$ et π^0 sur les protons et les noyaux. Naissance d'autres particules.

Certains de ces processus ont été déjà décrits. Ainsi, le coefficient d'absorption des transitions libre-libre (processus 3), dans le plasma d'hydrogène, est défini par l'expression (16.33). L'absorption par transitions lié-lié (processus 4) dans la gamme des rayons X ne peut jouer un rôle que pour les éléments relativement lourds, pour la simple raison que, dans le cas des éléments légers, le potentiel d'ionisation, même à partir de la couche K, n'est pas encore grand (par exemple, pour les atomes de Al de $Z = 13$, il vaut à peu près 1500 V, ce qui pour le bord de la bande d'absorption K correspond à la longueur d'onde 8 Å). La section de la diffusion Compton (processus 2) est donnée au chapitre 16.

Pour de basses énergies, le rôle essentiel dans l'absorption revient à l'effet photoélectrique, puis l'énergie allant en augmentant, la part dominante passe à la diffusion Compton. L'étude de l'effet photoélectrique (processus 1) implique en général l'évaluation de la composition chimique du milieu et du degré de son ionisation. Nous ne nous attarderons pas à décrire ce processus déterminant l'absorption des rayons X non durs (cf. [218]), mais soulignerons que l'étude détaillée de l'absorption des rayons X mous des milieux interstellaire et intergalactique est d'un intérêt exceptionnel. C'est cette étude précisément qui permettra peut-être d'obtenir des renseignements précieux sur la concentration, la composition et le degré d'ionisation du gaz dans les régions dont on sait très peu actuellement (surtout dans le milieu intergalactique). Mais c'est une question à part et nous n'avons pas le moyen de la mettre ici suffisamment en lumière.

A mesure que l'énergie croît, l'absorption par effet photoélectrique diminue, et dans l'air, aux énergies $E_\gamma \approx 25$ KeR, la contribution de la diffusion Compton s'égalise avec celle de l'effet photoélectrique. Pour $E_\gamma = 50$ KeV, la photoabsorption est déjà cinq fois plus faible que celle par effet Compton. Ainsi, pour les rayons X de $E_\gamma > 50$ KeV et jusqu'aux énergies $2\,mc^2 = 1$ MeV, lorsque commencent à apparaître les paires e^+, e^-, il ne faut tenir compte que de la diffusion Compton. Pour $E_\gamma = h\nu \ll mc^2 \approx 5\cdot 10^5$ eV, si l'on ne tient pas compte d'autres processus, la section totale de la diffusion σ_C qui figure dans (17.9) est égale à la section Thomson $\sigma_T = 8/3\pi\ (e^2/mc^2)^2 = 6{,}65\cdot 10^{-25}$ cm^2. L'augmentation de la fréquence s'accompagne de la diminution de la section, mais pour $h\nu = mc^2$, σ_C est égale encore

à $0{,}43\sigma_T$. Ainsi, avec une précision « astrophysique » habituelle (mais qui ne s'obtient pas toujours) on peut admettre que $\sigma_C \sim \sigma_T$ pour toutes les énergies des rayons gamma $E_\gamma \lesssim 1$ MeV. Avec $E_\gamma \gg \gg mc^2$, il faut appliquer la formule (16.72) et, par exemple, pour $E_\gamma = 10^3\, mc^2 = 5\cdot 10^8$ eV, on a $\sigma_C = 3\cdot 10^{-3}\sigma_T$. Des formules plus détaillées, ainsi que le tableau des valeurs de σ_C, sont donnés au § 36 de [1]. Notons encore que pour évaluer la diffusion Compton, dans (17.9) il faut entendre par N la concentration totale des électrons dans le milieu. Si l'on pose $\sigma = \sigma_C = \sigma_T$, alors, dans le milieu interstellaire (N est la concentration totale de tous les électrons),

$$\mu_C = \sigma_T N = 6{,}65\cdot 10^{-25} N \approx 0{,}4\ \mathrm{cm^2/g}. \tag{17.11}$$

Dans le milieu interstellaire, l'apport de la diffusion Compton à μ est dominant dans le domaine des énergies $E_\gamma < 10^8$ eV. Dans le domaine $E_\gamma > 10^8$ eV, l'absorption des rayons gamma incombe à la production des paires (processus 5). Dans le gaz neutre, dans le domaine des énergies $E_\gamma > 10^8$ eV, les paires sont produites en première approximation dans les conditions d'un effet d'écran total. La valeur correspondante du coefficient d'absorption dans le milieu interstellaire est

$$\mu_{\text{paires}} = 1{,}2\cdot 10^{-2}\ \mathrm{cm^2/g} = 2\cdot 10^{-26} N_a\ \mathrm{cm^{-1}}; \tag{17.12}$$

on a utilisé ici la valeur de l'unité de longueur t égale à 66 g/cm² (cf. chapitre 16) ; N_a est la concentration des atomes. Dans le plasma (gaz complètement ionisé), le cas qui nous intéresse permet de négliger l'effet d'écran et

$$\begin{aligned}\mu_{\text{paires}} &= \frac{4e^2 Z(Z+1)}{\hbar c}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 N_a \left\{\frac{7}{9}\ln\frac{2E_\gamma}{mc^2} - \frac{109}{54}\right\} = \\ &= 3{,}6\cdot 10^{-27}\left(\ln\frac{E_\gamma}{mc^2} - 1{,}9\right) N_a\ \mathrm{cm^{-1}} = \\ &= 2{,}1\cdot 10^{-3}\left(\ln\frac{E_\gamma}{mc^2} - 1{,}9\right)\mathrm{cm^2/g},\end{aligned} \tag{17.13}$$

où les valeurs numériques sont données pour l'hydrogène ($Z = 1$). Nous nous bornons ici seulement à indiquer les résultats, puisque le rôle de l'effet d'écran a été déjà discuté au chapitre 16 (pour plus de détails sur la production des paires cf. [1, 3]). Les valeurs de (17.12) et (17.13) coïncident à peu près avec $E_\gamma \sim 10^9$ eV.

L'« absorption » Compton (17.11) est sensiblement plus forte que l'absorption par production des paires (au moins tant que $\ln(E_\gamma/mc^2) \ll 100$). Pourtant, comme nous l'avons souligné, ce coefficient se rapporte seulement au domaine des énergies $E_\gamma < 10^6$ eV. Les coefficients $\mu_C = \sigma_C N$ et μ_{paires} s'égalisent pour $E_\gamma \sim 10$ eV. Déjà pour $E_\gamma = 5\cdot 10^8$ eV, le coefficient $\mu_C \sim 2\cdot 10^{-27} N \sim \sim 0{,}1\, \mu_{\text{paires}}$ (cf. (17.12)).

Dans la direction du centre de la Galaxie $\tilde{N}(L) \approx NL \sim \sim 3 \cdot 10^{22}$ cm^{-2} et la masse correspondante du gaz $\tilde{M}(L) = 2 \cdot 10^{-24} \tilde{N}(L) \approx 6 \cdot 10^{-2}$ g/cm^2; dans la Métagalaxie $\tilde{M}(L) \sim \sim 0,1$ g/cm^2 (pour $L = R_{\text{ph}} \sim 10^{28}$ cm). C'est pourquoi (17.12) rend tout de suite clair que, dans les conditions discutées, l'absorption des rayons gamma (pour $E_\gamma \gtrsim 10^8$ eV) est faible; par exemple, pour $\tilde{M}(L) \sim 0,1$ g/cm^2, l'épaisseur optique $\tau \sim 10^{-3}$ cm et le facteur $e^{-\tau} \approx 1 - \tau$ peut être considéré à 0,1 % près égal à l'unité. Cette conclusion reste également vraie pour l'évaluation de l'absorption des rayons gamma sur les noyaux (processus 7).

Il faut examiner spécialement le processus 6: l'absorption des rayons gamma associée à la production des paires e^+, e^- sur les photons thermiques [219]. Dans un système de coordonnées où l'impulsion totale de deux photons est nulle, la naissance des paires commence avec l'énergie $E'_\gamma = mc^2$. Dans un système du laboratoire qui comporte un photon gamma d'énergie E_γ et un photon thermique d'énergie ϵ_{ph}, au seuil de la production correspond l'énergie *)

$$E_{\gamma,0} = \left(\frac{mc^2}{\epsilon_{\text{ph}}}\right) mc^2 = 5 \cdot 10^5 \left(\frac{mc^2}{\epsilon_{\text{ph}}}\right) \text{eV}. \qquad (17.14)$$

Pour les photons optiques $\epsilon_{\text{ph}} \sim 1$ eV et $E_{\gamma,0} \sim 2 \cdot 10^{11}$ eV; pour les photons du fond métagalactique cosmologique de température $T \sim 3$°K, l'énergie moyenne $\bar{\epsilon}_{\text{ph}} \sim 10^{-3}$ eV (pour le rayonnement thermique, $\bar{\epsilon}_{\text{ph}} = 2,7\,\varkappa T$) et $E_{\gamma,0} \sim 2 \cdot 10^{14}$ eV. Ce n'est que dans le cas de la naissance des paires sur les photons X de $\bar{\epsilon}_{\text{ph}} \sim 10^3$-$10^4$ eV, que l'énergie $E_{\gamma,0} \sim 10^7$-10^8 eV et l'absorption correspondante peut être importante pour les rayons gamma relativement peu durs. Pourtant, en moyenne dans la Galaxie et la Métagalaxie, la densité de l'énergie du rayonnement X est très faible (dans la Galaxie, $\bar{w}_{\text{ph},r} \sim 10^{-6}$ eV/cm^3); elle n'est importante que dans les sources des rayons X cosmiques. Pour les photons optiques de l'espace métagalactique, la densité de l'énergie $w_{\text{ph},0} \sim 10^{-2}$ eV/cm^3 et pour le rayonnement métagalactique cosmologique, $\bar{w}_{\text{ph},T} \sim 0,3$ eV/cm^3.

*) Le plus simple est probablement d'obtenir ce résultat même sans recourir à la transformation d'un système de référence en un autre. En effet, au seuil de la naissance des paires dans un système du laboratoire, d'après les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion,

$$E_\gamma + \epsilon_{\text{ph}} = \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E_\gamma - \epsilon_{\text{ph}} = \frac{2mcv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

où v est la vitesse de la paire en formation. D'où

$$E_\gamma = \frac{mc^2(1 + v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{v}{c} = \frac{E_\gamma - \epsilon_{\text{ph}}}{E_\gamma + \epsilon_{\text{ph}}}$$

et sous la condition $E_\gamma \ll \epsilon_{\text{ph}}$, on est immédiatement amené à (17.14).

Le coefficient d'absorption conditionné par les photons optiques est calculé dans [219]; la valeur correspondante de μ est maximale avec $E_\gamma = 10^{12}$ eV:

$$\mu_{max} \sim 7.10^{-26}\, w_{ph}\, cm^{-1}, \qquad (17.15)$$

où w_{ph} est la densité de l'énergie du rayonnement en eV/cm³. Pour le rayonnement thermique à température $T = 5800$ °K ($\varkappa T = 0{,}5$ eV) les valeurs du rapport μ/w_{ph} sont données dans le tableau 17.1.

Pour $w_{ph} \sim 10^{-2}$ eV/cm², l'épaisseur optique $\tau_{max} \sim 7 \cdot 10^{-28} L$ et dans le rayon photométrique de la Métagalaxie $R_{ph} \sim 10^{28}$ cm, on a $\tau_{max} \sim 7$. L'absorption sur les photons du fond cosmologique est d'un ordre et demi encore plus élevée, mais le maximum est atteint seulement avec $E_\gamma \sim 10^{15}$ eV.

Ainsi, pour les rayons gamma de très haute énergie $E_\gamma > 10^{11}$ eV et surtout $E_\gamma > 10^{14}$ eV, l'absorption des rayons gamma par production des paires sur les photons thermiques (processus 6) peut être bien forte. Notons que les collisions des rayons cosmiques (protons et noyaux) d'énergie suffisamment haute avec les photons thermiques s'accompagnent des réactions photonucléaires (processus 7). Pourtant, dans ce cas (dans le système du laboratoire) ces processus ne se rapportent pas directement au problème de l'absorption des rayons gamma. Par contre, ils peuvent jouer un rôle important dans

Tableau 17.1

Energie des photons gamma, eV	$10^{26}\ \mu/w_{ph}$, cm^{-1} (eV/cm^3)$^{-1}$	Energie des photons gamma, eV	$10^{26}\ \mu/w_{ph}$, cm^{-1} (eV/cm^3)$^{-1}$
10^{11}	0,05	$5 \cdot 10^{12}$	4
$5 \cdot 10^{11}$	5	10^{13}	2
10^{12}	7	$5 \cdot 10^{13}$	0,7

l'étude de la production des rayons gamma par décomposition des mésons π^0 et dans la discussion de la question sur le changement de la composition chimique des rayons cosmiques et sur la «coupure» de leur spectre avec $E \sim 10^{19}$-10^{20} eV (cf. [220]).

BIBLIOGRAPHIE

1. HEITLER W. The Quantum Theory of Radiation.
2. В. Л. ГИНЗБУРГ, ЖЭТФ 9, 981 (1939).
3. В. Б. БЕРЕСТЕЦКИЙ, Е. Л. ЛИФШИЦ, Л. П. ПИТАЕВСКИЙ, Релятивистская квантовая теория, « Наука », 1968.
4. А. ЭЙНШТЕЙН, Собрание научных трудов, т. I, «Наука», 1965, стр. 53.
5. PAULI W. The Theory of Relativity.
6. Л. Д. ЛАНДАУ, Е. М. ЛИФШИЦ, Теория поля, « Наука », 1973.
7. В. Л. ГИНЗБУРГ, ДАН СССР 23, 775 (1939); 24, 131 (1939).
8. Е. Л. ФЕЙНБЕРГ, ЖЭТФ 50, 203 (1966). Проблемы теоретической физики (сборник памяти И. Е. Тамма). « Наука », 1972, стр. 248.
9. А. П. БЕЛОУСОВ, ЖЭТФ 9, 658 (1939).
10. В. Л. ГИНЗБУРГ, Труды ФИАН СССР 3, 185 (1946); ЖЭТФ 13, 33 (1943).
11. М. А. МАРКОВ, ЖЭТФ 16, 800 (1946).
12. Е. С. ФРАДКИН, ЖЭТФ 20, 211 (1950).
13. J. P. OSTRIKER, J. E. GUNN, Astrophys. J. 157, 1395 (1969).
14. F. C. MICHEL, H. C. GOLDWIRE, Astrophys. Lett. 5, 21 (1970).
15. L. DAVIS, M. GOLDSTEIN, Astrophys. J. (Letters) 159, L 81 (1970).
16. В. Л. ГИНЗБУРГ, УФН 103, 393 (1971).
17. В. Л. ГИНЗБУРГ, Проблемы теоретической физики (сборник памяти И. Е. Тамма), « Наука », 1972, стр. 192.
18. M. BORN, Ann. d. Phys. 30, 1 (1909).
19. T. FULTON, F. ROHRLICH, Ann. oh Phys. 9, 499 (1960); F. Rohrlich, Classical Charged Particles, Addison-Wesley Publ. Co., 1965.
20. C. LEIBOWITZ, A. PERES, Ann. of Phys. 25, 400 (1963).
21. А. И. НИКИШЕВ, В. И. РИТУС, ЖЭТФ 56, 2035 (1969).
22. В. Л. ГИНЗБУРГ, УФН 98, 569 (1969).
23. A. KOVETZ, G. E. TAUBER, Amer. J. Phys. 37, 382 (1969).
24. J. L. ANDERSON, J. W. RYON, Phys. Rev. 181, 1765 (1969).
25. W. T. GRANDY, Nuovo Cimento 65A, 738 (1970).
26. И. Е. ТАММ, И. М. ФРАНК ДАН СССР 14, 107 (1937).
27. Л. Д. ЛАНДАУ, Е. М. ЛИФШИЦ, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
28. М. Л. ТЕР-МИКАЭЛЯН, Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях, изд. АН Арм. ССР, 1969.

29a. В. Л. ГИНЗБУРГ, ДАН СССР 56, 145 (1947), Краткие сообщения по физике, ФИАН СССР, № 2, 40 (1972). b. В. Л. Гинзбург, Письма ЖЭТФ 16, 501 (1972). c. Д. Ф. Алферов, Ю. А. Башмаков, Е. Г. Бессонов, Труды ФИАН СССР, 80, 100 (1975).

---

*) Les revues ЖЕТФ (Soviet Physics — JETP), УФН (Soviet physics uspekhi) et ДАН (Soviet physics doklady) indiquées dans la bibliographie sont traduites systématiquement en anglais et publiées par American Institut of Physics.

30. А. И. НИКИШЕВ, В. И. РИТУС, УФН 100, 724 (1970); Ann. of Phys. 69, 555 (1972); Nuclear Phys B44, 236 (1972).
31a. В. Л. ГИНЗБУРГ, В. Н. САЗОНОВ, С. И. СЫРОВАТСКИЙ, УФН 94, 63 (1968), б. В. Л. ГИНЗБУРГ, С. И. СЫРОВАТСКИЙ, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 7, 375 (1969).
32. И. Я. ПОМЕРАНЧУК, ЖЭТФ 9, 915 (1939), Собрание научных трудов т. 2, Изд. « Наука », 1972, стр. 40.
33. C. S. SHEN, Phys. Rev. Lett. 24, 410 (1970); E. V. Souvorov, J. V. Tchugounov, Astrophys. a. Space Sci. 23, 189 (1973); N. D. LUBART, Phys. Rev D9, 2717 (1974).
34. В. Л. ГИНЗБУРГ, Г. Ф. ЖАРКОВ, ЖЭТФ 47, 2279 (1964).
35. D. M. CHITRE, R. H. PRICE, Phys. Rev. Lett. 29, 185 (1972).
36. А. Г. ДОРОШКЕВИЧ, И. Д. НОВИКОВ, А. Г. ПОЛНАРЕВ, ЖЭТФ 63, 1538 (1972).
37. Г. Г. ГЕТМАНЦЕВ, В. Л. ГИНЗБУРГ, ДАН СССР 87, 187 (1952).
38. В. Л. ГИНЗБУРГ, С. И. СЫРОВАТСКИЙ, УФН 87, 65 (1965).
39. V. GINZBURG, S. I. SYROVATSKI, The Origin of Cosmic Rays, Pergamon Press (1964).
40. И. С. ГРАДШТЕЙН, И. М. РЫЖИК, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.
41. M. J. REES, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 135, 345 (1967).
42. M. RYLE, M. S. LONGAIR, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 136, 123 (1967).
43. L. M. OZERNOÏ, V. N. SAZONOV, Astrophys. a. Space Sci. 3, 365 (1969).
44. F. F. GARDNER, J. B. WHITEOAK, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 4, 245 (1966).
45. В. В. ЖЕЛЕЗНЯКОВ, Радиоизлучение Солнца и планет, « Наука », 1964.
46. S. CHANDRASEKHAR, Radiative Transfer, Oxford, (1950).
47. W. SHURKLIFF, Polarized Light, Cambridge (Massachusetts) (1962).
48. K. C. WESTFOLD, Astrophys. J. 130, 241 (1959).
49. Б. А. ТРУДНИКОВ, ДАН СССР 118, 913 (1958).
50. А. А. КОРЧАК, С. И. СЫРОВАТСКИЙ, Астрон. ж. 38, 885 (1961).
51. В. Л. ГИНЗБУРГ, УФН 108, 273 (1972).
52. T. WEEKS, High Energy Astrophysics. London (1969) Л. М. Озерной, О. Ф. ПРИЛУЦКИЙ, И. Л. РОЗЕНТАЛЬ, Астрофизика высоких энергий, Атомиздат (1973).
53. D. TER HAAP, Physics Reports 3C, № 2, 57 (1972).
54. M. J. REES, Nature 229, 312 (1971); Nature, Phys. Sci. 230, 55 (1971).
55. J. M. GANN, J. P. OSTRIKER, Astrophys. J. 165, 523 (1971).
56. J. ARONS, Astrophys. J. 177, 395 (1972), R. D. Blandford, Astron. Astrophys. 20, 135 (1972).
57. В. М. АГРАНОВИЧ, В. Л. ГИНЗБУРГ, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, « Наука », 1965.
58. В. Л. ГИНЗБУРГ, ЖЭТФ 10, 601 (1940).
59. Ю. А. РЫЖОВ, Радиофизика 2, 869 (1959).
60. В. Л. ГИНЗБУРГ, В. Я. ЭЙДМАН, ЖЭТФ 43, 1865 (1962).
61. В. Л. ГИНЗБУРГ, ЖЭТФ 10, 589 (1940).
62. K. W. WATSON, J. M. JAUCH, Phys. Rev. 74, 950, 1485 (1948); 75, 1249 (1949).
63. М. И. РЯЗАНОВ, ЖЭТФ 32, 1244 (1957).
64. V. GINZBURG, The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas, Pergamon Press, 1970.
65. Б. М. БОЛОТОВСКИЙ, УФН 62, 201 (1957); 75, 295 (1961).
66. J. JELLEY, Cerenkov Radiations and Its Applications, London (1958).
67. В. П. ЗРЕЛОВ, Излучение Вавилова — Черенкова и его применение в физике высоких энергий, Атомиздат, 1968.
68. В. Л. ГИНЗБУРГ, УФН 69, 537 (1959).

69. В. Л. ГИНЗБУРГ, И. М. ФРАНК, ЖЭТФ 16, 15 (1946).
70. Ф. Г. БАСС, В. М. ЯКОВЕНКО, УФН 86, 189 (1965).
71. Г. М. ГАРИБЯН, ЖЭТФ 37, 527 (1959). Препринт ЕФИ-ТФ-13, Ереван, 1970.
72. V. V. TAMOÏKINE, Astrophys. a. Space Sci. 16, 120 (1972).
73a. В. Л. ГИНЗБУРГ, Радиофизика 16, 512 (1973). b. В. Л. ГИНЗБУРГ, В. Н. ЦЫТОВИЧ, ЖЭТФ 65, 132 (1973).
74. И. М. ФРАНК, Проблемы теоретической физики (сборник памяти И. Е. Тамма), « Наука », 1972, стр. 350.
75. В. Л. ГИНЗБУРГ, ЖЭТФ 10, 608 (1940).
76a. А. ГАЙЛИТИС, Радиофизика 7, 646 (1964), В. В. МУСАХАНЯН, А. И. НИКИШЕВ, ЖЭТФ 66, 1258 (1974). b. И. М. Франк, Известия АН СССР, сер. физ. 6, 3 (1942); УФН 68, 397 (1959).
77. В. Л. ГИНЗБУРГ, И. М. ФРАНК, ДАН СССР 56, 583 (1947).
78. В. Л. ГИНЗБУРГ, В. М. ФАЙН, ЖЭТФ 35, 817 (1958).
79. В. Л. ГИНЗБУРГ, В. Я. ЭЙДМАН, ЖЭТФ 36, 1823 (1959).
80. В. В. ЖЕЛЕЗНЯКОВ, Радиофизика 2, 14 (1959).
81. V. GINZBURG, V. V. GELEZNIAKOV, Phil. Mag. 7, 451 (1962); 11, 197, 876 (1965).
82. В. Л. ГИНЗБУРГ, В. В. ЖЕЛЕЗНЯКОВ, Радиофизика 1, № 5-6, 9 (1958); Астрон. ж. 36, 233 (1959).
83. И. Е. ТАММ, УФН 68, 387 (1959).
84. Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ, Собрание трудов, изд. АН СССР, т. II, 1947, стр. 334.
85. В. Е. ПАФОМОВ, ЖЭТФ 32, 366 (1957); 36, 1853 (1959).
86. В. Л. ГИНЗБУРГ, В. В. ЖЕЛЕЗНЯКОВ, Радиофизика, 1, № 2, 59 (1958).
87. В. Я. ЭЙДМАН, Радиофизика, 3, 192 (1960).
88. В. П. ГАВРИЛОВ, А. А. КОЛОМЕНСКИЙ, Письма ЖЭТФ 14, 617 (1971); 16, 29 (1972).
89. D. PINES, D. BOHM, Phys. Rev. 85, 338 (1952).
90. D. PINES, Elementary Excitations in Solids, New York, (1963).
91. В. Л. ГИНЗБУРГ, ЖЭТФ 34, 1593 (1958).
92. D. BOHM, E. P. GROSS, Phys. Rev. 75, 1851 (1949).
93. Л. Д. ЛАНДАУ, ЖЭТФ 16, 574 (1946).
94. В. Я. ЭЙДМАН, ЖЭТФ 34, 131 (1958); 36, 1335 (1959); 41, 1971 (1961).
95. М. Е. ГЕРЦЕНШТЕЙН, ЖЭТФ 27, 180 (1954).
96. И. М. ФРАНК, Сборник памяти С. И. Вавилова, изд. АН СССР, 1952, стр. 173.
97. В. Л. ГИНЗБУРГ, В. Я. ЭЙДМАН, ЖЭТФ 35, 1508 (1958).
98. Л. А. ВАЙНШТЕЙН, Электромагнитные волны, « Советское радио », 1957.
99. В. Л. ГИНЗБУРГ, Сборник памяти С. И. Вавилова, изд. АН СССР, 1952, стр. 193.
100. В. Л. ГИНЗБУРГ, И. М. ФРАНК, ДАН СССР, 56, 699 (1947).
101. Л. С. БОГДАНКЕВИЧ, ЖТФ 29, 1086 (1959).
102. В. Н. ЦЫТОВИЧ, ЖЭТФ 42, 457 (1962); ЖТФ 33, 795 (1963).
103. C. L. WANG, G. F. DELL, H. UTO, L. C. YUAN, Phys. Rev. Lett. 29, 814 (1972); M. L. CHERRY, D. MÜLLER, J. A. PRINCE, Nuclear Instr. a. Methods 115, 141 (1974).
104. Ф. Р. АРУТЮНЯН, А. НАЗАРЯН, А. А. ФРАНГЯН, ЖЭТФ 62, 2044 (1972); Abstr. 12-th Conf. Cosmic Rays 6, 2469 (1971); А. И. АЛИХАНЬЯН и др., Письма ЖЭТФ 16, 316 (1972).
105. G. B. YODH, Y. ARTRU, R. RAMATI, Astrophys. J. 181, 725 (1973); L. DURAND, Astrophys. J. 182, 417 (1973).
106. P. GOLDSMITH, J. V. JELLEY, Phil. Mag. 4, 836 (1959).
107. A. SOMMERFELD, Ann. d. Physik 44, 177 (1914).

108. M. REES, Mon. Not. 135, 345 (1967). Astrophys. J. (Letters) 152, L 145 (1968).
109. A. CAVALIERE, P. MORRISON, L. SARTORI, Science 173, 625 (1971).
110. В. ВАЙСКОПФ, УФН 84, 183 (1964); Я. А. СМОРОДИНСКИЙ, В. А. Угаров, УФН 107, 141 (1972).
111. N. C. McGILL, Contempor. Phys. 9, 33 (1968).
112. Б. М. БОЛОТОВСКИЙ, В. Л. ГИНЗБУРГ, УФН 106, 577 (1972); Эйнштейновский сборник 1972, « Наука », 1974, стр. 212.
113. A. SOMMERFELD, Göttingen Nachrichten, 99, 363 (1904), 201 (1905); A. SOMMERFELD, Optik 47, (1950).
114. I. E. TAMM, J. Phys. URSS 1, 439 (1939).
115. H. MOTZ, L. SCHIFF, Amer. J. Phys. 21, 258 (1953).
116. В. Я. ЭЙДМАН, Радиофизика 15, 634 (1972); Астрофизика 8, 609 (1972).
117. V. V. GELEZNIAKOV, Astrophys. a. Space Sci. 2, 417 (1968).
118. В. Н. САЗОНОВ, В. Н. ЦЫТОВИЧ, Радиофизика 11, 1287 (1968).
119. В. Н. САЗОНОВ, ЖЭТФ 56, 1075 (1969).
120. R. RAMATY, J. Geophys. Res. 73, 3573 (1968).
121. D. B. METROSE, Astrophys. a. Space Sci. 2, 171 (1968).
122. В. Н. САЗОНОВ, Астрон. ж. 46, 1016 (1969); 49, 1197 (1972).
123. В. В. ЖЕЛЕЗНЯКОВ, Е. В. СУВОРОВ, ЖЭТФ 54, 627 (1968).
124. V. V. GELEZNIAKOV, E. V. SOUVOROV, Astrophys. a. Space Sci. 15, 3 (1972).
125. В. Л. БРАТМАН, Е. В. СУВОРОВ, ЖЭТФ 55, 1415 (1968).
126. V. GINZBURG, L. OZERNOÏ, Astrophys. J. 144, 599 (1966).
127. В. В. ЖЕЛЕЗНЯКОВ, ЖЭТФ 51, 570 (1966); Астрон. ж. 44, 42 (1967).
128. R. McCRAY, Science 154, 1320 (1966).
129a. С. А. КАПЛАН, В. Н. ЦЫТОВИЧ, Плазменная астрофизика, « Наука », 1972. б. В. Н. ЦЫТОВИЧ, С. А. КАПЛАН, Астрофизика 8, 441 (1972).
130. V. M. AGRANOVICH, V. GINZBURG, Progr. Optics, ed. E. Wolf 9 (1971), 235.
131. В. М. АГРАНОВИЧ, В. Л. ГИНЗБУРГ, ЖЭТФ 63, 838 (1972); cf. également УФН 108, 749 (1972).
132. Ф. И. ФЕДОРОВ, УФН 108, 762 (1972).
133. V. M. AGRANOVICH, V. I. UDSON, Optics Commun. 9, 58 (1973).
134. А. Г. МОЛЧАНОВ, ФТТ 8, 1156 (1966).
135. J. Nye Physical Properties of Crystals. Their Representation by Tensors and Matrices, Oxford (1964).
136. В. М. АГРАНОВИЧ, В. Л. ГИНЗБУРГ, ЖЭТФ 61, 1243 (1971).
137. В. М. АГРАНОВИЧ, Теория экситонов, « Наука », 1968.
138. В. Л. ГИНЗБУРГ, В. В. КЕЛЛЕ, Письма ЖЭТФ 17, 428 (1973).
139. В. Л. ГИНЗБУРГ, А. А. РУХАДЗЕ, Волны в магнитоактивной плазме « Наука », 1975.
140. В. Н. ЦЫТОВИЧ, Теория турбулентной плазмы, Атомиздат, 1971.
141. А. В. ГУРЕВИЧ, А. Б. ШВАРЦБУРГ, Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере, « Наука », 1973.
142. Б. М. СМИРНОВ, Физика слабоионизованного газа, « Наука », 1972.
143a. В. П. СИЛИН, УФН 108, 617 (1972). б. В. П. СИЛИН, Введение в кинетическую теорию газов, « Наука », 1971. в. В. П. СИЛИН, А. А. РУХАДЗЕ, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, 1961 г. R. J. GOULD. Ann. of Phys. 84, 480 (1974).
144. Н. С. ЕРОХИН, С. С. МОИСЕЕВ, УФН 109, 225 (1973).
145. Л. М. ГОРБУНОВ, УФН 109, 631 (1973).
146. Сборники « Вопросы теории плазмы », ред. М. А. Леонтович, т. 1—8, Атомиздат, 1963-1974.
147. И. Е. ТАММ, Основы теории электричества, « Наука », 1966.
148. C. MOLLER, The Theory of Relativity, Clarendon Press, (1972).

149. I. BREVIK, Mat. Fys. Medd. Vid. Selsk. 37, № 11 (1970); 37, № 13 (1970).
150. Д. В. СКОБЕЛЬЦЫН, УФН 110, 253 (1973).
151 a. В. Л. ГИНЗБУРГ, УФН 110, 309 (1973). b. G. B. WALKER, D. G. LAHOZ, Nature 253, 339 (1975). c. В. Л. ГИНЗБУРГ, В. А. УГАРОВ, УФН 118, № 175 (1976).
152. Л. Д. ЛАНДАУ, Е. М. ЛИФШИЦ, Статистическая физика, « Наука », 1964.
153. А. А. АБРИКОСОВ, Л. П. ГОРЬКОВ, И. Е. ДЗЯЛОШИНСКИЙ, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Физматгиз, 1962.
154. А. Г. СИТЕНКО, Электромагнитные флуктуации в плазме, изд. ХГУ, 1965.
155. С. М. РЫТОВ, Введение в статистическую радиофизику, « Наука », 1966.
156. В. М. ФАЙН, Квантовая радиофизика. Фотоны и нелинейные среды, « Советское радио », 1972.
157. Г. С. ГОРЕЛИК, УФН 44, 33 (1951).
158. В. Л. ГИНЗБУРГ, УФН 46, 348 (1952).
159. H. NYQUIST, Phys. Rev. 32, 110 (1928).
160. Е. М. ЛИФШИЦ, ЖЭТФ 29, 94 (1955).
161. И. Е. ДЗЯЛОШИНСКИЙ, Е. М. ЛИФШИЦ, Л. П. ПИТАЕВСКИЙ, УФН 73, 381 (1961).
162. W. G. VAN KAMPEN, B. R. A. NIJBOER, K. SCHRAM, Phys. Lett. 26A, 307 (1968).
163. B. W. NINFAM, V. A. PARSEGIAN, G. H. WEISS, J. Stat. Phys. 2, 323 (1970); E. GERLACH, Phys. Rev. B4, 393 (1971).
164. H. B. G. CASIMIR, Proc. Kon. Ned. akad. Wetenskab 51, 793 (1948); T. H. BOYER, Ann. of Phys. 56, 474 (1970).
165. А. И. МАРКУШЕВИЧ, Краткий курс теории аналитических функций, Физматгиз, 1961.
166. Ю. С. БАРАШ, В. Л. ГИНЗБУРГ, Письма ЖЭТФ 15, 567 (1972).
167. Ю. С. БАРАШ, Радиофизика 16, 1086, 1227 (1973).
167a. Ю. С. БАРАШ, В. Л. ГИНЗБУРГ, УФН 116, 5 (1975).
168. В. Л. ГИНЗБУРГ, В. М. ФАЙН, ЖЭТФ 32, 162 (1957); Радиотехника и электроника 2, 780 (1957).
169. И. Л. ФАБЕЛИНСКИЙ. Молекулярное рассеяние света, « Наука », 1965.
170. А. ЭЙНШТЕЙН, Собрание научных трудов, т. 3, « Наука », 1966, стр. 216.
171. В. Л. ГИНЗБУРГ, УФН 106, 151 (1972).
172. И. И. СОБЕЛЬМАН, Введение в теорию атомных спекторов, Физматгиз, 1963; Ш. ЧЕН, М. ТАКСО, УФН 66, 391 (1958).
173. М. БОРН, Оптика ГНТУ, 1937.
174. J. P. MCTAGUE, G. BIRNBAUM, Phys. Rev. A3, 1376 (1971).
175. В. Л. ГИНЗБУРГ, ДАН СССР 30, 397 (1941).
176. M. LEONTOVITCH, Z. Phys. 72, 247 (1931).
177. В. Л. ГИНЗБУРГ, ДАН СССР 42, 172 (1944); Известия АН СССР, сер. физ., 9, 174 (1945).
178. М. М. СУЩИНСКИЙ, Спектры комбинационного рассеяния молекул и кристаллов, « Наука », 1969; В. С. ГОРЕЛИК, И. М. СУЩИНСКИЙ, УФН 98, 237 (1969).
179. В. Л. ГИНЗБУРГ, УФН 77, 621 (1962).
180. А. П. ЛЕВАНЮК, ЖЭТФ 66, 2555 (1974); В. Л. ГИНЗБУРГ, А. П. ЛЕВАНЮК, 47А, 345 (1974).
181. В. А. АЛЕКСЕЕВ, И. И. СОБЕЛЬМАН, ЖЭТФ 55, 1879 (1968).
182. Л. Д. ЛАНДАУ, Е. М. ЛИФШИЦ, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1958.

183. Н. БЛОМБЕРГЕН, УФН 97, 307 (1969); В. С. СТАРУНОВ, И. Л. ФАБЕЛИНСКИЙ, УФН 98, 441 (1969).
184. Сборник « Некогерентное рассеяние радиоволн », « Мир » (1965).
185. В. Л. ГИНЗБУРГ, В. Н. ЦЫТОВИЧ, ЖЭТФ 65, 1818 (1973).
186. В. Л. ГИНЗБУРГ, Современная астрономия, « Наука », 1970.
187. Д. Д. КРАУС, Радиоастрономия, « Советское радио », 1973.
188. A. PACHOLCZYC, Radioastrophysics, San Francisco, (1970).
189. S. Haykawa, Cosmic Ray Physics. Cosmic and Astrophysical Aspects, New-York, 1969.
190. Сборник « Нейтрино », « Наука », 1970; А. ВУЛЬФЕНДЕЙЛ, УФН 103, 739, (1971).
191. V. GINZBURG, The Origin of Cosmic Rays, Gordon a. Breach Sci. Publ., (1969); Phil. Trans. Roy. Soc. 277, 463 (1975). В. Л. ГИНЗБУРГ, С. И. СЫРОВАТСКИЙ, УФН 88, 485 (1966).
192a. Proc. 12-th Intern. Conf. on Cosmic Rays 1971. Invited and Rapporteur Papers Published in Hobart, Austrailia, 1973. b. В. Л. ГИНЗБУРГ, С. И. СЫРОВАТСКИЙ, см. сб. 192 а, стр. 53.
193. V. S. PTOUSKINE, Astrophys. a. Space Sci. 28, 3 (1974); E. Julinsson, Astrophys. J. 191, 331 (1974).
193a. В. Л. ГИНЗБУРГ, В. С. ПТУСКИН, УФН 117, № 585 (1975). Rev. Mod. Phys. 48, 161 (1976).
194. V. GINZBURG, V. PTOUSKINE, V. CYTOVITCH, Astrophys. a. Space Sci. 21, 13 (1973).
D. G. WENTZEL, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 12, 71 (1974).
195. В. С. ПТУСКИН, Космические исследования 10, 351 (1972).
196. С. В. БУЛАНОВ, В. А. ДОГЕЛЬ, С. И. СЫРОВАТСКИЙ, Космические исследования 10, 32, 721 (1972).
197. Л. И. ДОРМАН, Ускорительные процессы в космосе, в сб. « Итоги науки. Астрономия », т. 7 ВИНИТИ, 1972.
198. I. N. TOPTYGUINE, Astrophys. a. Space Sci. 20, 329 (1973).
199. N. BOHR, The Penetration of Atomic Particles through Matter, Copenhague (1948).
200. R. J. GOULD, Physica 60, 145; 62, 555 (1972); Astrophys. J. 196, 689 (1975).
201. Л. Д. ЛАНДАУ, Е. М. ЛИФШИЦ, Квантовая механика (нерелятивистская теория), Физматгиз, 1963.
202. Л. Д. ЛАНДАУ, Е. М. ЛИФШИЦ, Механика, « Наука », 1973.
203. В. Н. ЦЫТОВИЧ, ЖЭТФ 42, 803 (1962).
204. В. Л. ГИНЗБУРГ, Астр. ж. 42, 1129 (1965).
205. F. W. STECKER, Cosmic Gamma Rays, NASA, Washington, 1971.
206. Gamma-Ray Astrophysics, ed. F. W. Stecker, J. I. Trombka, Washington, (1973).
207. В. Л. ГИНЗБУРГ, С. И. СЫРОВАТСКИЙ, УФН 84, 20 (1964); В. Л. Гинзбург Elementary Processes for Cosmic Ray Astrophysics, Gordon and Breach Sci. Publ., (1969).
208. H. BETHE, E. SALPETER, Quantum mechanics of one- and two- electron atoms, Springer — Verlag, (1957).
209. G. R. BLUMENTHAL, R. J. GOULD, Rev. Mod. Phys. 42, 237 (1970).
210. J. GREENE, Astrophys. J. 130, 693 (1959), W. J. KARZAS, R. LATER, Astrophys. J. Suppl. 6, 167 (1961).
211. B. MARGON, Astrophys. J. 184, 323 (1973).
212. О. И. ДОВЖЕНКО, А. А. ПОМАНСКИЙ, ЖЭТФ 45, 268 (1963).
213. В. Л. ГИНЗБУРГ, С. И. СЫРОВАТСКИЙ, ЖЭТФ 46, 1865 (1964).
214. Non-solar X- and Gamma-ray Astronomy IAU Symposium № 37, ed. L. Gratton, Reidel Publ. Co, 1970; Г. Шоппер, Дж. Делвай, УФН 110, 607 (1973); Г. Фридман, УФН 112, 517 (1974).
214a. Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ, УФН 115, 161 (1975).

215. А. М. ГАЛЬПЕР, В. Г. КИРИЛЛОВ-УГРЮМОВ, Б. И. ЛУЧКОВ, О. Ф. ПРИЛУЦКИЙ, УФН 105, 209 (1971); 112, 491 (1974).
216. C. FICHTEL, R. HARTMAN, D. KNIFFEN, M. SOMMER, Astrophys. J. 171, 31 (1972).
217. W. L. KRAUSHAAR, a.o., Astrophys. J. 177, 341 (1972).
218. K. L. BELL, A. E. KINGSTON, Mon. Not. Roy Astron. Soc. 136, 241 (1967); R. BROWN, R. GOULD, Phys. Rev. D1, 2252 (1970); E. L. FIREMAN, Astrophys. J. 187, 57 (1974); А. ВАЙНШТЕЙН, В. КУРТ, Е. ШЕФФЕР, Астрон. ж. 45, 237 (1968).
219. А. И. НИКИШЕВ, ЖЭТФ 41, 549 (1961); В. С. БЕРЕЗИНСКИЙ, Ядерная физика 11, 399 (1970).
220. В. С. БЕРЕЗИНСКИЙ, Г. Т. ЗАЦЕПИН, Ядерная физика 13, 797 (1971).
221. J. L. PUGET, F. W. STECKER, Astrophys. J. 191, 323 (1974).
222. C. FICHTEL a.o., Astrophys. J. 198, 163 (1975).
223. Ю. С. БАРАШ, В. Л. ГИНЗБУРГ, УФН 118, 523 (1976).

TABLE DES MATIÈRES